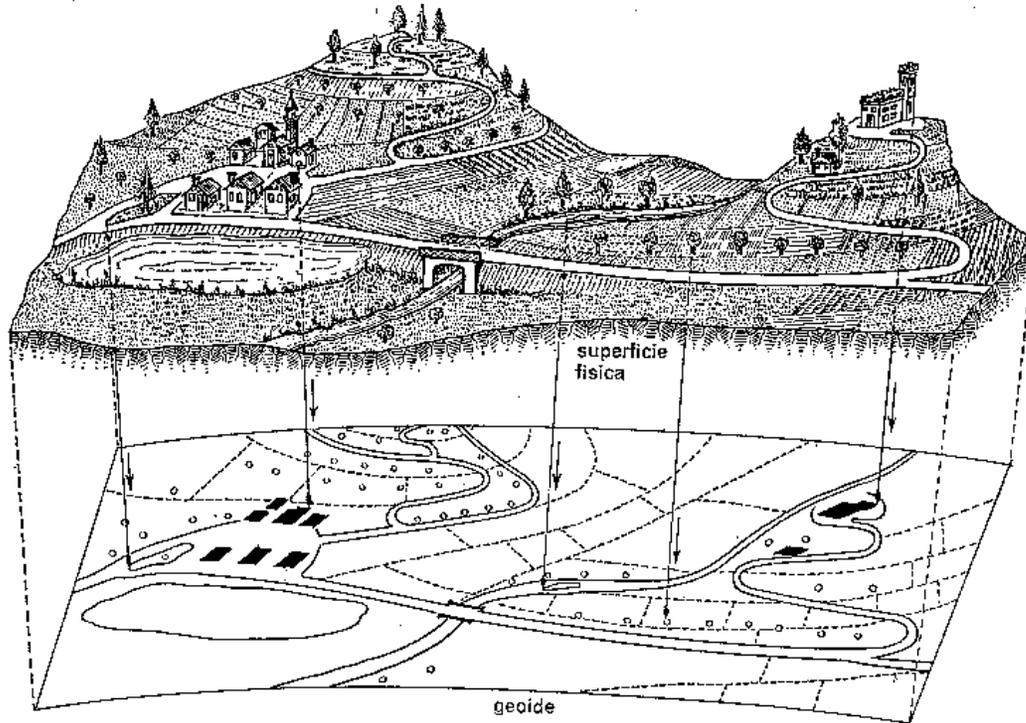


Problema rappresentazione terreno

La superficie fisica ha forma molto irregolare e discontinua



NON DEFINIBILE ANALITICAMENTE
(impossibili misure di aree, distanze e angoli)



Soluzione:

Proiettare tutti i punti del terreno, lungo la verticale, su una superficie di riferimento, che sia regolare, continua e levigata



GEOIDE



Problema rappresentazione terreno

GEOIDE



Superficie normale in ogni punto alla direzione della verticale

=

Superficie dei mari, prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua avesse la stessa temperatura, la stessa densità e non ci fossero perturbazioni dovute a correnti, venti e maree

(superficie materializzata in corrispondenza di un mareografo – s.l.m.m.)

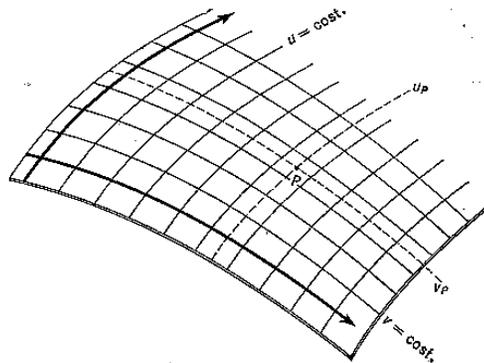
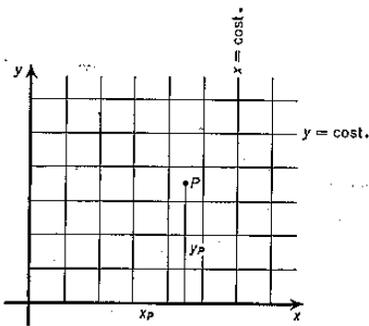
Ogni punto proiettato è univocamente determinato da:

- Coppia di COORDINATE CURVILINEE
- Distanza fra punto reale e sua proiezione → QUOTA
(*quota ortometrica o geoidica*)



Procedura di rilievo e rappresentazione

- Descrizione del terreno con un numero limitato di punti caratteristici
- Proiezione di ogni punto fisico sul geode, lungo la verticale
- Posizione relativa dei punti sul geode determinata tramite misure di angoli e distanze (da definire su superfici curve)
- Posizioni dei punti date da coordinate curvilinee (deve essere nota l'equazione del geode)
- Congiungendo opportunamente i punti proiettati ed indicandone la quota si ha la descrizione completa del terreno



- E' più conveniente lavorare su di un supporto piano



$$X = X(u, v)$$

$$Y = Y(u, v)$$



Procedura di rilievo e rappresentazione

Per ottenere il rilievo e la rappresentazione della superficie fisica terrestre occorre:

- Definire l'equazione del geoide
- Definire il sistema di coordinate curvilinee u, v
- Definire angoli e distanze sul geoide
- Definire la trasformazione delle misure di angoli e distanze in u, v
- Definire la trasformazione da u, v in coordinate piane



Geodesia

Compiti della GEODESIA sono:

- Definizione del geoide nella sua forma e nelle sue dimensioni
- Definizione del campo gravitazionale terrestre in ogni punto (intensità e direzione del vettore di gravità \vec{g})
- Ipotesi e conclusioni generali relative alla distribuzione interna delle masse nel globo terrestre

Geodesia geometrica → assume il fatto che il geoide possa essere semplificato con una superficie algebrica precisa (sfera, ellissoide di rotazione), studia la geometria delle superfici e insegna a sviluppare le triangolazioni e calcolare le relazioni di posizione fra i suoi punti

Geodesia dinamica → definisce il geoide come una superficie equipotenziale del campo gravitazionale, ne studia lo scostamento dalle superfici geometriche ed insegna a tenere conto delle conseguenze operative



Definizione della superficie di riferimento

Il geoide è la superficie normale in ogni punto alla direzione della verticale

La gravità costituisce un campo di forza conservativo → ammette potenziale

Linee di forza → linee tangenti in ogni punto alla direzione della gravità
→ curve gobbe (non appartenenti ad un piano)

Superfici equipotenziali → infinite e normali alle linee di forza del campo



Il geoide è una superficie equipotenziale della gravità, che passa per un determinato punto cui viene attribuita quota nulla. Questo punto è definito in modo assoluto da un mareografo.



Definizione della superficie di riferimento

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane OXYZ, avente origine nel baricentro della terra, l'asse Z coincidente con quello di rotazione terrestre e gli assi X e Y giacenti sul piano equatoriale (ECEF – Earth Centred Earth Fixed)

Il vettore di gravità \vec{g} è funzione della posizione ed è composto da due forze:

$$\vec{g} = \vec{g}(X, Y, Z)$$

-La forza di attrazione newtoniana \vec{F}

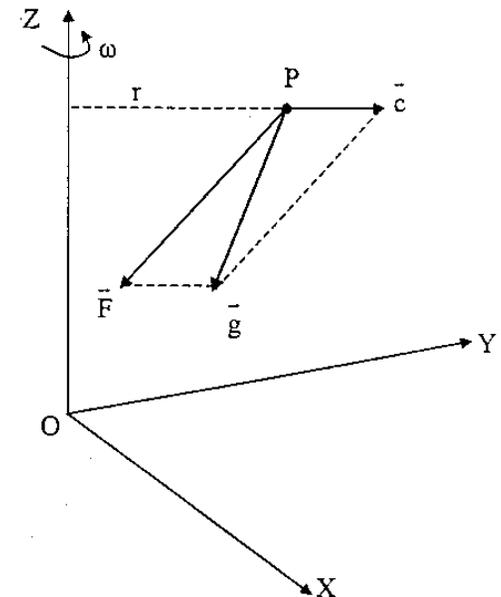
- La forza centrifuga $\vec{c} = \omega^2 \cdot \vec{r}$

$$\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} / \text{s}$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Anche il potenziale è funzione della posizione

$$W = W(X, Y, Z)$$





Definizione della superficie di riferimento

Come noto: $\vec{g} = \text{grad } W$ $\frac{\partial W}{\partial X} = \vec{g}_x$ $\frac{\partial W}{\partial Y} = \vec{g}_y$ $\frac{\partial W}{\partial Z} = \vec{g}_z$

Se indichiamo con dP uno spostamento infinitesimo del punto P , vale la relazione:

$$dW = \vec{g}_p \cdot d\vec{P}$$

Ossia, la derivata del potenziale secondo una direzione dP fornisce la componente del vettore gravità in quella direzione

Se lo spostamento dP è tangente alla superficie equipotenziale passante per P , risulta:

$$dW = \vec{g}_p \cdot d\vec{P} = 0$$

Da cui si deduce l'ortogonalità di \vec{g} rispetto alla superficie equipotenziale

Sia W che le sue derivate prime sono funzioni continue e prive di singolarità, per cui le superfici equipotenziali sono lisce e prive di spigoli o punti singolari → In ogni punto esiste una sola normale superficiale univocamente definita e variabile con continuità

