

DETERMINAZIONI ALTIMETRICHE

Metodi di misura dei dislivelli

In topografia esistono fondamentalmente due metodi per determinare i dislivelli: le *livellazioni geometriche* e le *livellazioni trigonometriche*.

Le *livellazioni geometriche*, inserite nel campo delle misure dirette, si eseguono con una particolare strumentazione e procedura mentre le *livellazioni trigonometriche* rientrano nel novero delle operazioni topografiche in quanto eseguite con la strumentazione propria dei rilievi topografici.

Misure dirette di dislivelli

Generalità

In topografia la *quota assoluta* di un punto non si riesce a determinare; quello che riusciamo a determinare è la *differenza di quota*, meglio nota come *dislivello* fra punti della superficie fisica del terreno.

La misura diretta di una quota non è in genere possibile per cui, definito un punto di quota nulla e partendo da esso, con successive misure di dislivelli si possono ottenere le quote assolute di tutti i punti della terra.

Il punto di quota nulla, corrispondente al livello medio marino, viene determinato con opportuni strumenti detti *mareografi*.

La misura diretta, anche se a rigore di logica si tratta di una misura indiretta, dei dislivelli in topografia viene effettuata con un'operazione detta *livellazione geometrica*.

Il mareografo

Il livello medio del mare che rappresenta il punto di quota 0 è il livello che corrisponde alla media delle altezze dell'acqua (variabili per una serie di cause quali moto ondoso, azione delle correnti, del vento delle variazioni termiche e delle maree) rispetto ad un punto fisso.

Il livello medio viene determinato tramite il mareografo che è costituito da un galleggiante posto in un pozzo in comunicazione con il mare, i cui movimenti vengono registrati da una punta scrivente su un foglio che trasla con velocità costante; il mareografo viene posto all'interno di un porto ed al riparo da eventuali azioni perturbatrici.

Si determina in tal modo la posizione nel tempo del livello del mare rispetto ad una retta tracciata sulla carta che rappresenta il riferimento.

Il mareografo viene quindi collegato con una livellazione di alta precisione ad un caposaldo costruito con particolare cura che si chiama *punto di derivazione delle quote*.

La rete altimetrica di Stato

L'Istituto Geografico Militare Italiano (I.G.M.I.) ha eseguito lungo tutto il territorio dello Stato delle linee di livellazione di altissima precisione con lo scopo di determinare le quote assolute di una serie di punti uniformemente distribuiti.

Queste linee corrono in genere su strade di grande comunicazione e collegano tra di loro una serie di capisaldi posti ad una distanza media di 1 km.

A seconda della cura posta nella loro costruzione ed ubicazione si distinguono in tre specie:

- *capisaldi di linea* disposti ad una distanza media di 1 km;
- *capisaldi principali* disposti ad una distanza di circa 3 km;
- *capisaldi fondamentali* distanti in media 25 km.

Le linee di livellazione sono indicate con un numero e di ciascuna linea sono pubblicati dei fascicoli che contengono le accurate monografie di tutti i capisaldi con le relative quote.

LIVELLAZIONE GEOMETRICA

Principio della livellazione geometrica

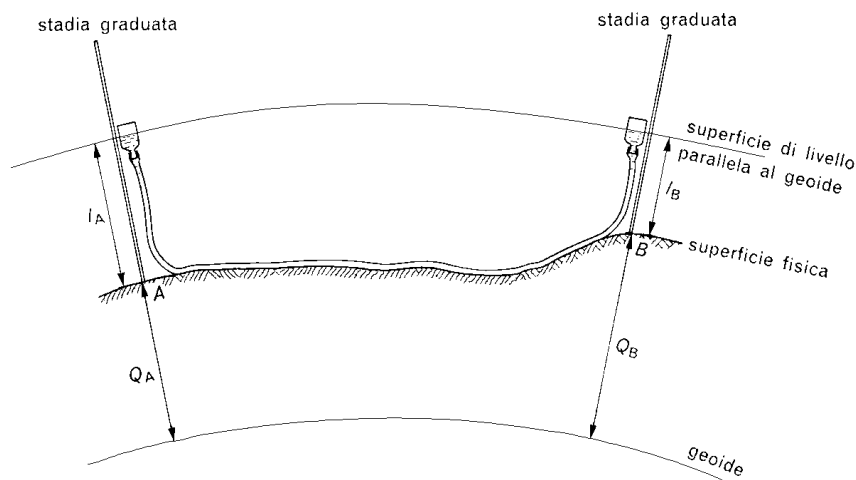


Fig. 1

Per chiarire il principio della livellazione geometrica si consideri lo schema di Fig. 1

Sui due punti A e B del terreno sono poste due stadie ed accanto ad esse due bicchieri contenenti acqua e collegati tra di loro tramite un tubo.

Le superfici del liquido in ogni bicchiere si dispongono secondo una superficie equipotenziale del campo della gravità che, data la vicinanza dei punti A e B, può ritenersi parallela al geoide.

Indicando con l_A ed l_B le letture fatte sulle stadie in corrispondenza della superficie del liquido si avrà

$$Q_A + l_A = Q_B + l_B$$

da cui

$$(1) \Delta_{AB} = Q_B - Q_A = l_A - l_B$$

Questa operazione viene denominata *battuta di livellazione* e permette di ricavare il dislivello tra i due punti A e B; lo strumento utilizzato va sotto il nome di *livello ad acqua* di portata limitata a qualche decina di metri.

Volendo determinare dislivelli tra punti distanti si ricorre a più battute fra punti disposti lungo una linea, detta *linea di livellazione*.

Il livello ad acqua ha però un limitato campo d'uso, quasi esclusivamente per collaudi di particolari manufatti; nella pratica topografica lo strumento utilizzato è il *livello a cannocchiale* (semplicemente *livello* nell'uso comune).

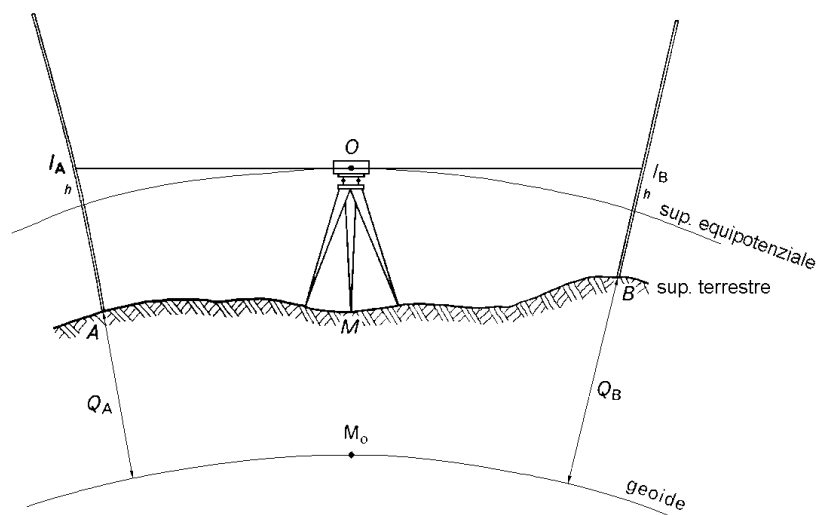


Fig. 2

Il *livello* è uno strumento il cui asse di collimazione può essere disposto su un piano orizzontale, per cui posto il livello in un punto M intermedio tra A e B (Fig. 2) la differenza $l_A - l_B$ delle letture fatte alle stadie fornisce ancora il dislivello $Q_B - Q_A$ dato che le due letture differiscono da quelle individuate dalla superficie equipotenziale di un'identica quantità h , peraltro piccolissima data la portata del livello che in genere non eccede i 100m.

Esecuzione di una battuta di livellazione

Durante l'esecuzione di una battuta di livellazione la condizione fondamentale è che l'asse di collimazione del livello giaccia su un piano orizzontale.

Tale condizione si realizza, dopo aver posto l'asse principale del livello verticale con l'ausilio della livella sferica, semplicemente centrando la bolla della livella torica tramite la vite di elevazione purché il livello sia rettificato.

Infatti in condizione di non rettifica centrando la bolla si rende la tangente centrale della livella orizzontale ma non l'asse di collimazione non esistendo parallelismo tra le due rette; l'asse di collimazione formerà in tal caso un angolo ε con l'orizzontale e le letture alle stadie non porteranno a misure corrette.

