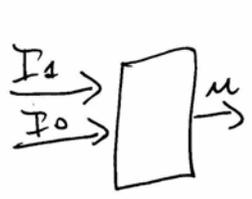


• LA SOMMA DI 2 NUMERI NATURALI

- la somma deve fornire lo stesso risultato a prescindere dalle basi in cui si opera
- per eseguire la somma di 2 numeri naturali in base 2, esistono opportuni circuiti. Tali circuiti prendono il nome di sommatore, ~~ed~~ sono delle reti combinatorie e sono espressi per intero tramite tabelle di verità.

Vediamo il circuito più semplice, il sommatore di un bit. AVEA

- 2 ingressi (i bit da sommare)
- 1 uscita (il risultato)
- la seguente tabella di verità:



$I_1$	$I_0$	$V$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tali circuiti possono essere utilizzati per costruire <sup>(2)</sup>  
sommatore a più bit, e dunque in generale  
per fare la somma fra 2 numeri binari naturali.  
Non è però completo.

Se infatti due somme  $\frac{1+1}{2}$

$1+2$  fa 1 con riporto di 1. Il riporto  
riporta a somma di 1, per cui il risultato  
sarà come  $1+1=2$ . Lo stesso caso vale per  
per il sommatore a 1 bit.  $1+1$  in  
binario fa 0 con riporto di 1.

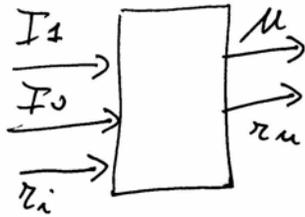
Il circuito sommatore è ~~partato~~ ~~del tipo~~  
generato partato un riporto in uscita,  
ma avrà anche un riporto in ingresso.

Nel caso di sopra  $1+2=2$  perché

$1+2=1$  con riporto di 1 e  $1+1$  riporto  $=2$

il circuito sommere vari pedati

(3)



$I_1$	$I_0$	$r_i$	$u$	$r_u$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Con tale tabella si vede è possibile sommare  
Numeri interi in base 2 naturali in base 2  
su qualunque numero di bit

(4)

- A tal punto è possibile capire perché si usò la rappresentazione in  $\mathbb{Z}_2$  e non quella in modulo e segno.

Proviamo ad esottere l'algoritmo precedente che siamo, per 2 numeri rappresentati in m.s. e c2.

- Calcoliamo  $2 + -1$  lavorando in binario (il risultato deve venire +, in qualunque modo si faccia l'operazione).

- lavoriamo in modulo e segno.

2 è rappresentato come 010  
 -1 " " come 101

$$\begin{array}{r} 2+ \\ -1 = \end{array} = \begin{array}{r} 010+ \\ 101 = \\ \hline 111 \end{array} \quad \text{ma } 111 \bar{=} -3, \text{ dunque } \bar{=} \text{ bisogna } \bar{=}.$$

- lavoriamo in  $\mathbb{Z}_2$

2 è 010      allora  $\begin{array}{r} 2+ \\ -1 = \end{array} = \begin{array}{r} 010+ \\ 111 \\ \hline 001 \end{array}$  che è 1 proprio:

-1 è 111  $\leftarrow$  ripeti 1

sempre, per realizzare la somma in modulo <sup>(5)</sup>  
e2 posso utilizzare gli stessi circuiti  
dell'aritmetica intera. Questo è il  
motivo per cui i calcolatori utilizzano  
il c2 (non vale per moltiplicazione e divisione)

- Resta da capire quando la somma di 2  
numeri ad  $N$  bit è rappresentabile su  $n$   
bit.

Consideriamo 2 numeri naturali su 3 bit.

Il max numero naturale rappresentabile su 3  
bit è 4.