Ciò nonostante la superficie presenta continue gibbosità



Definizione della superficie di riferimento

Il potenziale W è una quantità scalare ed è pari alla somma dei potenziali della forza di attrazione universale \vec{F} e della forza centrifuga \vec{C}

Potenziale FORZA CENTRIFUGA

Per ricavare il potenziale della forza centrifuga ricordiamo che la derivata del potenziale secondo una direzione fornisce la componente della forza in quella direzione

$$\frac{dv}{dr} = \vec{C} = \omega^2 \cdot \vec{r}$$

Il potenziale sarà dunque:

$$v(X, Y) = \int \omega^2 \cdot r dr = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot (X^2 + Y^2)$$



Definizione della superficie di riferimento

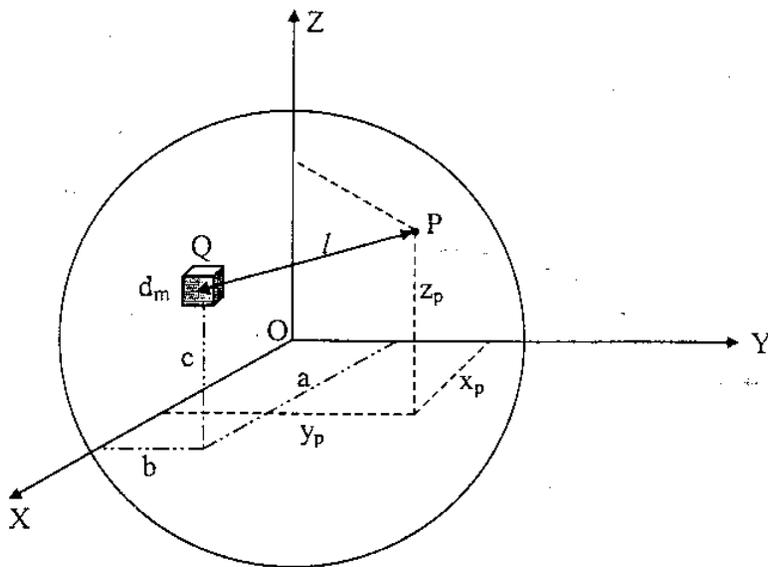
Potenziale FORZA GRAVITAZIONALE

La sua determinazione è più complessa. Consideriamo un elemento infinitesimo di massa dm posto in un punto $Q(a,b,c)$ di densità $\delta(a,b,c)$

$$dm = \delta(a,b,c) \cdot da \cdot db \cdot dc$$

Questo elemento infinitesimo provoca sulla massa unitaria posta in $P(X,Y,Z)$ una forza di attrazione, il cui modulo vale:

$$\begin{aligned} dF &= G \cdot \frac{dm \cdot 1}{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2} \\ &= G \cdot \frac{dm}{l^2} \end{aligned}$$



$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$$

dF diretta da P verso Q



Definizione della superficie di riferimento

Ricordando la relazione esistente tra potenziale e forza si può scrivere:

$$\frac{\partial dV}{\partial l} = dF \quad \rightarrow \quad dV = \int dF \cdot dl = \int \frac{G \cdot dm}{l^2} dl = \frac{Gdm}{l}$$

E quindi il potenziale dovuto a tutta la massa della terra:

$$V(X, Y, Z) = G \cdot \iiint_{V_{TERRA}} \frac{dm}{l}$$

Il potenziale W risulta dalla somma del potenziale V , relativo alla forza di attrazione gravitazionale e dal potenziale v relativo alla forza centrifuga (*i potenziali possono essere sommati perchè sono funzioni scalari*)

Se poniamo $W = \text{cost}$:

$$V(X, Y, Z) + v(X, Y) = \text{cost}$$



Famiglia di superfici equipotenziali



Definizione della superficie di riferimento

La superficie equipotenziale del campo gravitazionale, che passa per il punto di quota zero, definito dal livello medio del mare, si chiama GEOIDE

$$V(X, Y, Z) + v(X, Y) = W_0$$

Per determinare il primo termine di tale equazione occorrerebbe conoscere la funzione $\delta(a,b,c)$, ovvero come varia la densità per ogni punto della terra.

E' IMPOSSIBILE DETERMINARE RIGOROSAMENTE
L'EQUAZIONE DEL GEOIDE

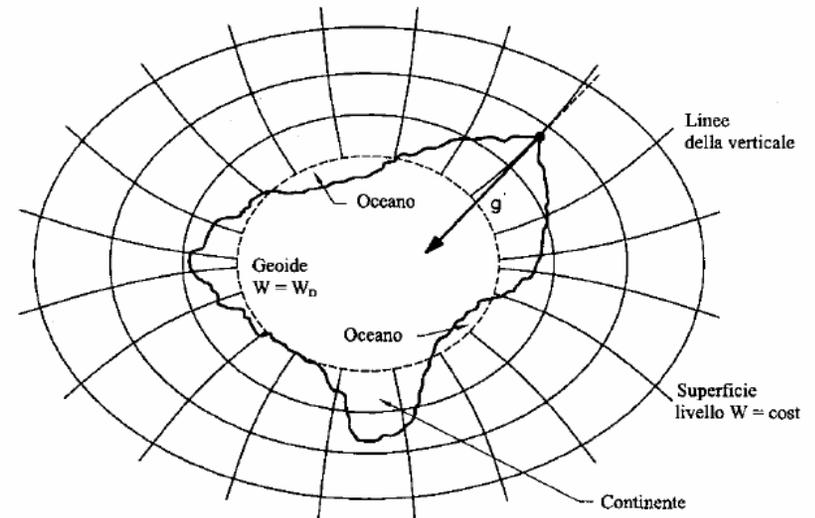
Bisogna trovare un'espressione approssimata del potenziale $V(X,Y,Z)$

L'integrale per il calcolo del potenziale della forza di attrazione universale, viene determinato mediante uno sviluppo in serie di funzioni sferiche dopo aver sostituito le coordinate geocentriche con le coordinate polari σ , ψ , λ .

Definizione della superficie di riferimento

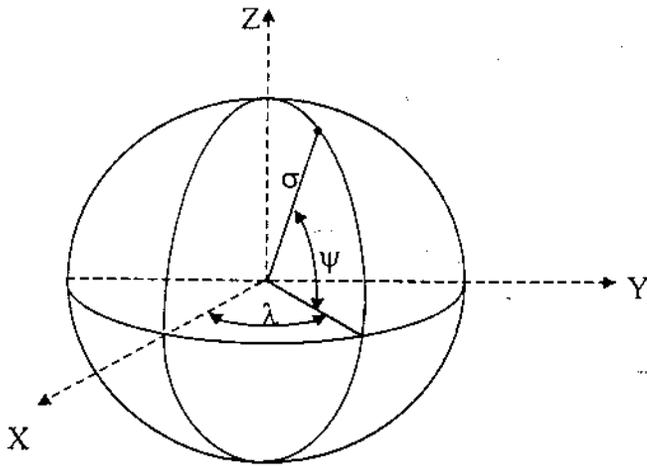
Per tale motivo diviene impossibile determinare rigorosamente l'equazione del geoide e tale superficie risulta difficile da utilizzare.

Opportune semplificazioni e approssimazioni permettono di adottare superfici più semplici che meglio si prestano ad essere utilizzate per i calcoli.



Ne discende che essendo impossibile determinare il geoide bisogna accontentarsi di calcolare le deviazioni di questo da una superficie che da esso si scosti il meno possibile.

Definizione della superficie di riferimento



$$X = \sigma \cdot \cos \psi \cdot \cos \lambda$$

$$Y = \sigma \cdot \cos \psi \cdot \sin \lambda$$

$$Z = \sigma \cdot \sin \psi$$

Dopo lo sviluppo in serie, limitato ai termini di secondo grado, avremo:
 $V = V' + T$, dove T indica il potenziale residuo di grado ≥ 3 .
 Il potenziale della gravità diventa quindi:

$$W = V + v$$

$$W = V' + v + T$$

$$W = U + T$$

$U \rightarrow$ Potenziale normale

$T \rightarrow$ Potenziale anomalo



Definizione della superficie di riferimento

Al potenziale normale U corrisponde una forza γ , definita gravità normale

La differenza tra il modulo dei due vettori \vec{g} (gravità) e $\vec{\gamma}$ (gravità normale), si chiama ANOMALIA di gravità e oggi è la grandezza più diffusamente misurata per il calcolo del geoide.

Dopo aver sostituito le coordinate geocentriche con le coordinate polari σ , ψ , λ , a meno di termini dell'ordine di $1/\sigma^4$ ($\sigma \approx 6370$ km e $1/\sigma^4 \approx 6.07 \cdot 10^{-28}$), il potenziale V' risulta espresso dalla seguente relazione approssimata:

$$V'(\sigma, \psi, \lambda) = \frac{G \cdot M}{\sigma} \cdot \left[1 + \frac{1}{2 \cdot \sigma^2 \cdot M} \cdot \left(C - \frac{A+B}{2} \right) \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2 \psi) + \frac{3}{4 \cdot \sigma^2} \cdot \frac{B-A}{M} \cdot \cos^2 \psi \cdot \cos 2\lambda \right]$$

Dove M è la massa totale della terra e A , B , C I momenti di inerzia rispetto agli assi X , Y , Z , deducibili con ottima approssimazione dalla meccanica celeste.