Nell'esecuzione di una battuta di livellazione è quindi molto importante avere il livello perfettamente rettificato. Si vedrà nel prossimo paragrafo come ciò possa essere fatto.

Nonostante ciò è però sempre difficile che la condizione di rettifica sia mantenuta in uno strumento che viene utilizzato spesso in campagna in condizioni disagiati; permarranno sempre dei piccoli errori detti *errori residui di rettifica* per cui si pone il problema di utilizzare un metodo di misura che tenda ad eliminarli.

Il metodo, molto semplice ed intuitivo, consiste nel porre il livello in posizione equidistante dalle due stadie (Fig. 3).

In tale assetto, in condizione di livello rettificato, le letture alle stadie porteranno alla determinazione del dislivello

$$(2) \Delta_{AB} = Q_B - Q_A = l_A - l_B$$

In assenza di rettifica l'asse di collimazione risulterà inclinato di un angolo ε rispetto alla tangente centrale, inclinazione che permarrà in qualunque direzione essendo i due assi solidali tra di loro.

Tale inclinazione provoca sulle due stadie due errori uguali e dello stesso segno

$$x_A = x_B = d \tan \varepsilon$$

che nel calcolo del dislivello si eliminano.

Si otterrà

$$\Delta'_{AB} = l'_A - l'_B = l_A + x_A - l_B - x_B = l_A - l_B = \Delta_{AB}$$

Questo metodo noto come *livellazione geometrica dal mezzo* presenta anche altri vantaggi:

- evita la messa a fuoco del cannocchiale su ogni stadia;
- consente di determinare il dislivello indipendentemente dalla curvatura del geoide;
- elimina eventuali piccoli errori dovuti alla rifrazione atmosferica che tende ad incurvare i raggi luminosi verso il basso.

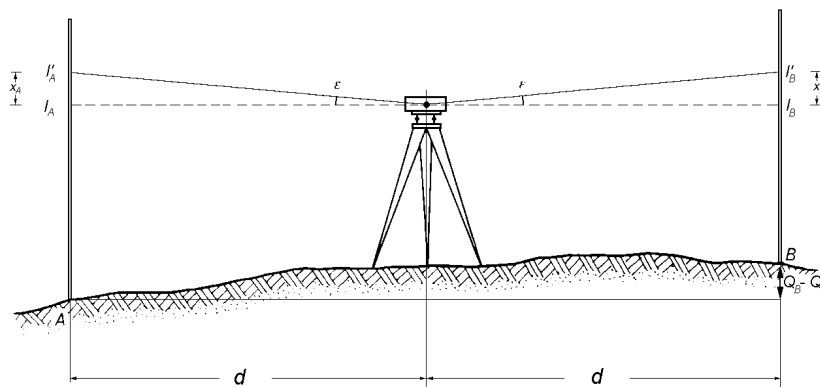


Fig. 3

Nella battuta dal mezzo non è importante che il livello sia posto lungo l'allineamento AB ma in qualunque posizione purché equidistante dalle due stadie; né è importante che tale equidistanza sia realizzata con elevata precisione: si può tollerare una differenza di 4-5 m.

Precisione di una battuta di livellazione

In una battuta di livellazione le uniche grandezze che vengono misurate sono i tratti di stadia tra il punto a terra e l'asse di collimazione per cui l's.q.m. del dislivello dipende dall's.q.m. delle misure eseguite sulle stadie.

Indicando con m l's.q.m. di ogni misura eseguita alle stadie, posto uguale per entrambe le misure, per ottenere l's.q.m. del dislivello si applicherà la legge di propagazione della varianza.

Si avrà, ricordando che $\Delta_{AB} = l_B - l_A$:

$$(3) \quad m_{\Delta_{AB}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta_{AB}}{\partial l_A}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\partial \Delta_{AB}}{\partial l_B}\right)^2 m^2} = \pm m\sqrt{2}$$

Il valore di m , oltre che dalla bontà del livello, è fortemente influenzato dalla distanza a cui sono poste le stadie aumentando notevolmente all'aumentare della distanza.

Per le normali stadie in legno centimtrate, con $d=50m$, si può porre $m=1mm$.

Esecuzione di una linea di livellazione

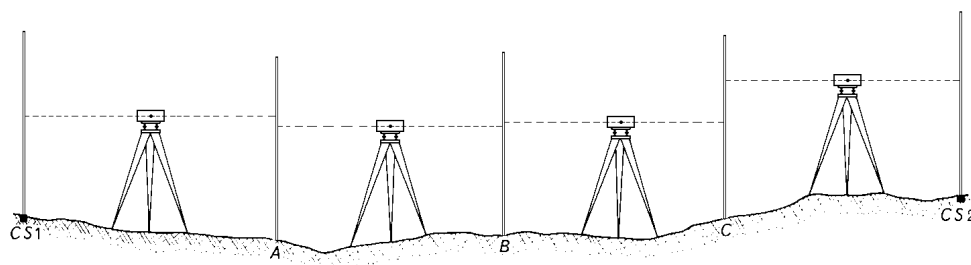


Fig. 4

Con una *battuta di livellazione* si riesce a misurare il dislivello tra punti distanti qualche centinaio di metri; se, come spesso si presenta nella pratica, si vogliono determinare dislivelli

tra punti molto distanti, è necessario eseguire una *linea di livellazione* che consiste nell'esecuzione di più *battute* collegate tra di loro secondo lo schema indicato in Fig. 4.

Il rilievo si esegue con due stadi e un livello con la seguente procedura:

- si dispongono le stadi sui punti CS1 ed A ed il livello al centro;
- si eseguono le letture alle stadi;
- quindi la stadia che era in CS1 si sposta in B, il livello si pone al centro tra A e B, mentre la stadia che era in A viene fatta ruotare su se stessa per permetterne la lettura (si nota in questa operazione l'importanza della basetta su cui poggiare la stadia: essa permette la rotazione della stadia su di un punto senza nessun movimento verticale, cosa che invece si avrebbe se la stadia ruotasse sul terreno per ovvi motivi);
- si prosegue quindi nello stesso modo per le tratte B-C e C-CS2.

Il dislivello tra i punti CS1 e CS2 sarà ovviamente dato dalla somma dei dislivelli parziali delle varie battute.

In genere se si individua un verso di percorrenza e si indica con i la lettura indietro e con a la lettura in avanti il dislivello della battuta k -ma sarà

$$\Delta_k = i_k - a_k$$

per cui il dislivello complessivo tra i due capisaldi sarà

$$\Delta = \sum_{k=1}^{k=n} (i_k - a_k) = \sum_{k=1}^{k=n} i_k - \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

si può cioè ottenere come differenza fra la somma di tutte le letture indietro e la somma di tutte le letture in avanti.

Precisione di una linea di livellazione

Si è visto come si calcola la precisione di una battuta; in presenza di una linea di livellazione costituita da n battute, considerando l's.q.m. delle letture sempre uguale e pari ad m , con evidente estensione, si otterrà l's.q.m. del dislivello

$$(4) \quad m_{\Delta} = m\sqrt{2n}$$

La formula (4), si badi bene, è puramente teorica, anche se nello s.q.m. di una lettura si considerano conglobati l's.q.m. di lettura propriamente detto, l's.q.m. di centramento della livella, l's.q.m. derivante dalla non perfetta verticalità della stadia e quello derivante dalla non perfetta graduazione della medesima. Non tiene per es. conto dei, sia pur piccoli, spostamenti verticali che potrebbe avere la stadia nelle rotazioni che subisce nel passare da una battuta alla successiva.

Nella pratica topografica una linea di livellazione deve sempre essere *controllata* e ciò si ottiene semplicemente eseguendo la linea dal caposaldo iniziale a quello finale e poi ritornando sul caposaldo iniziale in genere per via diversa sempre tramite livellazione.

Il metodo, concettualmente lo stesso, si distingue dicendo che si effettua una *livellazione in andata e ritorno* se lo scopo è il collegamento altimetrico tra due capisaldi oppure che si effettua una *linea di livellazione chiusa* se si segue un percorso anulare che ritorna sul punto di partenza.