Quindi se ~~ho~~ devo calcolare  $5+4$ , la  
somma è ~~calcolabile su~~ rappresentabile su  
3 bit (il risultato viene 6 che è rappresentabile)

- Me se lavoro in binario, posso eccorferene? ⑥  
 Sì; Se la somma <sup>di 2 NATURALI SUM BIT</sup> genera un riporto, vuol dire che non è rappresentabile.

- prendiamo  $5+4$  e  $5+3$ .

$$5 \bar{=} 101 \quad ; \quad 4 \bar{=} 004 \quad , \quad 3 \bar{=} 011$$

$$\begin{array}{r}
 \bar{5} + \bar{4} \\
 1 \\
 \hline
 101 + \\
 001 \\
 \hline
 110 \text{ riporto } \bar{1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \bar{5} + \bar{3} \\
 3 \\
 \hline
 101 + \\
 011 \\
 \hline
 000 \\
 \text{riporto } 1
 \end{array}
 \Rightarrow \text{ho un riporto e oltre} \\
 \text{Non è valida l'operazione.}$$

(2)

Dunque, dati 2 numeri naturali, per capire se  
la somma è rappresentabile, posso procedere  
in 2 modi:

a) lavoro in base 10 e calcolo la  
somma e vedo se è rappresentabile  
(ma così non può fare il calcolatore)

b) lavoro in base 2, faccio la somma  
e ~~vedo~~ vedo se genera un riporto.

1) se lo genera non è rappresentabile  
la somma

2) se non lo genera è rappresentabile.

⇒ tale processo è automatico e può essere  
implementato in un calcolatore.

• Le regole seguenti si applicano ~~ai numeri~~  
in base 2 alla somma di numeri in complement

o 2

REGOLE per l'operazione di SOMMA in  
COMPONENTE A2

- SOMMA DI 2 NUMERI CON SEGNO CONCORDI  
IN COMPLESSO A 2:

⇒ se cambia il segno non è rappresentabile -  
(operazione oltre i limiti)

- Esempio (a 4 bit).

$$6 = 0110$$

$$2 = 0010$$

$$6 + 2 = 0110$$

$$0010$$

$$\boxed{1}000$$

↑ il segno è cambiato: ~~non~~ ~~non~~ non è rappresentabile. La somma

$$6 = 0110$$

$$1 = 0001$$

$$6 + 1 = 0110$$

$$0001$$

$$\boxed{0}111$$

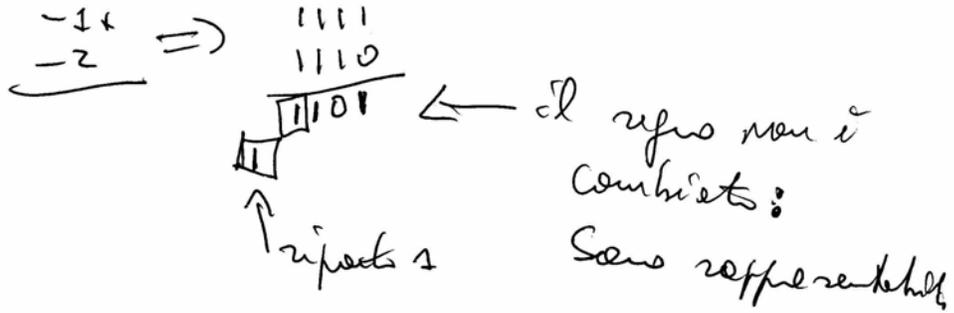


Il segno non è cambiato:  
la somma è rappresentabile.