Definizione della superficie di riferimento

$$V'(\sigma, \psi, \lambda) = \frac{G \cdot M}{\sigma} \cdot \left[1 + \frac{1}{2 \cdot \sigma^2 \cdot M} \cdot \left(C - \frac{A+B}{2} \right) \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2 \psi) + \frac{3}{4 \cdot \sigma^2} \cdot \frac{B-A}{M} \cdot \cos^2 \psi \cdot \cos 2\lambda \right]$$

Poichè, una grande quantità di osservazioni dimostrano che la terra ha una forma molto prossima a quella di un solido di rotazione:

$$A = B$$

$$r^2 = X^2 + Y^2 = \sigma^2 \cdot \cos^2 \psi$$

$$U = \frac{G \cdot M}{\sigma} \cdot \left[1 + \frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \frac{C-A}{M} \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2 \psi) \right] + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sigma^2 \cdot \cos^2 \psi = \text{cost}$$



EQUAZIONE DELLO SFEROIDE

Non compare λ nell'equazione → Superficie di rotazione



Definizione della superficie di riferimento

Le costanti G , M e $C - A$, che definiscono lo sferoide, sono di natura meccanica e vanno sostituite con parametri geometrici:

- Il semiasse equatoriale $\rightarrow a$
- Il semiasse polare $\rightarrow c$

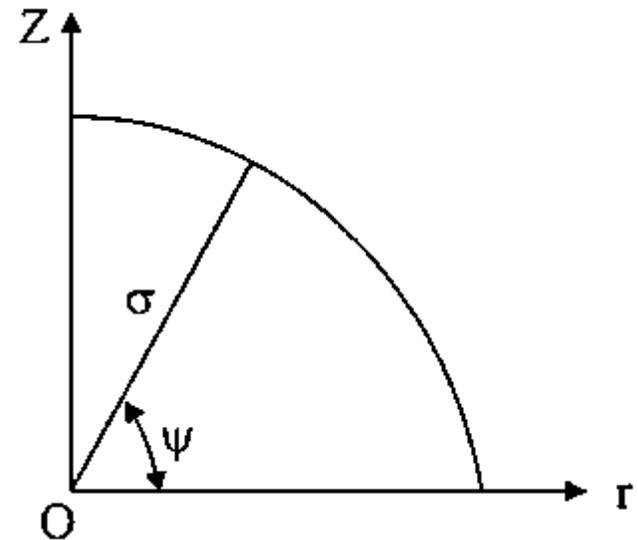
Si ottiene così, con alcune trasformazioni, l'equazione dello sferoide in coordinate polari:

$$\sigma = a \cdot (1 - \alpha \cdot \sin^2 \psi)$$

$$\alpha = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a} \quad \rightarrow \text{ schiacciamento}$$

L'equazione nel sistema geocentrico è:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} = a \cdot \left(1 - \alpha \cdot \frac{Z^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \right)$$





Definizione della superficie di riferimento

Consideriamo ora un ellissoide di rotazione avente gli stessi semiassi a e c dello sferoide. Esso sarà definito nel sistema geocentrico

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Dalla definizione di schiacciamento:

$$c = a \cdot (1 - \alpha) \rightarrow c^2 = a^2 \cdot (1 - \alpha)^2 = a^2 \cdot (1 + \alpha^2 - 2\alpha)$$

Lo schiacciamento α vale circa $1/300$ e quindi, trascurando il termine α^2 , pari a circa $1/90.000 \approx 1 \cdot 10^{-5}$, si commetterà un errore nella determinazione del semiasse minore c di circa 35m (*errore del tutto accettabile*)

Quindi, a meno di termini in α^2 :

$$c^2 = a^2 \cdot (1 - 2\alpha)$$



Definizione della superficie di riferimento

L'equazione dell'ellissoide diviene:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \cdot (1 - 2\alpha)^{-1} = a^2$$

Sviluppando in serie binomiale il coefficiente della Z^2 e trascurando, al solito, i termini in α^2 e potenze superiori, si ottiene:

$$(1 - 2\alpha)^{-1} \approx (1 + 2\alpha)$$

Ricordando che:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma^2$$

L'equazione dell'ellissoide, nel riferimento polare, diviene:

$$\sigma^2 = a^2 \cdot \left(1 - 2\alpha \cdot \frac{Z^2}{a^2} \right)$$

Osservando che i termini a e σ sono dello stesso ordine di grandezza, si può accettare la sostituzione:

$$\frac{Z^2}{a^2} \cong \frac{Z^2}{\sigma^2} = \sin^2 \psi$$



Definizione della superficie di riferimento

L'equazione dell'ellissoide diviene:

$$\sigma = a \cdot (1 - 2\alpha \cdot \sin^2 \psi)^{1/2}$$

Utilizzando ancora lo sviluppo binomiale per il secondo membro e continuando a trascurare i termini in α^2 , si ottiene:

$$\sigma = a \cdot (1 - \alpha \cdot \sin^2 \psi)$$

Che coincide con l'equazione dello sferoide in coordinate polari.



**L'ELLIPSOIDE DI ROTAZIONE COINCIDE CON LO
SFEROIDE DI UGUALI SEMIASSI A MENO DI TERMINI IN α^2**



Ellissoidi di riferimento

La geometria ellissoidica, seppur complessa, è più semplice della geometria sferoidica.

Il compito dei geodeti è quello di determinare i semiassi maggiore e minore a e c , ovvero a e α . I metodi si basano su misure geometriche (*misure di archi di meridiano e parallelo*), su misure di gravità e di tracciamento di orbite di satelliti artificiali.

Nel corso degli anni molti geodeti hanno lavorato su tale problema e hanno determinato valori diversi di a e α :

	a [m]	α
BESSEL (1841)	6.377.397	1/299.2
CLARKE (1880)	6.378.243	1/293.5
HAYFORD (1909)	6.378.388	1/297.0
WGS84 (1984)	6.378.137	1/298.257223563



Ellissoidi di riferimento

NOME	anno	Semiassse maggiore a (m)	Semiassse minore b (m)	schacciamento α	Utenti-Note
Bounguer	1738	6. 397. 300		1/216.8	
Delambre	1810	6. 375. 653		1/334.0	
Everest	1830	6. 377. 276	6. 356. 075	1/300.8	India
Bessel	1841	6. 377. 397	6. 356. 079	1/299.1	Germania, Indonesia, Paesi Bassi
Airy	1858	6. 377 .563	6. 356. 257	1/299.3	Gran Bretagna
Pratt	1863	6 .378. 245		1/295.3	
Clarke	1866	6 .378. 206	6. 356. 584	1/294.9	USA
Clarke modificato	1880	6 .378. 249	6. 356.515	1/293.5	Sud Africa
Hayford (Internaz.)	1909	6. 378. 388	6. 356. 912	1/297.0	Usato dalla cartografia italiana. adottata internazionalmente nel 1924
Krassovsky	1948	6. 378. 245	6. 356.863	1/298.3	Russia, Paesi Orientali
WGS 60	1960	6. 378. 165		1/298.3	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti)
National Australian	1965	6. 378. 165		1/298.3	
WGS 66	1966	6. 378. 145		1/298.25	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti)
I.U.G.G.	1967	6. 378. 160	6. 356. 775	1/298.25	adottato internazionalmente
South America	1969	6. 378. 160	6. 356. 774	1/298.3	
WGS 72	1972	6. 378. 135	6. 356. 750	1/298.258	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti)
WGS 84 (GRS)	1984	6. 378. 137	6. 356. 752	1/298.257	calcolato da dati di geodesia spaziale (orbite dei satelliti), usato per la determinazione del GPS



Il meridiano terrestre come metro di paragone

La misura della Terra è stata parametro fondamentale anche per la definizione di grandezze che apparentemente non hanno nessun legame con essa.

Vi siete mai chiesti, ad esempio, perché un metro è lungo proprio un metro? Ebbene questa misura deriva dalla lunghezza del meridiano terrestre.

La sua storia comincia nel 1792, in Francia, nel periodo della Rivoluzione.

Fino ad allora, in Francia come nel resto del mondo, esistevano un'infinità di unità di misura, diverse non solo da uno Stato all'altro, ma anche all'interno di una regione, di una provincia o di un distretto. Unità diverse nel nome e a volte diverse nel valore, anche se con lo stesso nome. E per una stessa grandezza, ad esempio la lunghezza, unità diverse, a seconda che si misurassero campi o stoffe o edifici.

Questa organizzazione era un'eredità del sistema feudale, che limitava gli scambi commerciali fra le varie aree geografiche, facilitava i raggiri nelle compravendite e rendeva difficile una tassazione uniforme.



Il meridiano terrestre come metro di paragone

Lo spirito illuminista che guidava la Rivoluzione francese non poteva tollerare questa fonte di disuguaglianza fra i cittadini.

Questo convinse il governo rivoluzionario ad incaricare la comunità degli scienziati, attraverso l'Accademia delle Scienze, della definizione di un sistema di unità di misura universale, ricavato da parametri non soggetti all'arbitrio umano.

Per soddisfare questo requisito, sembrò ovvio rivolgersi alle grandezze della natura, considerate oggettive e immutabili.