In tali casi, se si considerano complessivamente n battute, la differenza della somma delle letture indietro e delle letture in avanti, non darà mai 0 a causa degli inevitabili errori di misura ma indicherà un valore ε detto *errore di chiusura* della livellazione:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{k=n} i_k - \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

Tale *errore di chiusura* dovrà verificare la condizione

$$|\varepsilon| \leq t$$

dove con t viene indicata la tolleranza assegnata in base allo scopo per cui la livellazione è richiesta ed è espressa generalmente nella forma

$$t = c\sqrt{D}$$

dove con D viene indicata la lunghezza della linea di livellazione espressa in Km mentre c è una costante espressa in mm.

In funzione dei valori assunti da c le livellazioni si dividono in:

- *livellazioni di alta precisione* se $c \leq 1\text{ mm}$;
- *livellazioni di precisione* se $c \leq 3\text{ mm}$;
- *livellazioni tecniche* se $c \leq 20\div 30\text{ mm}$.

Nelle livellazioni di alta precisione e di precisione si userà strumentazione di elevata qualità quindi livelli dotati di lamina piano-parallela, stadie in invar e basetta di appoggio ed in genere le battute non supereranno mai gli $80\div 90\text{ m}$, mentre nelle livellazioni tecniche si useranno normali livelli con stadie in legno avendo l'accortezza di poggiarle su terreno non cedevole.

La *precisione di un livello* che dipende dalle sue caratteristiche viene in genere espressa globalmente con l's.q.m. ottenibile su una linea di livellazione di 1 km eseguita in andata e ritorno e si indica come *errore medio chilometrico*.

Il livello

Il livello con vite di elevazione

L'unico tipo di livello largamente utilizzato nei rilievi moderni è il livello con vite di elevazione. Schematicamente esso è costituito da una traversa T (Fig. 5) girevole intorno ad un asse a ed impernata su di una base dotata di viti calanti o di uno snodo sferico che permettono di rendere verticale l'asse a .

Il cannocchiale viene collegato alla traversa tramite una cerniera O ed una vite E , detta *vite di elevazione* che ne permette rotazioni zenitali in un piccolo settore ($\pm 2^\circ$) intorno al suo asse passante per O .

Rigidamente collegata al cannocchiale vi è una livella torica, generalmente del tipo a coincidenza di immagine di elevata sensibilità ($10'' \div 2''$) utilizzata per rendere orizzontale l'asse di collimazione.

Una livella sferica di non elevata sensibilità, circa $30''$, è collegata alla traversa e viene utilizzata per rendere verticale l'asse principale.

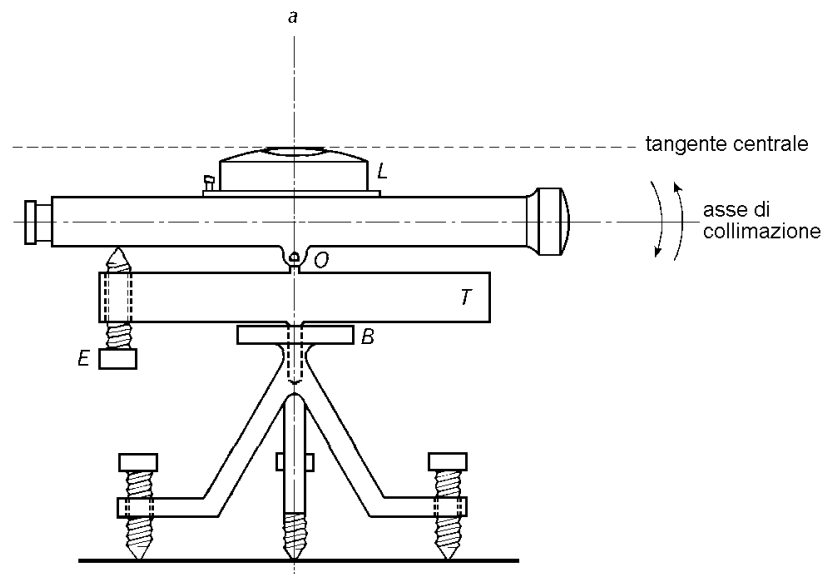


Fig. 5

Il livello si dice *rettificato* quando la tangente centrale della livella è parallela all'asse di collimazione.

Con un livello *rettificato*, dopo aver reso verticale l'asse a tramite la livella sferica, si rende facilmente orizzontale l'asse di collimazione semplicemente centrando la livella torica tramite la vite di elevazione E .

Quando si ruota il livello per effettuare altre letture la bolla della livella torica tende a spostarsi a causa dell'errore di verticalità, peraltro notevole dato l'utilizzo di una livella sferica di non

elevata sensibilità per la messa in stazione, per cui si rende necessario un nuovo centramento della livella con la vite *E* per riportare l'asse di collimazione in posizione orizzontale.

Quindi il centramento della livella torica deve essere eseguito sempre prima di ogni lettura alla stadia.

Si noti che tutti i teodoliti che possiedono una livella posta a cavaliere sul cannocchiale possono essere utilizzati come livelli; in tal caso la vite micrometrica degli spostamenti zenitali funge da vite di elevazione.

Il cannocchiale dei livelli è sempre dotato di reticolo distanziometrico in quanto spesso, per i motivi che saranno spiegati nel prossimo paragrafo, si rende necessaria la misura della distanza dello strumento dalle stadie.

Caratteristiche del livello

Le caratteristiche fondamentali di un livello sono:

- *l'ingrandimento del cannocchiale;*
- *il diametro dell'obiettivo del cannocchiale;*
- *la sensibilità della livella torica.*

L'ingrandimento del cannocchiale determina la grandezza apparente del tratto di stadia che si collima e quindi la capacità di apprezzamento della frazione di centimetro che si riesce a stimare.

Tale capacità però è anche dipendente dal potere risolutivo del cannocchiale che esprime la minima distanza di due punti sul reticolo per averne la visione distinta ed è inversamente proporzionale al diametro del cannocchiale.

Le due caratteristiche devono essere armonicamente bilanciate in un livello; variano in un campo di 15-60 per gli ingrandimenti e di 20mm-50mm per i diametri.

Dalla terza caratteristica dipende la precisione con cui si realizza l'orizzontalità dell'asse di collimazione ed ha un campo di variazione da 10^{cc} a 2^{c} .

Accessori per aumentare la precisione.

Lamina piano-parallela

Per aumentare la precisione delle misure di dislivelli gli strumenti più precisi sono dotati di un accessorio che consente di trasformare la lettura che si esegue alla stadia da lettura a stima a lettura a coincidenza.

L'accessorio è una semplice *lamina piano-parallela* posta, in alcuni livelli, direttamente nel cannocchiale davanti all'obiettivo, in altri in una struttura separata che si innesta in caso d'uso sul livello.

Sono note le proprietà ottico-geometriche della lamina; in questo particolare uso quando la lamina, posta davanti all'obiettivo, ha le facce perpendicolari all'asse di collimazione essa viene attraversata dal raggio luminoso senza che questo subisca alcuna traslazione né deviazione; alla stadia quindi la lettura al filo medio del reticolo è la stessa fatta in assenza di lamina: nel caso indicato in Fig. 6 a). la lettura al filo medio sarà 1142 mm.

Ruotando la lamina con un opportuno bottone si realizza una traslazione t_i dell'immagine del reticolo fino a far coincidere il filo medio esattamente con la tacca centimetrica più prossima (Fig. 6 b)).