• Esempio per numeri negativi:

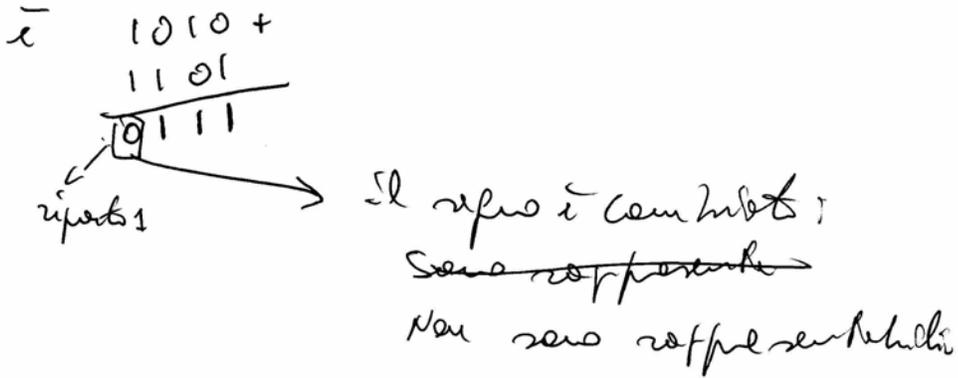
$$-1 = 1111$$

$$-2 = 1110$$



$$-6 = 1010$$

$$-3 = 1101$$



- SOMMA DI 2 NUMERI IN COMPLEMENTO A 2
- DISCORDI: la somma è sempre rappresentabile.

esempio:  $-8 + \bar{1}$

$$\begin{array}{r} 1000+ \\ 0001 \\ \hline 1001 \end{array} \text{ da } \bar{1} = -1 \text{ o.k.}$$

$-8 + \bar{7}$

$$\begin{array}{r} 1000+ \\ 0111 \\ \hline 1111 \end{array} \bar{1} = -1 \text{ o.k.}$$

$+7 - 1$

$$\begin{array}{r} 0111+ \\ 1111 \\ \hline 0110 \end{array} \bar{1} = +6 \text{ o.k.}$$

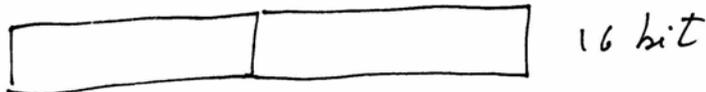
← ripeto 1 (il ripeto si trascura)

- Se Sono rappresentabili i 2 numeri, e sono discordi, la somma avrà valore assoluto inferiore ai 2 e dunque è rappresentabile

Esercizi:

①

f) Si dispone delle seguenti locazioni:



• Scegliere in quale locazione, e con quale formato, è possibile rappresentare (e rappresentarli)

- $\pm 5$
- $\pm 254$  |  $-255$
- $\pm 125.000$

②

2)

• Si dispone di 8 bit

• Si vogliono svolgere le seguenti somme:

$$2+5; \quad 12-27; \quad -125-100$$

• Discutere l'implementabilità dell'operazione su 8 bit e calcolare il risultato dell'operazione

- Nei decimali
- IN complemento a 2

• Si vogliono sommare 125 e 100 su 8 bit in complemento a 2.

• Discutere la rappresentabilità.

- Riflettendo nei decimali
- Riflettendo in complemento a 2.

• Discutere l'implementabilità su 3 bit delle <sup>3</sup> seguenti somme:

1)  $111 + 010$

2)  $010 + 001$

3)  $010 + 010$

4)  $111 + 110$

5)  $101 + 110$

fettuare. La scelta delle configurazioni da assegnare alle diverse istruzioni viene compiuta cercando di rendere efficiente la fase di decodifica, un obiettivo talmente rilevante che spesso i progettisti preferiscono utilizzare un numero superiore di bit (quindi accettando di non utilizzare alcune configurazioni) pur di rendere la più semplice e quindi la più veloce possibile la fase di decodifica delle istruzioni.

Tabella 3.2 Esempio di codifica a 8 bit delle istruzioni per un linguaggio macchina.

Istruzioni aritmetico-logiche		Istruzioni per il trasferimento dati		Istruzioni di controllo	
Codice	Istruzione	Codice	Istruzione	Codice	Istruzione
01100000	ADD	00010101	LOAD	10011001	IF_EQ
01100100	SUB	00110110	STORE	10110110	GO_SUB
01111110	AND	...	...	10101100	RETURN
...	...	...	...	...	...