Dopo ampie discussioni, per la lunghezza fu deciso che *l'unità base sarebbe stata pari alla decimilionesima parte dell'arco di meridiano compreso fra il Polo Nord e l'Equatore e passante per Parigi.*



Definizione della superficie di riferimento

Gli studi e le ricerche che sono stati condotti storicamente per la determinazione della superficie fisica della Terra, e quindi per la determinazione della superficie di riferimento da utilizzare nelle operazioni di misura, hanno portato ad individuare **due differenti superfici**:

- la prima è una superficie, denominata **geoide**, che rappresenta la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre passante per il livello medio dei mari. Soddisfa la condizione di essere facilmente individuabile fisicamente (la direzione e il verso del campo gravitazionale possono infatti essere individuati con facilità), ma non è matematicamente trattabile;
- la seconda è un **ellissoide di rotazione**, cioè un ellissoide biassiale, di forma e dimensioni assegnate. E' una superficie geometrica facilmente trattabile dal punto di vista matematico, ma non possiede alcun significato fisico.

L'utilizzo di queste **due differenti superfici di riferimento** ha comportato nel posizionamento classico la separazione della determinazione della componente altimetrica da quella planimetrica.

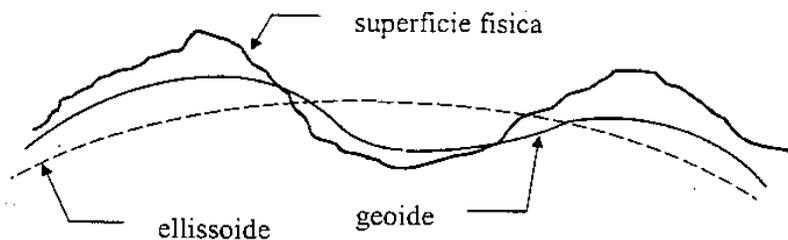


Definizione della superficie di riferimento

- **il geoide** rappresenta la *superficie di riferimento utilizzata per la determinazione delle quote*,
- **l'ellissoide** è utilizzato per la *definizione delle coordinate planimetriche*.

GEOIDE → per l'altimetria

ELLISSOIDE → per la planimetria



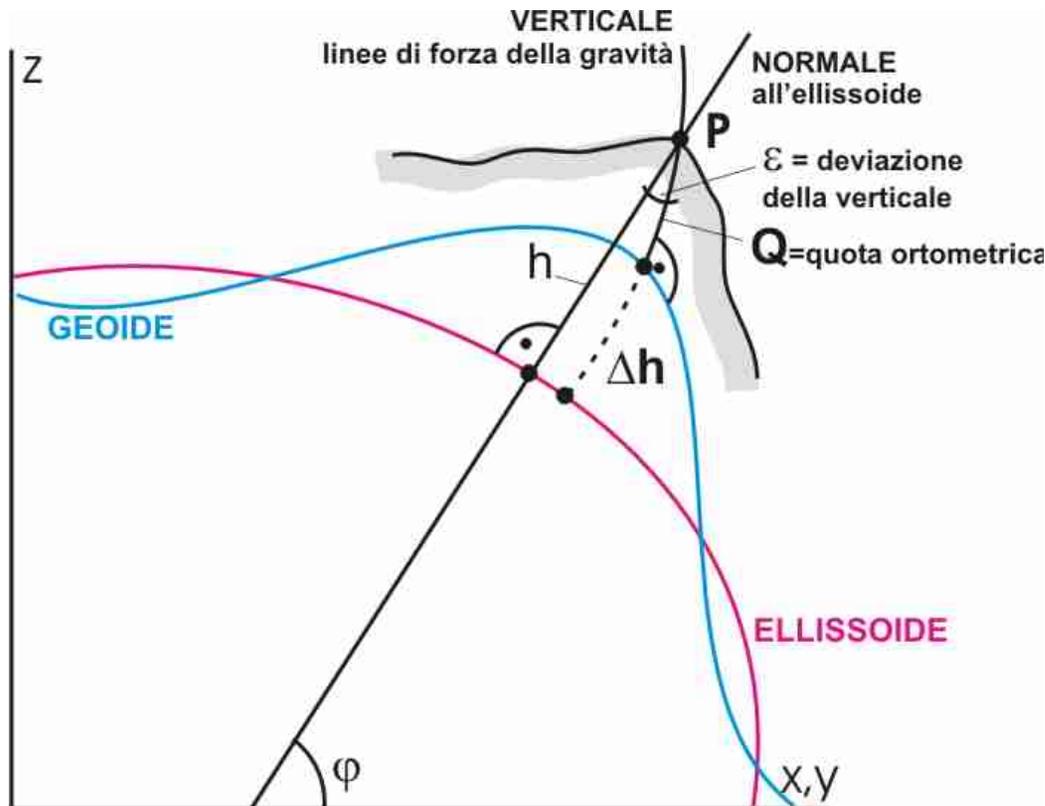


QUOTA ELLISSOIDICA E ORTOMETRICA-DEVIAZIONE DELLA VERTICALE

Come conseguenza, in un punto P della superficie terrestre si potranno definire due normali, ognuna relativa alla corrispondente superficie di riferimento:

la normale al geoide (o verticale)

la normale all'ellissoide.



Questo comporta che la verticale in un generico punto P del geoide non coincide con la normale all'ellissoide.

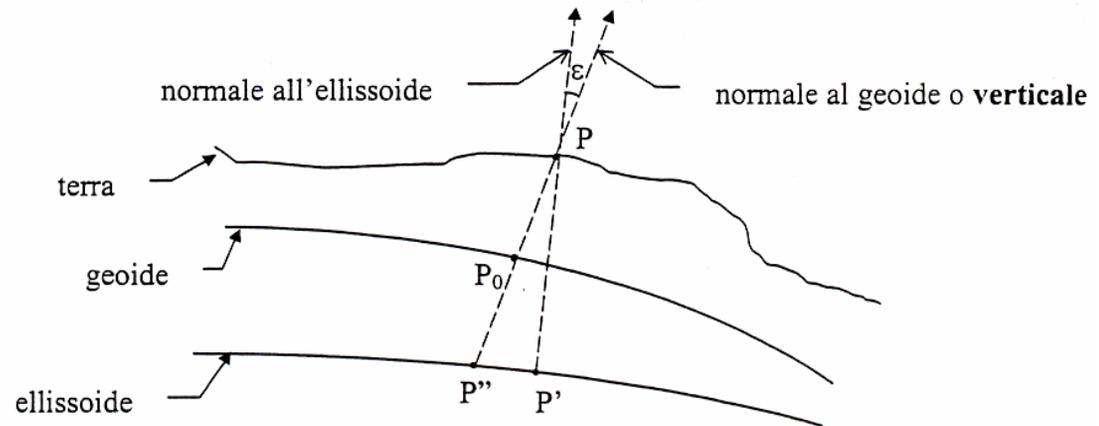
L'angolo da esse formato viene detto **deviazione della verticale** ed è dell'ordine di qualche secondo sessagesimale.



QUOTA ELLISSOIDICA E ORTOMETRICA-DEVIAZIONE DELLA VERTICALE

La relazione tra quota ellissoidica h e quota ortometrica H si esprime definendo l'ondulazione del N del geoide:

$$N = h - H$$



$$P_0P'' = N$$

ondulazione del geoide (differenza tra ellissoide e geoide in un punto).

In Italia varia da +37 m in Calabria a +52 m in Val D'Aosta $PP' = h$
quota ellissoidica del punto P

$$PP_0 = H$$

quota ortometrica o quota del punto P

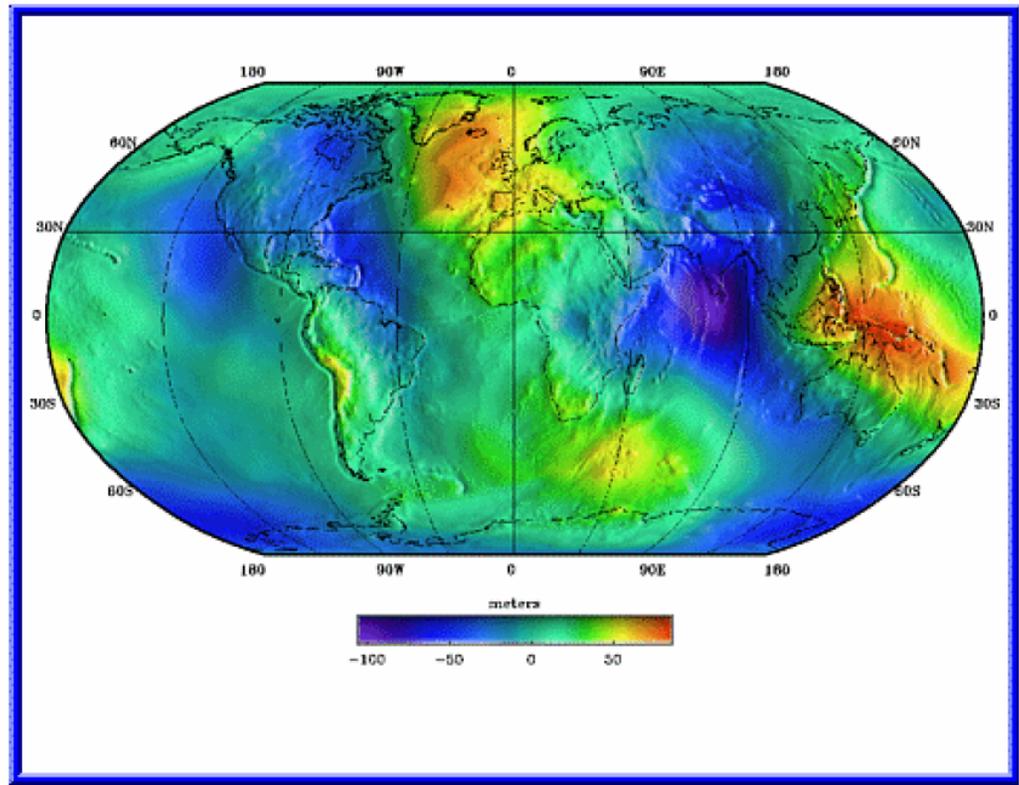
ε

deviazione della verticale (vale poche decine di secondi sessagesimali, e varia da zona a zona).