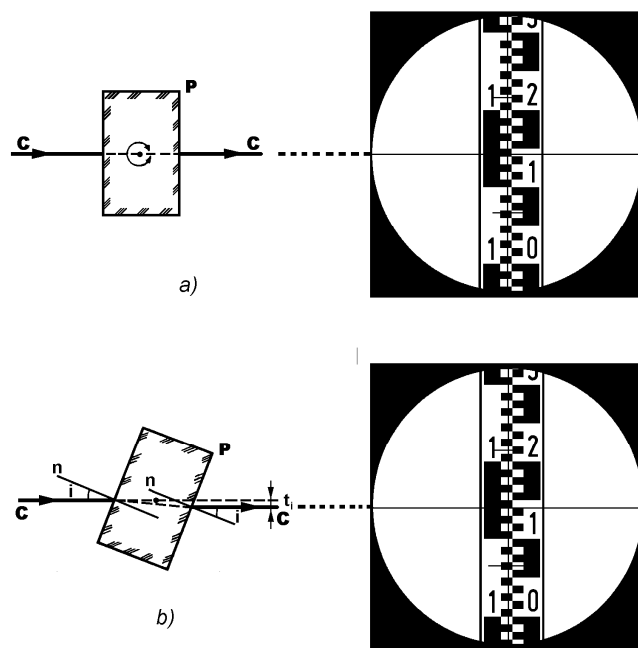


Fig. 6

La rotazione della lamina è comandata da un tamburo graduato, in genere, in 100 divisioni che coprono l'intervallo di 1 cm; cioè ruotando la lamina da 0 a 100 il filo medio subisce una traslazione di 1 cm. Quindi la traslazione t_i subita dal filo nell'esempio in figura si legge direttamente sul tamburo in decimi di mm e si giunge a stimare i centesimi di mm.

Stadia in invar

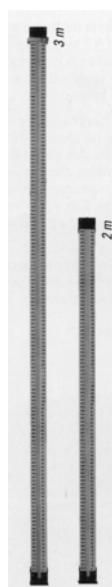


Fig. 7

Per misure di elevata precisione anche le stadia dovranno essere di elevata precisione; si usano per tale evenienza *stadie in invar*.

Queste sono costituite da un'armatura in legno cui è opportunamente fissato un *nastro in invar* (Fig. 8) su cui sono tracciate due graduazioni con tratti di spessore non superiore ad 1 mm.

I tratti (Fig. 8) sono tracciati con grande cura in modo che gli errori di graduazione siano inferiori a poche centesimi di mm.

Le due graduazioni sfalsate di una determinata quantità detta *costante della stadia* servono a migliorare la precisione della lettura; infatti effettuando le letture alle due graduazioni e verificando che, a meno delle fluttuazioni accidentali, la loro differenza rientri nella costante

della stadia si eliminano eventuali errori grossolani e si ottengono due misure della stessa grandezza.

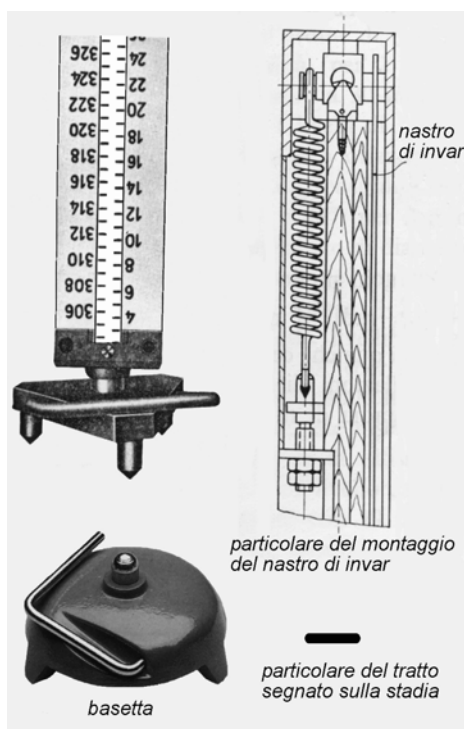


Fig. 8

La parte terminale delle stadie in invar, costituita da una struttura metallica terminante a piano rettificato, viene sempre poggiata su una basetta metallica terminante con un perno cilindrico a testa emisferica..

In tal modo viene assicurato l'appoggio puntuale e la perfetta rotazione della stadia senza movimenti verticali.

Data la loro struttura le stadie invar non sono pieghevoli come le normali stadie in legno ed hanno lunghezze variabili fino ad un massimo di 3 m (Fig. 7).

Reticolo a cuneo

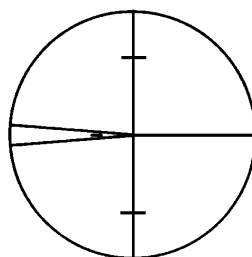


Fig. 9

Per leggere sulle stadie invar viene utilizzato un reticolo particolare detto *recolo a cuneo* o *reticolo a coda di rondine*.

E' visibile in Fig. 9 dove si può notare come viene utilizzato per collimare una tacca della stadia.

Verifica e rettifica di un livello

Come detto è importante verificare saltuariamente il livello per controllare il suo stato di rettifica ed eventualmente rettificarlo.

La verifica si può eseguire in modo abbastanza semplice eseguendo dapprima una battuta dal mezzo e determinando il relativo dislivello e poi, sempre tenendo ferme le stadie sugli stessi punti, una battuta ponendo il livello eccentrico in una posizione S.

In questo secondo caso, in assenza di srettifica, si avrebbe sempre il dislivello esatto (Fig. 10) pari a

$$(5) \quad Q_B - Q_A = l_A^{\circ''} - l_B^{\circ''}$$

per cui se i due dislivelli, quello determinato dal centro e quello determinato con il livello eccentrico, sono uguali si può considerare il livello rettificato.

In presenza di un angolo di srettifica ε , nel caso di livello eccentrico si otterrà il dislivello

$$Q_B - Q_A = l_A'' - l_B'' = l_A^{\circ''} + \varepsilon d - l_B^{\circ''} - \varepsilon D \neq l_A^{\circ''} - l_B^{\circ''}$$

per cui se i due dislivelli, quello con battuta dal mezzo e quello con battuta eccentrica, sono diversi si deduce che il livello non è rettificato.

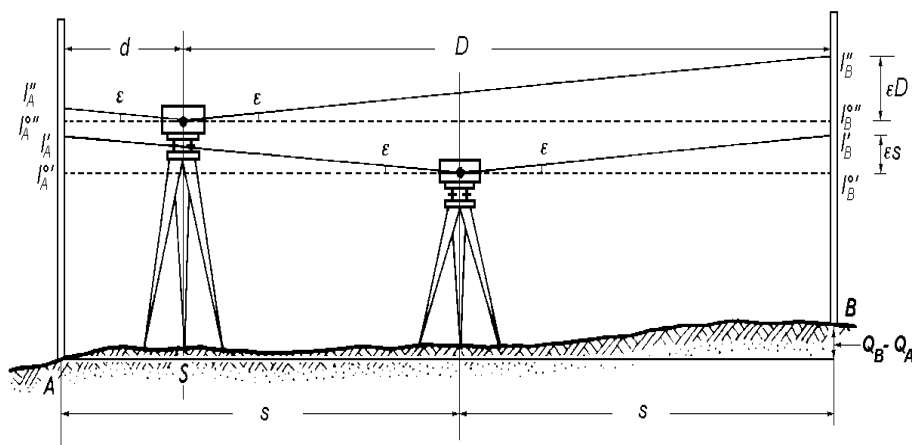


Fig. 10

Si noti che in fig. gli errori di lettura alle stadie dovuti alla presenza dell'angolo ε sono stati indicati sostituendo l'angolo alla sua tangente.

Per rettificare il livello si procede nel seguente modo:

- si considera come esatta la lettura eseguita in A, data la piccolezza del tratto εd ;
- muovendo la vite di elevazione si impone in B la lettura che darebbe il dislivello esatto pari a

$$l_B^{\circ''} = l_A^{\circ''} - (Q_B - Q_A)$$

dove il dislivello è quello determinato con la battuta dal mezzo;

- con questa operazione la bolla della livella torica non risulta più centrata per cui la si riporta al centro agendo sulla piccola vite di rettifica della livella;
- si esegue infine una lettura alle stadie per verificare che il dislivello sia uguale a quello determinato con la battuta dal centro;
- se esistono ancora piccole differenze si ripete tutta l'operazione una seconda volta.

L'operazione di rettifica si può anche eseguire in altro modo imponendo in B la lettura voluta tramite lo spostamento del reticolo del cannocchiale che come noto modifica l'asse di collimazione.

Autolivelli

E' stato osservato che con il livello con vite di elevazione, già messo in stazione, bisogna centrare la livella torica ogni volta che si legge alla stadia.

Ciò richiede una allungamento del tempo di misura tanto più elevato quanto più sensibile è la livella ed inoltre l'eventuale dimenticanza di tale centramento, non così rara quando si eseguono decine di misure, introduce un errore grossolano nella misura del dislivello.