Oltre al codice operativo, un'istruzione deve anche contenere gli eventuali riferimenti ai dati necessari per completare l'esecuzione. Nel caso di una tipica operazione aritmetica come l'addizione, per esempio, è necessario che sia specificato dove leggere i due operandi da sommare e dove scrivere il risultato. Naturalmente il numero dei dati da specificare è variabile, in funzione delle istruzioni (si noti inoltre che alcuni dati potrebbero essere indicati implicitamente, per esempio imponendo che il risultato sia memorizzato nella stessa locazione di memoria da cui è prelevato il primo operando). La Figura 3.4 riporta alcuni esempi di formato delle istruzioni in linguaggio macchina.



Figura 3.4 Esempi di alcuni formati utilizzati per istruzioni in linguaggio macchina.

### 3.2.4 La codifica binaria di dati numerici

Per comprendere le tecniche di codifica dei numeri in un calcolatore è utile far riferimento alla notazione decimale che si adotta abitualmente. Questa rappresentazione è basata sulla dipendenza del valore di ogni cifra dalla sua posizione nella successione di simboli che rappresenta il numero. Per esempio, la successione "4243" è interpretata  $4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ . Una stessa cifra in posizioni diffe-

renti corrisponde a valori diversi: i due simboli "4" nell'esempio sono i fattori moltiplicativi per  $10^3 = 1000$  e  $10^1 = 10$  rispettivamente. Per un generico numero intero composto di  $n$  cifre si ha che:

$$c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1c_0 = c_{n-1} \times 10^{n-1} + c_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0$$

dove ogni  $c_i$  è una cifra tra 0 e 9.

Questa stessa rappresentazione può essere adottata anche per numeri espressi in una base di numerazione  $B$  diversa da 10, la quale mette a disposizione  $B$  cifre, comprese tra 0 e  $B-1$ . Quindi:

$$c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1c_0 = c_{n-1} \times B^{n-1} + c_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + c_1 \times B^1 + c_0 \times B^0$$

Nel caso della numerazione binaria ( $B = 2$ ), l'alfabeto comprende dunque solo due cifre, 0 e 1, e il valore associato per esempio al numero  $101100_{\text{due}}$  (con il pedice indichiamo la base della numerazione adottata, e quindi il codice per interpretare correttamente il numero) può essere calcolato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 101100_{\text{due}} &= 1_{\text{dieci}} \times 2_{\text{dieci}}^5 + 0_{\text{dieci}} \times 2_{\text{dieci}}^4 + 1_{\text{dieci}} \times 2_{\text{dieci}}^3 + 1_{\text{dieci}} \times 2_{\text{dieci}}^2 + 0_{\text{dieci}} \times 2_{\text{dieci}}^1 + 0_{\text{dieci}} \times 2_{\text{dieci}}^0 \\ &= 32_{\text{dieci}} + 8_{\text{dieci}} + 4_{\text{dieci}} = 44_{\text{dieci}} \end{aligned}$$

Questo esempio mostra come convertire un numero binario in un numero decimale; con una procedura analoga si trasformano i numeri decimali in numeri binari. Per esempio,  $565_{\text{dieci}}$  viene convertito in rappresentazione binaria come segue:

$$\begin{aligned} 565_{\text{dieci}} &= 5_{\text{dieci}} \times 10_{\text{dieci}}^2 + 6_{\text{dieci}} \times 10_{\text{dieci}}^1 + 5_{\text{dieci}} \times 10_{\text{dieci}}^0 \\ &= 101_{\text{dieci}} \times 1010_{\text{dieci}}^2 + 110_{\text{dieci}} \times 1010_{\text{dieci}}^1 + 101_{\text{dieci}} \times 1010_{\text{dieci}}^0 \\ &= 101_{\text{dieci}} \times 1100100_{\text{dieci}} + 110_{\text{dieci}} \times 1010_{\text{dieci}} + 101_{\text{dieci}} \times 1_{\text{dieci}} \\ &= 111110100_{\text{dieci}} + 111100_{\text{dieci}} + 101_{\text{dieci}} = 1000110101_{\text{dieci}} \end{aligned}$$