**ONDULAZIONE DEL GEOIDE
SECONDO IL MODELLO GLOBALE EGM96,
DAL SITO: [HTTP://CDDISA.GSFC.NASA.GOV/926/EGM96/EGM96.HTML](http://CDDISA.GSFC.NASA.GOV/926/EGM96/EGM96.HTML)**

$$N=h-H$$





QUOTA ELLISSOIDICA E ORTOMETRICA-DEVIAZIONE DELLA VERTICALE

La deviazione della verticale comporta numerose implicazioni, alcune delle quali anche di carattere pratico:

è infatti evidente che l'unica direzione fisicamente determinabile è quella della verticale, cioè della normale al geoide, ed essa costituisce quindi il riferimento naturale e fondamentale al quale sono legate le misure di carattere topografico eseguite sulla superficie fisica della Terra.

Gli elementi misurati vengono poi utilizzati per individuare la posizione relativa ed assoluta dei punti mediante procedimenti di calcolo da svilupparsi sulla superficie di riferimento e quindi, in generale, sull'ellissoide di rotazione:

è quindi evidente che è necessario, almeno in linea teorica, apportare agli elementi misurati, riferiti alla verticale, delle opportune correzioni per dedurne quelli corrispondenti riferiti alla normale ellissoidica.

Tali correzioni, sono in generale, molto piccole e di conseguenza possono essere trascurate nella quasi generalità dei casi, se non per misure di altissima precisione o in condizioni particolari di forti deviazioni della verticale.



Parametri ellissoide

Considerando un ellissoide di rotazione di parametri a e c noti, restano definite le quantità:

schacciamento $\alpha = \frac{a-c}{a}$

prima eccentricità $e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$

seconda eccentricità $e'^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$

Fra tali quantità sussistono le seguenti relazioni:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}$$

$$(1 - e^2) \cdot (1 + e'^2) = 1$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

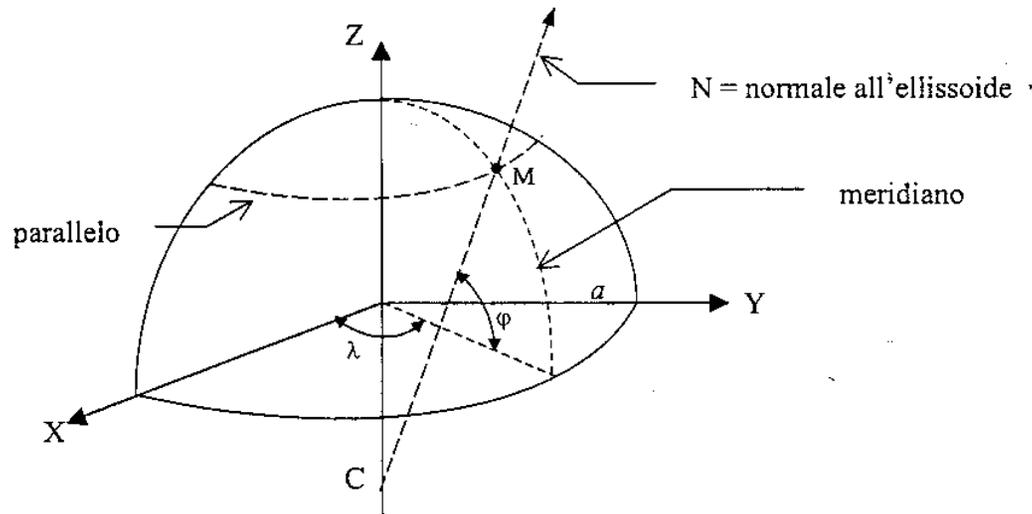
$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1 + e'^2}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - e^2} = 1 - \alpha$$

Coordinate geografiche ellissoidiche

La generatrice, e di conseguenza ogni meridiano, è un'ellisse di semiassi a e c detta ELLISSE MERIDIANA



Preso un punto generico M appartenente all'ellissoide, la normale N ad esso relativa incontra l'asse polare di rotazione in C , che rappresenta il centro di curvatura dell'ellisse meridiana in M .

Latitudine φ → angolo acuto che N forma con il piano equatoriale XY

Longitudine λ → angolo diedro che il semipiano meridiano per M forma con un semipiano meridiano origine



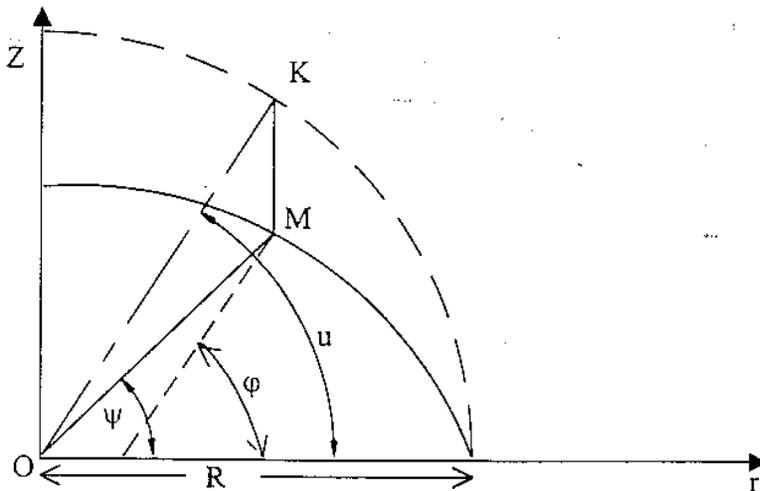
Coordinate geografiche ellissoidiche

Paralleli → linee di uguale latitudine

Meridiani → linee di uguale longitudine

I parametri φ , λ , ogni coppia dei quali individua univocamente il punto M e la direzione N, costituiscono un sistema di coordinate curvilinee superficiali dette:

COORDINATE GEOGRAFICHE ELLISSOIDICHE



Considerando la sezione meridiana contenente M:

Latitudine ridotta u → angolo compreso tra il segmento OK e l'asse r

Latitudine geocentrica ψ → angolo compreso tra il segmento OM e l'asse r

$$\psi < u < \varphi$$



Equazioni parametriche ellissoide

Data l'equazione dell'ellissoide di rotazione nel sistema cartesiano geocentrico:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

scelti i parametri φ , λ ci proponiamo di scrivere le equazioni parametriche dell'ellissoide. In un piano meridiano Zr l'equazione dell'ellisse meridiana risulta:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

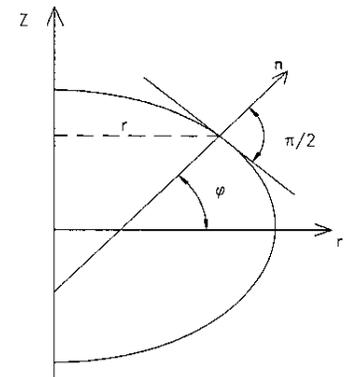
I coseni direttori della normale ad una curva di equazione $f(r,Z)=0$, sono proporzionali alle derivate parziali di questa funzione lungo le due direzioni di riferimento:

$$\cos \varphi = k \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = k \cdot \frac{2r}{a^2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = k \cdot \frac{\partial f}{\partial Z} = k \cdot \frac{2Z}{c^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{r} \cdot \frac{a^2}{c^2} \quad \Rightarrow$$

$$Z = r \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{c^2}{a^2} = r \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (1 - e^2)$$



Sostituendo Z nell'equazione dell'ellisse meridiana



Equazioni parametriche ellissoide

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2}{c^2} = 1 \Rightarrow r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)^2 = a^2$$

Ricordando che:

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{1 - e^2}$$

Si ha:

$$r^2 [1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)] = a^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot (1 - e^2)} = \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

$$r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

Prima equazione parametrica
dell'ellisse meridiana



Equazioni parametriche ellissoide

Sostituendo r si ottiene la seconda equazione parametrica:

$$Z = r \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (1 - e^2) = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (1 - e^2) = \frac{a \cdot \sin \varphi \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

Poichè nel sistema geocentrico ogni ellisse meridiana può essere individuata dalla longitudine λ e risulta che:

$$X = r \cdot \cos \lambda \qquad Y = r \cdot \sin \lambda$$

Le equazioni parametriche dell'ellissoide sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{W} \\ Y = \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda}{W} \\ Z = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{W} \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad W = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$