Per ovviare a tali inconvenienti sono stati progettati dei *livelli autolivellanti* mediante sistemi a pendolo detti *compensatori*.

In tali livelli l'orizzontalità dell'asse di collimazione viene realizzata automaticamente senza eseguire alcuna manovra non appena l'asse di rotazione della traversa sia stato posto verticale con l'ausilio della livella sferica e delle tre viti calanti; essi quindi non sono dotati né di livella torica né di vite di elevazione.

Essendo tali *autolivelli* basati su un sistema a pendolo sono dotati di un sistema, di solito pneumatico, che ne smorza rapidamente le oscillazioni e ciò sia per non avere disturbi nelle letture sia per non dover attendere troppo tempo per ottenere la stabilizzazione del pendolo.

Il campo di oscillazione del pendolo ha una ampiezza molto limitata, in genere appena maggiore della sensibilità della livella sferica applicata al livello; quando il livello non è perfettamente messo in stazione in modo che venga superato il campo di oscillazione il compensatore non agisce e quindi si eseguono letture ad asse di collimazione non orizzontale.

Per avvertire la presenza di tale situazione molti *autolivelli* sono dotati di un opportuno segnale che compare nel campo del cannocchiale per indicare che il sistema sospeso non è in libera oscillazione oppure hanno un pulsante esterno che permette di dare piccoli colpi al sistema e di controllarne nel cannocchiale la libera oscillazione.

In questo tipo di livelli la condizione di rettifica assume una diversa definizione; la si può enunciare nel seguente modo: *quando l'autolivello è in stazione il suo asse di collimazione deve essere orizzontale*.

La verifica si esegue nello stesso modo detto per il livello con vite di elevazione; l'eventuale rettifica si esegue spostando il reticolo e quindi l'assetto dell'asse di collimazione.

Il livello digitale

Intorno agli anni 90 la società Leica ha lanciato sul mercato un nuovo livello, Wild NA 2000, che automatizza completamente la livellazione geometrica.

Da un punto di vista ottico-meccanico questo livello ha una struttura identica ad un tradizionale *autolivello*; in più è dotato di tutta una serie di componenti elettronici necessari per eseguire la lettura alla stadia.



Fig. 11

La stadia, sempre in invar, si presenta come in Fig. 11 dotata di un codice a barre.

Nel livello l'immagine del codice a barre viene inviata ad un gruppo di diodi rilevatori per mezzo di un divisore di fascio. La luce ricevuta viene divisa in una componente infrarossa ed in

una visibile; ne risulta che la luce visibile che raggiunge l'osservatore resta inalterata mentre i diodi ricevono una sufficiente radiazione infrarossa a cui sono particolarmente sensibili.

L'apertura angolare del sistema ottico nel livello è di 2 gradi: ne risulta che 70 mm di stadia possono essere rappresentati sul rilevatore ad una distanza minima di 1,8 m, mentre una stadia di 2 m viene rappresentata a circa 60 m.

All'interno del livello un complesso sistema trasforma l'immagine del codice a barre in unità di misura attraverso un principio detto di correlazione.

Lo strumento permette anche la lettura automatica della distanza livello-stadia.

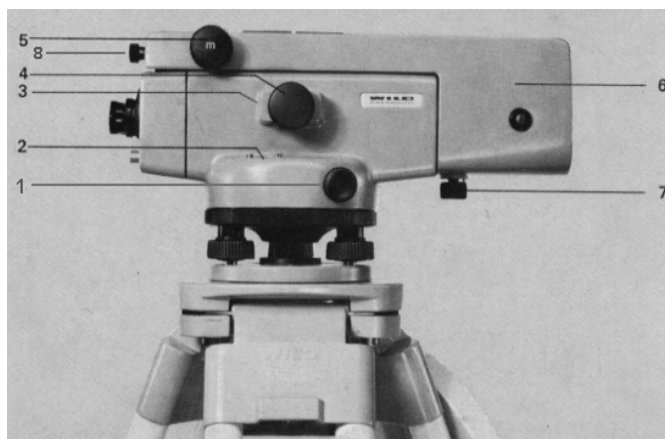
Tutti i dati di lettura sono visibili su un display a cristalli liquidi ma possono anche essere memorizzati su un opportuno modulo che si scarica successivamente sul computer.

Allo stato attuale la Leica ha prodotto la nuova serie 3000 ed altre due ditte, Zeiss e Topcon, hanno prodotto livelli analoghi.

La precisione di tali livelli per livellazioni in andata e ritorno permette il raggiungimento di un errore di chiusura di 1,5 mm/km; permette quindi l'esecuzione di livellazioni di alta precisione con il vantaggio di un risparmio in tempo di 1,5 volte rispetto ad una livellazione eseguita con un autolivello tradizionale.

Esempi di livelli

Wild NA2



- 1 Vite dei piccoli spostamenti azimutali
- 2 Livella sferica
- 3 Prisma d'osservazione della livella 2
- 4 Bottone di messa a fuoco
- 5 Bottone per la rotazione della lamina
- 6 Struttura porta-lamina
- 7 Vite di fissaggio per 6
- 8 Oculare per la lettura del micrometro

Fig. 12

E' un autolivello dotato di lamina piano-parallela di elevata precisione (Fig. 12).

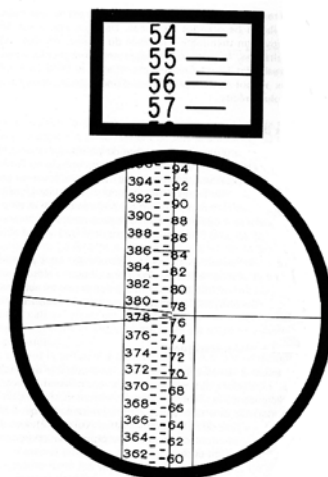


Fig. 13

Utilizzato con una stadia in invar permette l'esecuzione di livellazioni di alta precisione.

Errore medio chilometrico di $0,3 \div 0,7$ mm.

Dopo aver centrato, con l'ausilio della lamina, una tacca della stadia, sulla stessa si leggono direttamente i centimetri mentre nell'oculare della lamina si leggono i millimetri ed i decimi e si stimano i centesimi.

Nell'esempio di Fig. 13 si leggerà 77,556 cm.

Kern GK 1

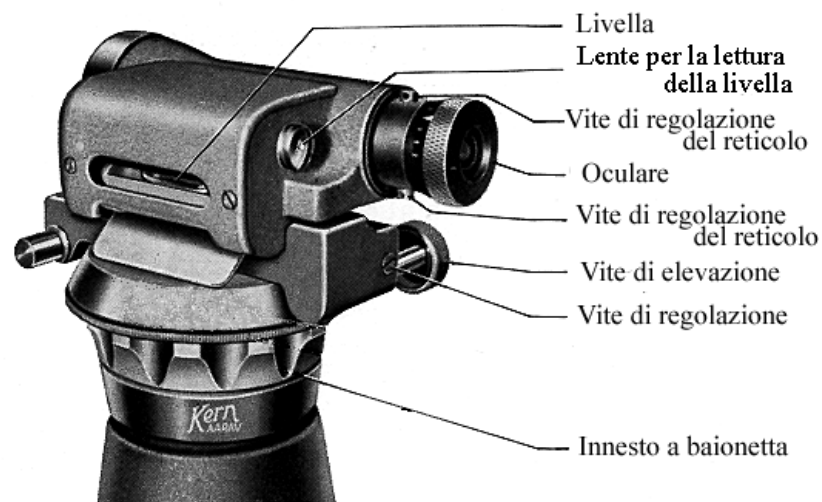


Fig. 14

E' un livello (Fig. 14) con vite di elevazione, dotato di livella torica a coincidenza, di livella sferica, con innesto a baionetta sull'apposito treppiede.

La sensibilità della livella torica è di 20".

L'errore medio chilometrico è di $3 \div 4$ mm.

Salmoiraghi L 5150-A



Fig. 15

E' un livello da cantiere con vite di elevazione dotato di cannocchiale anallattico.
La livella torica ha sensibilità di 15".
L'errore medio chilometrico di ± 5 mm.