La complessità di questa operazione risiede nella scarsa abitudine a operare in basi diverse da quella decimale. Per questo motivo si può adottare un metodo più comodo per convertire i numeri decimali in numeri binari (e comunque in numeri espressi in una base diversa da dieci). Si consideri di nuovo l'espressione:

$$\begin{aligned} c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1c_0 &= c_{n-1} \times B^{n-1} + c_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + c_1 \times B^1 + c_0 \times B^0 \\ &= c_{n-1} \times B^{n-1} + c_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + c_1 \times B + c_0 \end{aligned} \quad (\text{infatti } B^1 = B \text{ e } B^0 = 1)$$

che rappresenta un generico numero scritto in una base  $B$  diversa da 10. Dividendo numero per il valore della base, il risultato che si ottiene è:

$$\frac{c_{n-1} \times B^{n-1} + c_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + c_1 \times B + c_0}{B}$$

che può essere scomposto in modo da evidenziare quoziente e resto:

$$\begin{aligned} \frac{c_{n-1} \times B^{n-1} + c_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + c_1 \times B}{B} + \frac{c_0}{B} &= c_{n-1} \times B^{n-2} + c_{n-2} \times B^{n-3} + \dots + c_1 + \frac{c_0}{B} \\ \text{quoziente} = c_{n-1} \times B^{n-2} + c_{n-2} \times B^{n-3} + \dots + c_1 & \quad \text{resto} = c_0 \end{aligned}$$

Il resto della divisione caratteristica di possibile ottenere tu vertire il numero  $572$

- $573_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $286_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $143_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $71_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $35_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $17_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $8_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $4_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $2_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$
- $1_{\text{dieci}} : 2_{\text{dieci}} \Rightarrow \dots$

Alla fine, leggendo  $100011101_{\text{due}}$ .

**Tabella 3.3** I primi decim

Base
due
dieci
0000
0001
0010
0011

Con una successione di potenze di 2 (nell'esempio i primi  $2^4 = 16$ ), quindi il massimo. Nei linguaggi di programmazione abitualmente numeri compresi la lunghezza dell'ordine di grandezza; per esempio, la grandezza  $2^6$  (si dice "due alla sesta") è la grandezza (si dice "due alla prima"). A causa del minuziosità, un numero complesso è impiegato in molti numeri elaborati.

Il resto della divisione corrisponde all'ultima cifra del numero, espresso nella notazione caratteristica della base  $B$ . Applicando ripetutamente questo procedimento è possibile ottenere tutte le cifre del numero. Per esempio, i passi necessari per convertire il numero  $573_{\text{dec}}$  in un numero binario sono:

$573_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$286_{\text{dec}}$	resto	$1_{\text{dec}}$	(cifra binaria meno significativa)
$286_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$143_{\text{dec}}$	resto	$0_{\text{dec}}$	
$143_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$71_{\text{dec}}$	resto	$1_{\text{dec}}$	
$71_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$35_{\text{dec}}$	resto	$1_{\text{dec}}$	
$35_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$17_{\text{dec}}$	resto	$1_{\text{dec}}$	
$17_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$8_{\text{dec}}$	resto	$1_{\text{dec}}$	
$8_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$4_{\text{dec}}$	resto	$0_{\text{dec}}$	
$4_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$2_{\text{dec}}$	resto	$0_{\text{dec}}$	
$2_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$1_{\text{dec}}$	resto	$0_{\text{dec}}$	
$1_{\text{dec}}$	: $2_{\text{dec}}$	⇒	quoziente	$0_{\text{dec}}$	resto	$1_{\text{dec}}$	(cifra binaria più significativa)

Alla fine, leggendo i resti dal basso verso l'alto, si ottiene il numero binario  $1000111101_{\text{bin}}$ .