Equazioni parametriche ellissoide

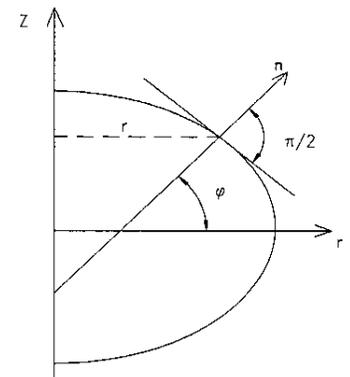
Per un punto posto ad altezza ellissoidica h , le equazioni diventano:

$$\begin{cases} X = \left(\frac{a}{W} + h \right) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ Y = \left(\frac{a}{W} + h \right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ Z = \left(\frac{a}{W} \cdot (1 - e^2) + h \right) \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\frac{a}{W} \cos \varphi = r$$

$$\frac{a}{W} = N$$

Parametro che vedremo essere il raggio di curvatura di una particolare sezione dell'ellissoide





Equazioni parametriche ellissoide

ESEMPI

Es. 1

Parametri dell'ellissoide Internazionale: $a = 6'378'388 \text{ m}$
 $e^2 = 0.00672267$

punto A: $\varphi = 43^\circ 42' 45.418''$ $\lambda = 1^\circ 16' 51.012''$

punto B: $\varphi = 43^\circ 41' 05.212''$ $\lambda = 1^\circ 18' 36.310''$

punto C: $\varphi = 43^\circ 43' 08.544''$ $\lambda = 1^\circ 19' 49.836''$

ES. 2

$$\varphi = 45^\circ$$

$$\lambda = 30^\circ$$

$$h = 350 \text{ m}$$

$$a = 6'378'388 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00672267$$



Equazioni parametriche ellissoide

ESEMPIO 1:

Parametri dell'ellissoide Internazionale: $a=6'378'388$ m
 $e^2 = 0.00672267$

punto A: $\varphi = 43^\circ 42' 45.418''$ $\lambda = 1^\circ 16' 51.012''$

Soluzione

Punto A

$$\varphi = 43^\circ 42' 45.418'' = 43^\circ + \frac{42 \cdot 60 + 45.418}{3600} = 43^\circ,71261611$$

$$\lambda = 1^\circ 16' 51.012'' = 1^\circ + \frac{16 \cdot 60 + 51.012}{3600} = 1^\circ.280836667$$



Equazioni parametriche ellissoide

$$X = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}} = 4'616'659.048 m$$

$$Y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}} = 103'221.763 m$$

$$Z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}} = 4'385'144.185 m$$

	A	B	C	D
1	a =	6378388		
2	e2 =	0.00672267		
3				
4	φ =	43.71261611	0.762929	
5	λ =	1.280836667	0.022355	
6				
7	W =	1.001609042		
8				
9	N =	6388651.094		
10				
11	cos φ =	0.722815001		
12	sen φ =	0.691041586		
13	cos λ =	0.999750141		
14	sen λ =	0.022352955		
15				
16	X =	4616659.048		
17	Y =	103221.7634		
18	Z =	4385144.185		

	A	B	C
1	a =	6378388	
2	e2 =	0.00672267	
3			
4	φ =	=43+(42*60+45.418)/3600	=RADIANTI(B4)
5	λ =	=1+(16*60+51.012)/3600	=RADIANTI(B5)
6			
7	W =	=1/RADQ(1-B2*POTENZA(SEN(C4);2))	
8			
9	N =	=B1/RADQ(1-B2*POTENZA(SEN(C4);2))	
10			
11	cos φ =	=COS(C4)	
12	sen φ =	=SEN(C4)	
13	cos λ =	=COS(C5)	
14	sen λ =	=SEN(C5)	
15			
16	X =	=B9*B11*B13	
17	Y =	=B9*B11*B14	
18	Z =	=B9*B12*(1-B2)	
19			
20			



Equazioni parametriche ellissoide

ESEMPIO 2:

$$\varphi = 45^\circ$$

$$\lambda = 30^\circ$$

$$h = 350 \text{ m}$$

$$a = 6'378'388 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00672267$$

$$X = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos \varphi \cos \lambda =$$
$$= 3'912'744.523 \text{ m}$$

$$Y = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos \varphi \sin \lambda =$$
$$= 2'259'024.104 \text{ m}$$

$$Z = \left(\frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \sin \varphi =$$
$$= 4'487'676.524 \text{ m}$$

	A	B	C	D
23	a =	6378388		
24	e2 =	0.00672267		
25				
26	φ =	45	0.7854	
27	λ =	30	0.5236	
28	h =	350		
29				
30	W =	1.001684916		
31				
32	N =	6389135.05		
33				
34	cos φ =	0.707106781		
35	sen φ =	0.707106781		
36	cos λ =	0.866025404		
37	sen λ =	0.5		
38				
39	X =	3912744.523		
40	Y =	2259024.104		
41	Z =	4487676.524		
42				

	A	B	C
23	a =	6378388	
24	e2 =	0.00672267	
25			
26	φ =	45	=RADIANTI(B26)
27	λ =	30	=RADIANTI(B27)
28	h =	350	
29			
30	W =	=1/RADQ(1-B24*POTENZA(SEN(C26);2))	
31			
32	N =	=B23/RADQ(1-B24*POTENZA(SEN(C26);2))	
33			
34	cos φ =	=COS(C26)	
35	sen φ =	=SEN(C26)	
36	cos λ =	=COS(C27)	
37	sen λ =	=SEN(C27)	
38			
39	X =	=(B32+B28)*B34*B36	
40	Y =	=(B32+B28)*B34*B37	
41	Z =	=(B32*(1-B24)+B28)*B35	
42			



Equazioni parametriche ellissoide

ESEMPIO 3:

Determinare le coordinate cartesiane geocentriche del punto IGM95 105703 – Cascina di coordinate geografiche WGS84:

$$\text{lat } 43^{\circ} 40' 29.524'' \quad \text{lon } 10^{\circ} 34' 01.239'' \quad q_{\text{ell}} 62.04\text{m}$$

$$a_{\text{WGS84}} = 6378137 \quad \alpha_{\text{WGS84}} = 1/298.257223563$$

$$\varphi = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = 43.67486778^{\circ}$$

$$\lambda = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = 10.56701083^{\circ}$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 = 0.006694379992 \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 0.998402515$$

$$N = \frac{a}{W} = 6388342.281\text{m}$$

$$\begin{cases} X = (N+h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda = 4542182.681\text{m} \\ Y = (N+h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda = 847339.830\text{m} \\ Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi = 4382077.144\text{m} \end{cases}$$



Equazioni parametriche ellissoide

Il passaggio inverso, da coordinate cartesiane geocentriche a geografiche, è più complesso.

Non sono esplicitabili direttamente le relazioni di φ e di h .



CALCOLO IN FORMA ITERATIVA

Il valore di λ è deducibile dalle equazioni parametriche in X e Y :

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}$$

Dalle stesse equazioni, il raggio del parallelo risulta:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N+h) \cdot \cos \varphi$$

Dividendo l'equazione parametrica in Z per r :

$$\frac{Z}{r} = \frac{[N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \operatorname{sen} \varphi}{(N+h) \cdot \cos \varphi} = \frac{(N+h) - e^2 \cdot N}{N+h} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \left(1 - \frac{e^2 \cdot N}{N+h}\right) \cdot \operatorname{tg} \varphi$$



Equazioni parametriche ellissoide

Trascurando in prima approssimazione il valore piccolo:

$\left(1 - \frac{e^2 \cdot N}{N+h}\right)$ si ottiene $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z}{r}$ di prima approssimazione

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad \longrightarrow \quad h = \frac{X}{\cos \varphi \cdot \cos \lambda} - N$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z}{r \cdot \left(1 - \frac{e^2 \cdot N}{N+h}\right)}$$

Il calcolo iterativo di N , h e φ continua fino a quando, posto un intervallo di convergenza ε , accade che:

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h_n - h_{n-1}| < \varepsilon_h$$



SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA

Si riporta qui una soluzione dovuta a Bowring che ha il vantaggio di essere in forma chiusa:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z + e^2 b \sin^3 \theta}{r - e^2 a \cos^3 \theta}$$

$$h = \frac{r}{\cos \varphi} - N$$



Equazioni parametriche ellissoide

dove r è la distanza dall'asse polare, ricavabile da:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$e' \rightarrow$ è la "seconda eccentricità":

$$e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}$$

e θ è un angolo ausiliario fornito da:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Za}{rb}\right)$$



Equazioni parametriche ellissoide

Esempio 1:

Le coordinate geocentriche di un punto nel sistema WGS84 sono le seguenti:

Ellissoide WGS84

$$X = 4523182.126 \text{ m}$$

$$a = 6378137 \text{ m}$$

$$b = 6356752.31$$

$$Y = 896756.782 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00669438$$

$$Z = 4391884.321 \text{ m}$$

$$e'^2 = 0.00673950$$

$$\text{tg} \lambda = \frac{896756.782}{4523182.126} = 0.198257943$$

$$\lambda = 11^\circ.21392680 = 11^\circ 12' 50.1365''$$

$$r = (4523182.126^2 + 896756.782^2)^{1/2} = 4611219.933 \text{ m}$$



Equazioni parametriche ellissoide

$$\tan \theta = \frac{4391884,321 \times 6378137}{4611219,933 \times 6356752} = 0,955638485$$

$$\theta = 43,70053092^\circ$$

$$\tan \varphi = \frac{4391884,321 + (0,00673950 \times 6356752 \times 0,329780553)}{4611219,933 - (0,00669438 \times 6378137 \times 0,377871510)} = 0,958853185$$

$$\varphi = 43,79664683^\circ = 43^\circ 47' 47,9285''$$

$$N = \frac{6378137}{(1 - 0,00669438 \times 0,47900370)^{\frac{1}{2}}} = 6388387,831$$

$$H = \frac{4611219,933}{0,7218007342} - 6388387,831 = 106,548$$

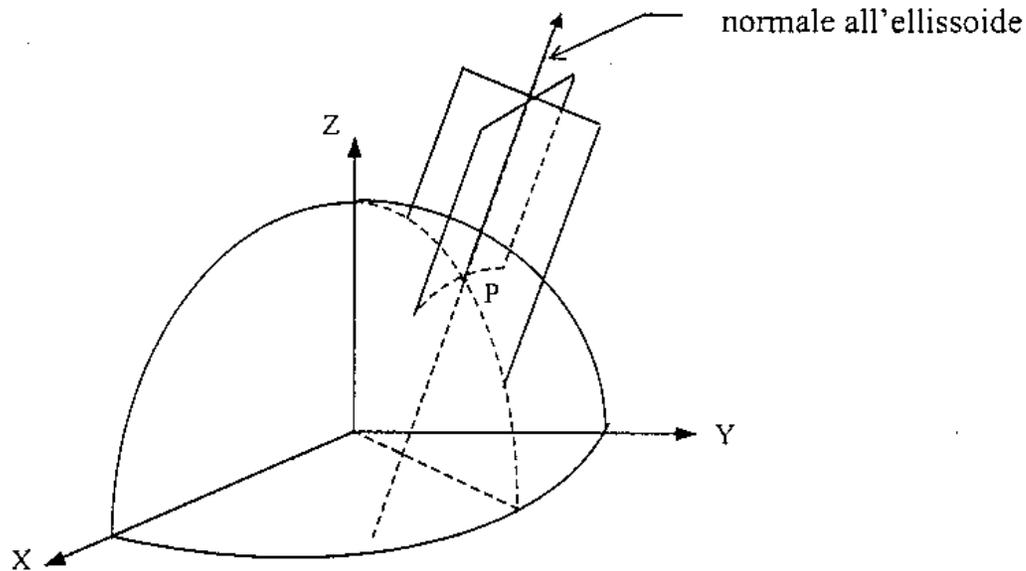
$$\frac{za}{rb} = 0.955638439$$



Raggi di curvatura e sezioni normali

Consideriamo un punto P giacente sull'ellissoide e la sua normale:

- SEZIONE NORMALE** → Linea di intersezione con l'ellissoide dei piani appartenenti al fascio di piani aventi come sostegno la normale in P .
- SEZIONE OBLIQUA** → Tutte le altre intersezioni tra un piano che non contiene la normale e l'ellissoide.



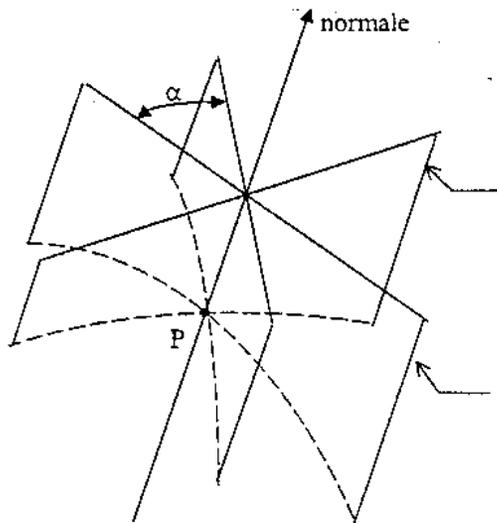


Raggi di curvatura e sezioni normali

Le sezioni normali in P hanno raggio di curvatura variabile a seconda dell'angolo che formano con il piano che definisce la sezione normale MERIDIANO.

SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

- Meridiano per P
- Ortogonale al meridiano per P → piano che contiene la tangente al parallelo per P



piano che definisce la sezione normale principale con raggio di curvatura in P pari a N

piano che definisce il meridiano (sezione normale principale che ha raggio di curvatura in P pari a ρ)

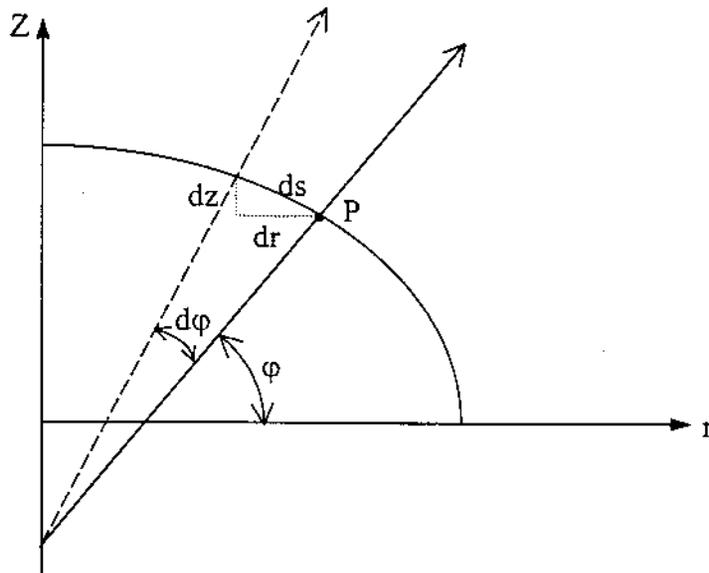
Raggi di curvatura principali

ρ → raggio minimo

N → raggio massimo

Raggi di curvatura e sezioni normali

Determiniamo le espressioni dei raggi principali di curvatura:



L'equazione ricavata in precedenza per le ellissi meridiane è:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

In una curva piana il raggio di curvatura è il limite del rapporto tra un elemento di arco ds e l'angolo compreso fra le normali alla superficie condotte agli estremi del segmento ds (\rightarrow differenza di latitudine).

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{dr^2 + dZ^2}}{d\varphi}$$



Raggi di curvatura e sezioni normali

Deriviamo le equazioni parametriche dell'ellissoide trovate in precedenza:

$$r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad z = \frac{a \cdot \sin \varphi \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad W = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-a \cdot \sin \varphi \cdot W + a \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2W} \cdot 2e^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{W^2}$$

$$= -\frac{a \cdot \sin \varphi \cdot W^2 - a \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot e^2}{W^3}$$

$$= -\frac{a \cdot \sin \varphi - a \cdot \sin^3 \varphi \cdot e^2 - a \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot e^2}{W^3}$$

$$= -\frac{a \cdot \sin \varphi - a \cdot \sin \varphi \cdot e^2 \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{W^3}$$

$$= -\frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{W^3}$$

analogamente

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \cos \varphi}{W^3}$$



Raggi di curvatura e sezioni normali

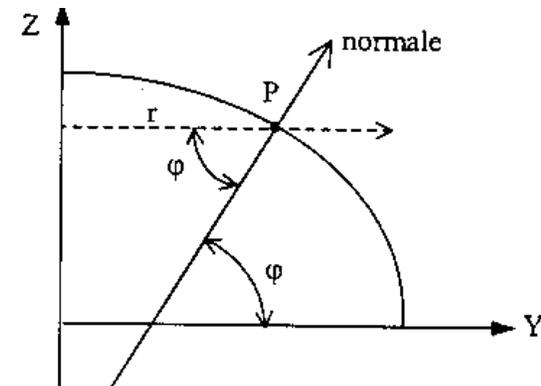
Si ottiene quindi:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot (1-e^2)^2 \cdot \sin^2 \varphi + a^2 \cdot (1-e^2)^2 \cdot \cos^2 \varphi}{W^6}} = \frac{a \cdot (1-e^2)}{W^3}$$

$$\rho = \frac{a \cdot (1-e^2)}{W^3}$$

Teorema di Meusnier:

Il raggio di curvatura in un punto P di sezione obliqua (r) è uguale al raggio di curvatura della sezione normale (N), corrispondente al piano che contiene la tangente in P alla sezione obliqua, moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dai piani delle due sezioni





Raggi di curvatura e sezioni normali

Per il teorema di Meusnier, pensando al parallelo per P come una sezione obliqua, che avrà raggio di curvatura r:

$$r = N \cdot \cos \varphi$$

$$N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a \cdot \cos \varphi}{W} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{a}{W}$$

$$N = \frac{a}{W}$$

Dalle espressioni di ρ e di N otteniamo:

$$\frac{N - \rho}{N} = \left(\frac{a}{W} - \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3} \right) \cdot \frac{W}{a} = \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

- N è sempre maggiore o uguale a ρ
- La differenza è massima all'equatore ($\varphi = 0^\circ$)
- La differenza è minima ai poli ($\varphi = 90^\circ$)
- La differenza fra i due raggi di curvatura è dell'ordine di $e^2 \approx 1/150$



Coordinate geografiche

GEODESIA: SISTEMI DI COORDINATE GEOGRAFICHE

Il sistema di coordinate universalmente adottato è quello delle **coordinate geografiche**, che individuano la posizione di un punto della superficie mediante due valori angolari, che definiscono la direzione della normale alla superficie stessa nel punto considerato.