Jena NI 040 A

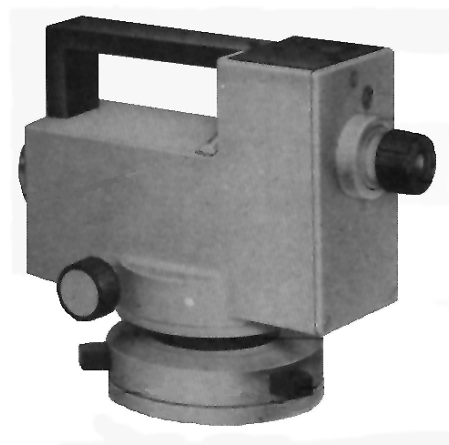
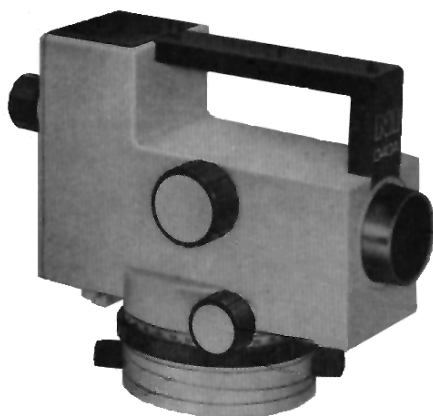


Fig. 16

E' un autolivello con errore medio chilometrico di ± 4 .

Leica Wild NA3000



Fig. 17

Livello elettronico con errore medio chilometrico di 1,5.

LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA

Livellazione trigonometrica con osservazioni simultanee e reciproche

La differenza di quota tra due punti A e B , reciprocamente visibili, si può ricavare indirettamente misurando le distanze zenitali reciproche e conoscendo, o misurando, la distanza AB .

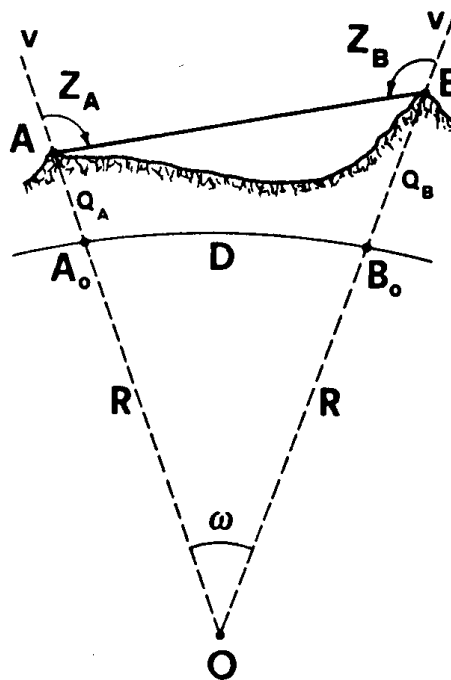


Fig. 18

Il nome "trigonometrica" le deriva dall'essere stata, nel passato, utilizzata fondamentalmente per quotare i punti delle reti trigonometriche già noti in planimetria, e quindi essendo nota la distanza tra di loro.

Oggi con l'utilizzo dei distanziometri è largamente utilizzata per le determinazioni plano-altimetriche di qualsiasi punto del territorio.

Poiché la distanza AB in genere non eccede i 10 km le formule per la determinazione del dislivello possono essere dedotte considerando la sfera locale di raggio $R = \sqrt{\rho N}$ dove il raggio del *meridiano* e la *gran normale* vanno calcolati per una latitudine intermedia tra A e B .

Con riferimento alle notazioni della Fig. 18, applicando il Teorema di *Nepero** al triangolo OAB , si ha

$$\frac{(Q_B + R) - (Q_A + R)}{(Q_B + R) + (Q_A + R)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{B})}{\tan \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})}$$

ed essendo

$$(6) \quad \begin{aligned} (\hat{A} - \hat{B}) &= (200^g - Z_A) - (200^g - Z_B) = Z_B - Z_A \\ (\hat{A} + \hat{B}) &= 200^g - \omega \end{aligned}$$

con evidenti sostituzioni si ottiene

$$(7) \quad Q_B - Q_A = (Q_B + Q_A + 2R) \frac{\tan \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)}{\tan(100^g - \frac{\omega}{2})} = 2R(1 + \frac{Q_A + Q_B}{2R}) \tan \frac{1}{2}(Z_B - Z_A) \tan \frac{\omega}{2}$$

Tenendo presente che

$$\omega = \frac{D}{R}$$

sviluppando in serie $\tan \frac{\omega}{2}$ si avrà

$$\tan \frac{D}{2R} = \frac{D}{2R} (1 + \frac{D^2}{12R^2} \dots)$$

e potremo pertanto porre

$$\tan \frac{D}{2R} = \frac{D}{2R}$$

in quanto il secondo termine dello sviluppo in serie si può trascurare data la recisione ottenibile dalla misura; per $D = 30\text{ km}$ esso vale $2 \cdot 10^{-6}$.

Dalla (6) si otterrà in definitiva

$$(8) \quad Q_B - Q_A = D(1 + \frac{Q_m}{R}) \tan \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)$$

avendo posto

$$(9) \quad Q_m = \frac{Q_A + Q_B}{2}$$

La (7) è la formula che fornisce il dislivello tra i *centri* dei teodoliti posti in A e B per cui volendo il dislivello tra i punti A e B al suolo a detta formula va aggiunta l'altezza strumentale h_A dello strumento posto in A e tolta l'altezza strumentale h_B dello strumento posto in B .

Conoscendo la quota di uno dei due punti si può quindi determinare la quota dell'altro.

Non deve meravigliare il fatto che nel secondo membro della (7) sia presente il termine Q_m dato dalla (8) che contiene l'incognita. Esso si può determinare in prima approssimazione assegnandogli il valore della quota nota, per es., Q_A ; quindi calcolare un valore approssimato di Q_B da utilizzare per determinare nuovamente il valore di Q_m da introdurre nella (7) per il calcolo definitivo del dislivello.

Il procedimento ha una sua validità in quanto Q_m è, salvo casi eccezionali, molto piccolo rispetto al raggio R per cui la quantità

$$D \frac{Q_m}{R} \tan \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)$$

interviene nel calcolo del dislivello per una frazione molto piccola e quindi tollerando su Q_m un errore di circa 30 m si avrebbe sul dislivello un errore del centimetro influente se si tiene conto che l's.q.m del dislivello tra punti distanti qualche chilometro è dell'ordine di alcuni centimetri.

Quando non siano necessarie elevate precisioni, o non si operi in condizioni estreme (elevato dislivello a quote molto alte) il termine entro parentesi si trascura per cui la (7) assume la forma semplificata

$$(10) \quad Q_B - Q_A = D \tan \frac{1}{2} (Z_B - Z_A)$$

Livellazione trigonometrica da un estremo

La livellazione trigonometrica, ed è il caso più comune, si può eseguire anche misurando una sola distanza zenitale.

Supponendo di aver misurato la distanza zenitale Z_A dalla seconda delle (6) si avrà

$$200^\circ - Z_A + 200^\circ - Z_B = 200^\circ - \omega \quad \text{cioè} \quad Z_A + Z_B = 200^\circ + \omega \quad \text{e quindi} \quad Z_B = 200^\circ + \omega - Z_A$$

Sostituendo il valore di Z_B così ottenuto nella (8) si otterrà

$$(11) \quad Q_B - Q_A = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \tan \left[100 - \left(Z_A - \frac{\omega}{2} \right) \right] = D \left(1 + \frac{Q_m}{R} \right) \cot \left(Z_A - \frac{D}{2R} \right)$$

La formula semplificata risulterà per conseguenza

$$(12) \quad Q_A - Q_B = D \cot \left(Z_A - \frac{D}{2R} \right)$$

Influenza della rifrazione atmosferica

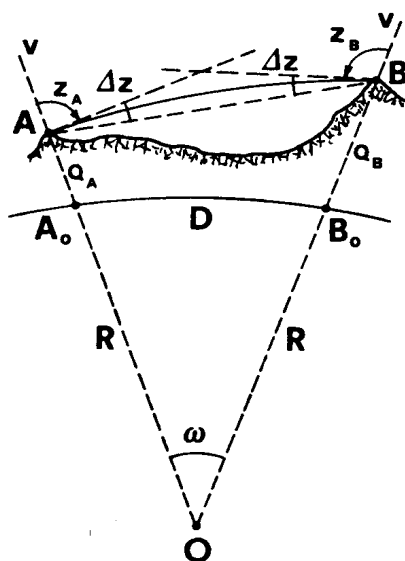


Fig. 19

La schematizzazione fatta nei paragrafi precedenti per ricavare le formule della livellazione trigonometrica prevedeva un percorso rettilineo del raggio luminoso da A verso B; ciò può avvenire solo in assenza di atmosfera.