**Tabella 3.3** I primi 16 numeri naturali rappresentati nel sistema binario e in quello decimale.

Base		Base		Base		Base	
due	dieci	due	dieci	due	dieci	due	dieci
0000	0	0100	4	1000	8	1100	12
0001	1	0101	5	1001	9	1101	13
0010	2	0110	6	1010	10	1110	14
0011	3	0111	7	1011	11	1111	15

Con una successione di  $n$  bit si possono rappresentare i  $2^n$  numeri naturali da 0 a  $2^n - 1$  (nell'esempio riportato in Tabella 3.3,  $n$  è uguale a 4 e quindi sono rappresentati i primi  $2^4 = 16$  numeri). La lunghezza delle successioni di bit adottate stabilisce quindi il massimo numero che può essere rappresentato.

Nei linguaggi di programmazione, per la codifica dei numeri interi positivi si utilizzano abitualmente successioni di 32 bit, che consentono quindi di rappresentare i numeri compresi tra 0 e  $2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \cong 4 \times 10^9$ . Si noti che raddoppiando la lunghezza delle successioni il massimo numero rappresentabile aumenta esponenzialmente; per esempio passando da 32 a 64 bit il massimo numero rappresentabile diventa  $2^{64} - 1 \cong 16 \times 10^{18} = 1.6 \times 10^{19}$  e cresce quindi di circa 10 ordini di grandezza (si dice che un valore è superiore a un altro di un ordine di grandezza quando il primo valore è circa dieci volte maggiore del secondo).

A causa del minor numero di simboli dell'alfabeto binario rispetto a quello decimale, un numero codificato in notazione binaria richiede più cifre rispetto a quelle impiegate in notazione decimale. Per rendere più sintetica la rappresentazione dei numeri elaborati dai calcolatori, si sceglie sovente di impiegare la base 16 (una no-

tazione detta *esadecimale*), dunque impiegando un alfabeto di sedici cifre:  $\{0, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$ . Poiché  $16 = 2^4$ , questa notazione gode della proprietà che ciascuna cifra esadecimale corrisponde a un gruppo di quattro cifre binarie. Questa proprietà rende molto semplice la conversione dei numeri binari in numeri esadecimali. Considerando il numero ottenuto sopra,  $1000111101_{\text{bin}}$ , le cifre possono essere raggruppate a quattro a quattro, partendo da destra e spostandosi verso sinistra, ottenendo così  $0010\ 0011\ 1101_{\text{bin}}$ . Se a ciascun gruppo si associa la cifra esadecimale corrispondente, si arriva al numero esadecimale  $23D_{\text{hex}}$ .

### 3.2.5 La codifica binaria di numeri interi con segno

Il modo più semplice per codificare i numeri interi con segno, dunque positivi e negativi, consiste nell'indicare il segno seguito dal valore assoluto, come succede normalmente nella codifica decimale. Questa rappresentazione, chiamata *codifica con modulo e segno*, utilizza il primo bit della successione per indicare il segno (0 positivo e 1 negativo) e i restanti per la rappresentazione del valore assoluto del numero.

**Tabella 3.4** Numeri interi rappresentati nel sistema binario utilizzando 4 bit e una codifica con modulo e segno.

Base due		Base dieci		Base due		Base dieci		Base due		Base dieci					
0000	0	0100	4	1000	-0	1100	-4	0001	1	0101	5	1001	-1	1101	-5
0010	2	0110	6	1010	-2	1110	-6	0011	3	0111	7	1011	-3	1111	-7

Come si può notare dall'esempio riportato nella Tabella 3.4, con  $n$  bit questa codifica consente di rappresentare i numeri interi da  $-2^{n-1}-1$  a  $2^{n-1}-1$ : con 4 bit a disposizione, si rappresentano i numeri interi che vanno da  $-7$  ( $= -2^{4-1}-1$ ) a  $7$  ( $= 2^{4-1}-1$ ).