Sulla terra il raggio luminoso si muove attraverso l'aria la cui densità diminuisce all'aumentare della quota e di conseguenza diminuisce l'indice di rifrazione. I raggi luminosi quindi muovendosi in un mezzo avente un indice di rifrazione variabile subiscono delle rifrazioni e tendono ad incurvarsi con la concavità rivolta verso la Terra.

In tale situazione il cannocchiale posto in A per poter osservare B deve essere posto nella direzione della tangente alla traiettoria curva indicata in fig; ne consegue che la distanza zenitale misurata z_A , detta *apparente*, è sempre minore di quella teorica Z_A di una quantità Δz detta *angolo di rifrazione*. Lo stesso fenomeno si proporrà in B.

L'angolo di rifrazione, secondo studi dovuti a Gauss, è stato posto uguale a

$$(13) \Delta z = k \frac{\omega}{2}$$

dove k è un coefficiente di proporzionalità detto *coefficiente di rifrazione*.

Se le due collimazioni sono eseguite contemporaneamente i due angoli di rifrazione possono ritenersi uguali; si avrà quindi

$$Z_A = z_A + \Delta z \quad e \quad Z_B = z_B + \Delta z$$

Sostituendo nella (10) otterremo infine

$$(14) Q_B - Q_A = D \tan \frac{1}{2} (z_B - z_A)$$

che permette la determinazione del dislivello tra A e B tramite le distanze zenitali misurate eliminando le cause perturbatrici dovute alla rifrazione atmosferica.

A tale metodo, che prevede la simultanea presenza di due osservatori in A e B, si ricorre solo in casi in cui sia necessaria una elevata precisione ma non nei casi correnti di rilevamento che risulterebbero attardati e più costosi.

Il metodo correntemente usato è invece quello della livellazione da un estremo per cui sostituendo nella (12) il nuovo valore di Z_A si avrà

$$(15) Q_B - Q_A = D \cot \left(z_A + k \frac{D}{2R} - \frac{D}{2R} \right) = D \cot \left(z_A - \frac{1-k}{2R} D \right)$$

Sviluppando in serie la cotangente e trascurando i quadrati e le potenze superiori si ottiene

$$(16) \cot \left(z_A - \frac{1-k}{2R} D \right) = \cot z_A + \frac{1}{\sin^2 z_A} \frac{1-k}{2R} D \dots\dots$$

e quindi

$$(17) Q_B - Q_A = D \cot z_A + \frac{1}{\sin^2 z_A} \frac{1-k}{2R} D^2$$

Nella (17) si può porre anche $\sin^2 z_A = 1$ in quanto nelle ordinarie condizioni di lavoro l'angolo z è molto prossimo a 100 e quindi, nei limiti di approssimazione di tale formula, si ottiene

$$(18) Q_B - Q_A = D \cot z_A + \frac{1-k}{2R} D^2 + H_s - L_B$$

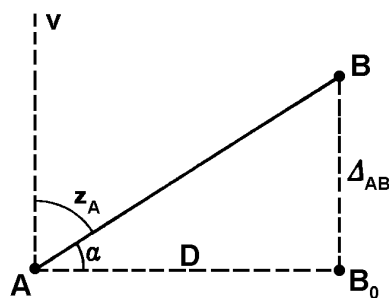


Fig. 20

che rappresenta la formula finale per il calcolo del dislivello avendo indicato con H_s l'altezza strumentale in A e con L_B l'altezza del segnale sul punto B.

Nella (18) il termine $D \cot z_A$ rappresenta il dislivello che si avrebbe tra i punti A e B se la terra fosse piana ed in assenza di atmosfera (Fig. 20).

Il secondo termine è composto da due componenti: la prima $D^2/2R$ rappresenta la correzione di sfericità che abbassa il punto B e quindi aumenta il dislivello; la seconda $-kD^2/2R$ rappresenta l'effetto della rifrazione che tende ad alzare il punto B e quindi a diminuire il dislivello.

Determinazione del coefficiente di rifrazione

Il coefficiente di rifrazione k ha avuto varie determinazioni sperimentali; esso varia fondamentalmente con le condizioni atmosferiche ma anche con la latitudine, la quota, l'ora e le microcondizioni locali.

La sua determinazione sperimentale si ottiene misurando il dislivello di due punti A e B tramite livellazione geometrica e la distanza con un distanziometro; facendo stazione con un teodolite su uno dei due punti si leggono le distanze zenitali all'altro punto ad un intervallo di tempo prestabilito, per es. ogni 15' ed applicando la (18) si determinano i valori di k . Si può così costruire un grafico che esprime l'andamento di k al variare del tempo.

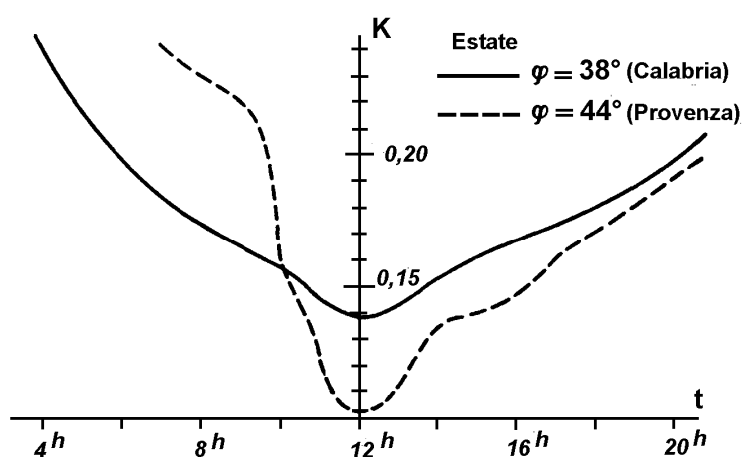


Fig. 21

Le varie esperienze fatte hanno dimostrato un andamento tipico del coefficiente k al variare del tempo: esso risulta massimo alle prime ore dell'alba, decresce presentando un minimo nelle ore centrali della giornata durante le quali si mantiene presso a poco stabile e torna a risalire fino al tramonto del Sole senza mai raggiungere il valore che aveva all'alba.

In Fig. 21 sono riportati due grafici che indicano l'andamento del coefficiente k nel Sud dell'Italia e nel Sud della Francia.

L'andamento di k dimostra che le ore migliori per effettuare una livellazione trigonometrica sono quelle centrali della giornata in cui la curva presenta un basso gradiente.

In Italia mediamente si può assumere il valore di $0,12 \div 0,13$.

Precisione della livellazione trigonometrica

L'errore medio m_A sul dislivello determinato tramite la (18) si calcola al solito modo utilizzato per le misure indirette.

Esso dipenderà dagli errori medi m_D , relativo alla misura della distanza D , m_z , relativo alla misura della distanza zenitale z_A ed m_k , relativo al valore adottato per il coefficiente k in quanto possono considerarsi trascurabili gli errori medi di H_s ed L_B .

Eseguendo le derivate si otterrà

$$(19) \quad m_A = \pm \sqrt{\cot^2 z_A \cdot m_D^2 + \frac{(1-k)^2 D^2}{R^2} \cdot m_D^2 + \frac{D^2}{\sin^4 z_A} \cdot m_z^2 + \frac{D^4}{4R^2} \cdot m_k^2}$$

Il secondo termine entro la radice è una quantità molto piccola per cui si può trascurare, si può porre $\sin^4 z_A = 1$; e si può introdurre lo s.q.m. relativo della distanza pari a $s_D = \frac{m_D}{D}$; si ottiene così

$$(20) \quad m_A = \pm D \sqrt{\cot^2 z_A \cdot s_D^2 + m_z^2 + \frac{D^2}{4R^2} \cdot m_k^2}$$

Analizzando la (20) e sostituendo opportuni valori numerici si può constatare che fino ad una distanza di 10.000 m l'influenza di m_k , nonostante sia proporzionale a D^2 , è bassa; entro tale limite prevale in modo preponderante l'errore sulla distanza zenitale e si può ritenere che lo s.q.m. del dislivello sia approssimativamente proporzionale alla distanza secondo la

$$m_A \cong \pm 1,2D$$

dove m_A è espresso in centimetri e D in chilometri.

***Teorema di Nepero**

Grazie a questo teorema è possibile risolvere un triangolo qualora si conoscano le misure di due lati e dell'angolo compreso

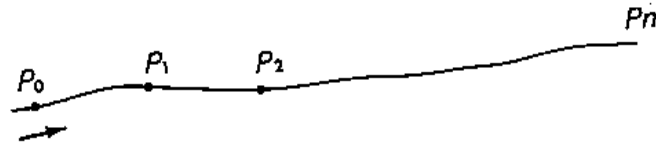
In un triangolo qualsiasi la differenza delle misure di due lati sta alla loro somma come la tangente della semidifferenza degli angoli opposti sta alla tangente della semisomma degli stessi angoli :

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Compensazione di una linea di livellazione

Le misure di livellazione eseguite sul terreno, ancorché siano stati eliminati gli errori teoricamente prevedibili, sono pur sempre affette dagli errori accidentali di osservazione. E' quindi necessaria una compensazione, che consiste nell'eliminare le discordanze delle misure con opportune correzioni.

Supponiamo di aver misurato i dislivelli lungo una linea e le quote h_0 e h_n dei capisaldi estremi siano note e abbiano una precisione maggiore o uguale alle misure.



$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$	$\Rightarrow$ dislivelli tra capisaldi consecutivi
$l_1, l_2, \dots, l_n$	$\Rightarrow$ distanze in km tra i capisaldi
L	$\Rightarrow$ lunghezza in km della linea
ε	$\Rightarrow$ errore di chiusura = $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \dots - \Delta_n$
ε/L	$\Rightarrow$ errore chilometrico

Se invece non si conoscono le quote dei capisaldi estremi o queste sono note con una precisione inferiore a quella delle misure ma la linea è stata misurata in andata e ritorno:

Ammettendo l'errore di chiusura proporzionale alla distanza, le correzioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ da apportare ai dislivelli misurati si ottengono ripartendo l'errore chilometrico, cambiato di segno, in ragione della distanza tra i capisaldi:

$$x_1 = -\frac{\varepsilon}{L}l_1, \quad x_2 = -\frac{\varepsilon}{L}l_2, \quad \dots, \quad x_n = -\frac{\varepsilon}{L}l_n$$

Pertanto le quote dei capisaldi $P_1, P_2, \dots, P_n$ sono:

$$h_1 = h_0 + \Delta_1 - \frac{\varepsilon}{L}l_1$$

$$h_2 = h_1 + \Delta_2 - \frac{\varepsilon}{L}l_2$$

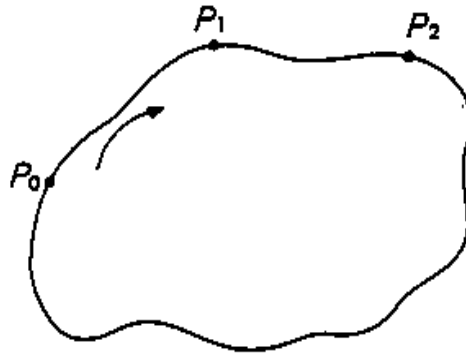
$$h_{n-1} = h_{n-2} + \Delta_{n-1} - \frac{\varepsilon}{L}l_{n-1}$$

Le stesse formule sono valide nel caso di un poligono chiuso, che altro non è che una linea con gli estremi coincidenti.

In questo caso l'errore di chiusura è: $\varepsilon = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$

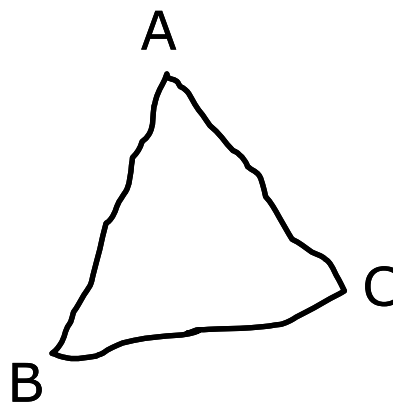
Le stesse formule sono valide nel caso di un poligono chiuso, che altro non è che una linea con gli estremi coincidenti.

In questo caso l'errore di chiusura è: $\varepsilon = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$



Esempio

Dal caposaldo A di quota $Q_A = 82.70005$ m, con linea di livellazione chiusa, si sono quotati i capisaldi B e C, con misure al decimo di millimetro su stadia a doppia graduazione.



Dislivelli:

$$h_{AB} = +0.3393 \text{ m}$$

$$h_{BC} = +3.8543 \text{ m}$$

$$h_{CA} = -4.1901 \text{ m}$$

Distanze:

$$2.08 \text{ km}$$

$$1.32 \text{ km}$$

$$1.57 \text{ km}$$

Errore di chiusura

$$e = +0.0035 \text{ m}$$

$$D = 4.97 \text{ km}$$

Errore di chiusura chilometrico $E = 0.0035/4.97 = 0.00070 \text{ m/km}$

$$h_{AB} \text{ compensato} = +0.3393 - (0.00070 \times 2.08) = +0.33784 \text{ m}$$

$$h_{BC} \text{ compensato} = +3.8543 - (0.00070 \times 1.32) = +3.85337 \text{ m}$$

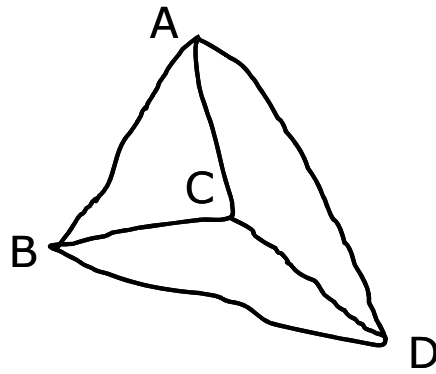
$$h_{CA} \text{ compensato} = -4.1901 - (0.00070 \times 1.57) = -4.19121 \text{ m}$$

controllo

$$0.00000$$

$$Q_B \text{ compensato} = Q_A + h_{AB} = 82.70005 + 0.3378 = 83.0383 \text{ m}$$

$Q_C \text{ compensato} = Q_B + h_{BC} = 83.0383 + 3.85337 = 86.8917 \text{ m}$ Più complesso è il caso in cui le linee di livellazione costituiscono una rete, ovvero l'appartenenza di alcuni capisaldi a diversi poligoni di livellazione.



In questo caso non è possibile operare per semplice ripartizione dell'errore di chiusura e bisogna adottare una compensazione in presenza di equazioni d'osservazione esuberanti. Infatti si potrebbe pensare di procedere come nel caso precedente compensando il poligono ABD e quindi determinare la quota del caposaldo C con provenienze, con media pesata, con pesi pari all'inverso delle tre distanze. Ma in questo modo nei tre poligoni non risulterà uguale a zero la somma dei tre dislivelli. Perché questo avvenga è necessario procedere ad una compensazione globale rigorosa.

Precisione di una linea di livellazione

Si è visto come si calcola la precisione di una battuta; in presenza di una linea di livellazione costituita da n battute, considerando l's.q.m. delle letture sempre uguale e pari ad m , con evidente estensione, si otterrà l's.q.m. del dislivello

$$(4) m_{\Delta} = m\sqrt{2n}$$

detta d la lunghezza media di una battuta e D la lunghezza totale della linea tra A e B si ha che:

$$n = \frac{D}{d}$$

da cui:

$$m_{\Delta} = m\sqrt{2\frac{D}{d}}$$

le quanti m e d si possono ritenere costanti e conglobarle in un'unica costante $k = m\sqrt{\frac{2}{d}}$

e si può scrivere:

$$m_{\Delta} = k\sqrt{D}$$

ciò significa che s.q.m. del dislivello valutato con una linea di livellazione geometrica è proporzionale alla radice quadrata della distanza.