#### La codifica dei numeri interi in complemento a due

La codifica in modulo e segno ha il difetto di duplicare la rappresentazione del numero 0, come se  $-0$  fosse diverso da  $+0$ , cosa che può complicare l'esecuzione e il controllo delle operazioni aritmetiche. Per questo motivo si preferisce spesso adottare una codifica diversa, detta *rappresentazione in complemento a due*, in cui, date successioni di  $n$  bit, per rappresentare il numero  $x$  si utilizza il valore binario corrispondente a  $2^n+x$ . Con successioni di 4 bit ( $2^4$  è quindi 16), per esempio, la rappresentazione del numero  $5_{\text{dec}}$  è  $16_{\text{dec}}+5_{\text{dec}}=21_{\text{dec}}=10101_{\text{bin}}$ , ma, siccome sono disponibili solo 4 bit, viene rimosso il bit più significativo (il primo della successione), conservando solo  $0101_{\text{bin}}$ , che peraltro corrisponde alla codifica binaria del numero naturale  $5_{\text{dec}}$ .

Se invece si vuole rappresentare un numero negativo, per esempio  $-5_{\text{dec}}$ , si ottiene  $16_{\text{dec}}-5_{\text{dec}}=11_{\text{dec}}=01011_{\text{bin}}$ , da cui, eliminando ancora il bit più significativo, si ottiene  $1011_{\text{bin}}$ . La Tabella 3.5 riporta i numeri che possono essere rappresentati in complemento a due utilizzando 4 bit. Si può notare come il primo bit di tutti i numeri positivi sia 0, mentre i numeri negativi hanno il primo bit uguale a 1: è come se il primo bit rappresentasse il segno del numero. Il numero 0 ha ora una rappresentazione unica, anche se ciò impedisce di bilancia-

re i numeri po  
rappresentare  
nerale, con un  
re i numeri ch

**Tabella 3.5**

Base due
0000
0001
0010
0011

#### La codific

Nelle applicaz  
ne in questo r  
un numero  
 $\pi = 3.141592$   
sono evidenti  
prossimare ni  
ma comunqu  
be venire app  
È utile allora  
sulla notazio  
quelle associ  
tiva è 7, asso  
i numeri mag  
numeri minor  
tive sono le  
sempio, nel r  
con peso  $10^7$   
Un ulteriore  
grande o mo  
do una rapp  
per cui un nu  
 $\pm m \times B^n$  in b  
tissa (adott  
l'esponente è  
quindi rapp  
 $12345_{\text{dec}}$ , m  
 $1.2345 \times 10^4_{\text{dec}}$   
Lo stesso pr  
numero 1011  
la mantissa  
ciente conos  
quando si de  
alla rapprese  
sultati che si  
zioni (calcol  
di uno stand  
gineers (IEI

re i numeri positivi e quelli negativi: per esempio, con quattro bit, oltre allo zero si possono rappresentare 8 numeri negativi (fino a  $-8$ ) ma solo 7 numeri positivi (fino a 7). Più in generale, con una rappresentazione in complemento a due,  $n$  bit sono sufficienti per codificare i numeri che vanno da  $-2^{n-1}$  fino a  $2^{n-1}-1$ .

**Tabella 3.5** Numeri interi codificati nel sistema binario utilizzando 4 bit e una rappresentazione in complemento a due.

Base		Base		Base		Base	
due	dieci	due	dieci	due	dieci	due	dieci
0000	0	0100	4	1000	-8	1100	-4
0001	1	0101	5	1001	-7	1101	-3
0010	2	0110	6	1010	-6	1110	-2
0011	3	0111	7	1011	-5	1111	-1

### La codifica binaria di numeri razionali

Nelle applicazioni occorre spesso trattare con numeri razionali o reali. Il problema che si pone in questo caso è che per una rappresentazione esatta di molti di questi sarebbe richiesto un numero di cifre illimitato (si pensi al valore di  $1/3 = 0.33333\dots_{\text{dec}}$  oppure di  $\pi = 3.14159265359\dots_{\text{dec}}$ ). Poiché nella rappresentazione a uso di un esecutore automatico sono evidentemente utilizzabili solo successioni di bit di lunghezza finita, è necessario approssimare numeri di questo genere con numeri razionali il cui numero di cifre sia ridotto, ma comunque sufficiente a garantire il grado di precisione richiesto. Per esempio,  $\pi$  potrebbe venire approssimato come  $3.14_{\text{dec}}$  oppure  $3.1416_{\text{dec}}$ .

È utile allora definire il concetto di **cifre più significative**: nelle rappresentazioni basate sulla notazione posizionale, quale che sia la base utilizzata, le cifre più significative sono quelle associate ai pesi maggiori. Per esempio, nel numero  $723\,456_{\text{dec}}$  la cifra più significativa è 7, associata al peso  $10^5$ , seguita da 2, con peso  $10^4$ , e così via. Quando si considerano i numeri maggiori di 1, le cifre più significative sono quelle poste più a sinistra; nel caso di numeri minori di 1, che iniziano con 0 seguito dal separatore decimale, le cifre più significative sono le prime diverse da 0 che si incontrano andando da sinistra verso destra. Per esempio, nel numero  $0.0072345_{\text{dec}}$  la cifra più significativa è 7, con peso  $10^{-3}$ , seguita da 2, con peso  $10^{-4}$ , e così via.

Un ulteriore problema riguarda la rappresentazione di numeri con valore assoluto molto grande o molto piccolo. In questi casi, si considerano solo le cifre più significative, adottando una rappresentazione che viene generalmente indicata come **notazione scientifica**, per cui un numero viene rappresentato in base 10 come  $\pm m \times 10^e$  (e più in generale come  $\pm m \times B^e$  in base  $B$ ), cioè indicandone il segno (+ oppure -), il coefficiente  $m$ , detto **mantissa** (adottando la convenzione di inserire il separatore decimale dopo la prima cifra), e l'esponente  $e$  a cui elevare la base della numerazione. Il numero  $-123\,450\,000\,000_{\text{dec}}$  viene quindi rappresentato come  $-1.2345 \times 10^{11}_{\text{dec}}$ , dove il segno è negativo, la mantissa è  $1.2345_{\text{dec}}$  mentre l'esponente è  $11_{\text{dec}}$ ; il numero  $0.0000012345_{\text{dec}}$  che corrisponde a  $1.2345 \times 10^{-6}_{\text{dec}}$  ha invece segno positivo, mantissa  $1.2345_{\text{dec}}$  ed esponente  $-6_{\text{dec}}$ .

Lo stesso principio viene adottato per la rappresentazione binaria dei numeri razionali: il numero  $101010000_{\text{dec}}$  corrisponde per esempio a  $1.0101 \times 10^{1000}_{\text{dec}}$ , dove il segno è positivo, la mantissa è  $10101$  e l'esponente è  $1000$ . Per operare con numeri di questo tipo, è sufficiente conoscere, e quindi memorizzare, segno, mantissa ed esponente. Un problema sorge quando si deve stabilire il numero di bit da utilizzare: cambiando il numero di cifre dedicato alla rappresentazione di mantissa ed esponente si può infatti modificare la precisione dei risultati che si ottengono. L'interesse a uniformare la precisione di calcolo nelle diverse situazioni (calcolatori di produttori diversi e con strutture differenti) ha condotto alla definizione di uno standard internazionale, proposto dall'**Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE)** che stabilisce la lunghezza di mantissa ed esponente.