Se tale normale è quella geoidica, ossia la verticale, si parla comunemente di *coordinate geografiche astronomiche o geoidiche*;

se la normale che si considera è invece quella all'ellissoide si hanno le *coordinate geografiche ellissoidiche*;

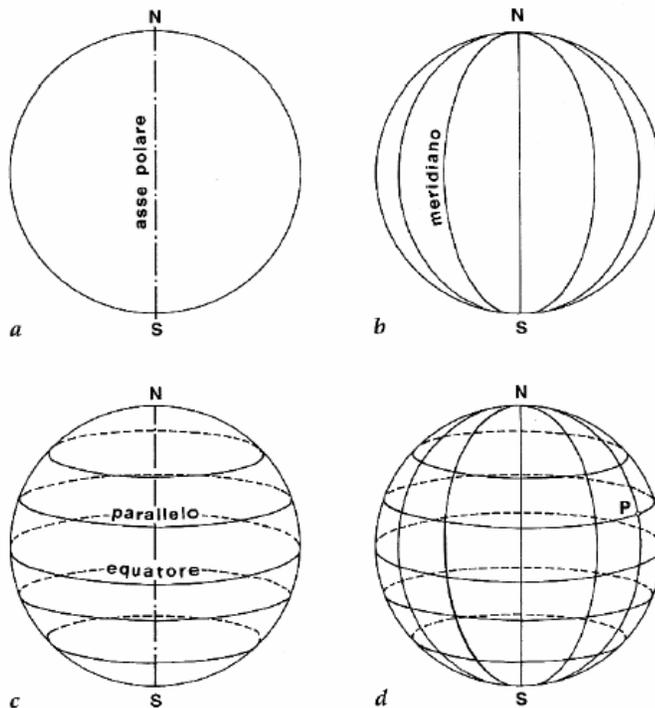
quando non esiste possibilità d'equivoco, generalmente s'intendono queste ultime come coordinate geografiche.

E' opportuno precisare che le **coordinate astronomiche** si determinano mediante misure di astronomia geodetica, legate alla realtà fisica della verticale nel punto e sulle cui modalità operative e di calcolo non possiamo entrare in dettagli.

Le **coordinate ellissoidiche** vengono invece calcolate sulla superficie di riferimento in base a misure di angoli e distanze eseguite, con le modalità che vedremo, sulla superficie fisica della Terra.

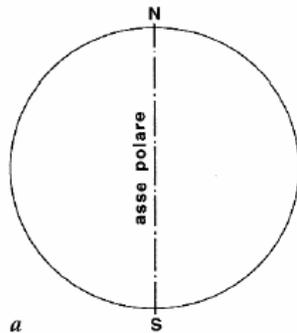
Coordinate geografiche

L'ELLISSOIDE, al contrario del geode è una superficie di rotazione, e la normale ad esso in un punto generico è, contrariamente alla verticale, sempre complanare con l'asse polare.

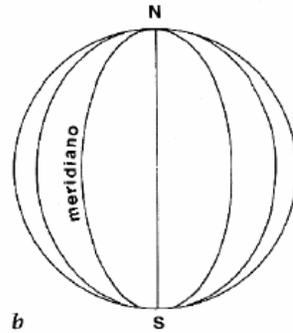


Sezionando l'ellissoide terrestre, prima con un fascio di piani aventi per spigolo lo stesso asse di rotazione poi con un infinito insieme di piani paralleli normali all'asse di rotazione, è possibile istituire sull'ellissoide terrestre due distinte famiglie di curve, denominate rispettivamente meridiani e paralleli, che si intersecano ad angolo retto, suscettibile di assicurare la definizione univoca della posizione geografica dei punti considerati.

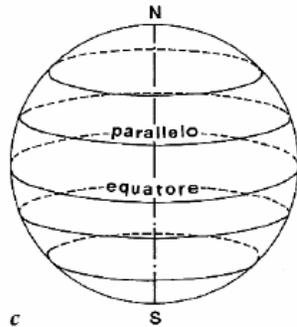
Coordinate geografiche



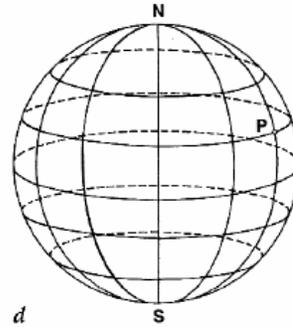
a



b



c



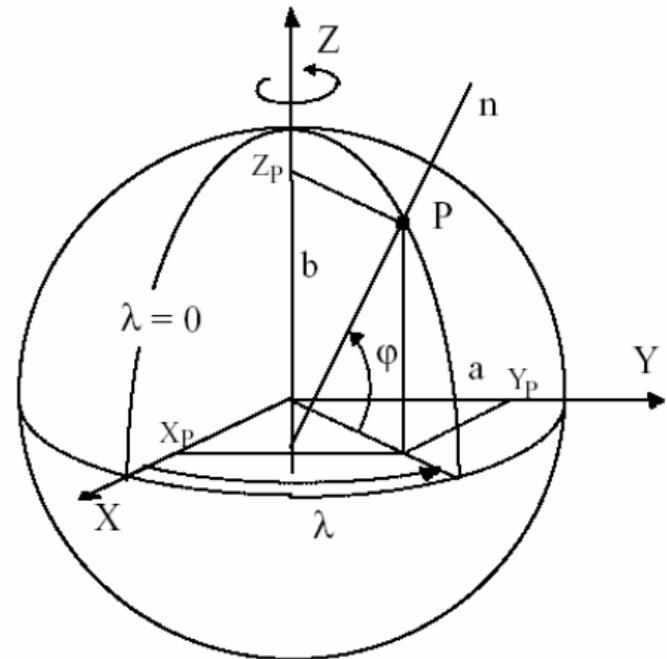
d

Assumiamo come parallelo origine quello relativo all'equatore terrestre, avente il raggio massimo e uguale al semiasse a , e come meridiano origine quello che individua il meridiano di base o fondamentale:

la posizione di un punto P sull'ellissoide terrestre sarà determinata dalla coppia di linee coordinate che si intersecano nello stesso punto P .

Queste due famiglie di curve sono tra loro ortogonali e costituiscono il reticolato geografico che verrà opportunamente trasferito sul piano della carta.

Consideriamo un punto P appartenente all'ellissoide e la normale superficiale ad esso relativa n : questa incontra l'asse polare di rotazione in C che rappresenta il centro di curvatura dell'ellisse meridiana in P .



La posizione del punto P si individua con la misura dell'angolo ϕ che la normale n in P all'ellissoide forma col piano equatoriale, e la misura dell'angolo diedro λ che il piano contenente il meridiano passante per il medesimo punto P forma col piano contenente il meridiano origine.



Coordinate geografiche

Le grandezze φ e λ vengono chiamate coordinate geografiche ellissoidiche:

- φ latitudine geografica ellissoidica del punto P;
- λ longitudine geografica ellissoidica.

E' importante osservare che i parametri φ e λ , *individuano sia la direzione della normale all'ellissoide nel punto sia la posizione del punto per cui essa passa (coordinate curvilinee).*

- L'equatore può essere definito come luogo geometrico dei punti aventi latitudine zero;
- Il meridiano origine o fondamentale può essere definito come luogo geometrico dei punti aventi longitudine zero.

Nel 1884 l'International Meridian Conference (tenutasi a Washington D. C., USA) decise che il meridiano fondamentale dovesse essere quello passante per il Royal Observatory di Greenwich (Londra).



Coordinate geografiche

- **la *latitudine ellissoidica*** φ del punto P si specifica in latitudine nord e latitudine sud a seconda che il punto giaccia nell'emisfero boreale (dall'equatore verso il polo Nord) o australe (dall'equatore verso il polo sud).

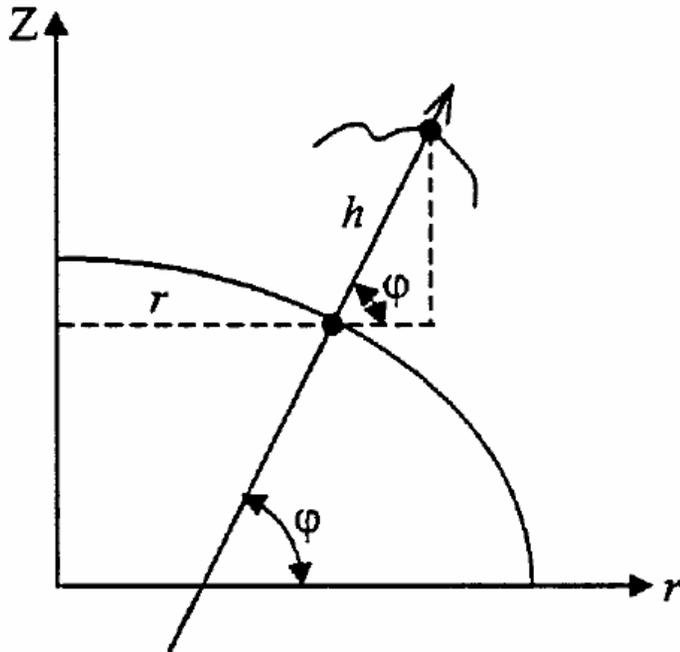
La latitudine φ varia fra 90° Sud ($=-90^\circ$) e 90° Nord ($=+90^\circ$) passando dal polo Sud al polo Nord;

- **la *longitudine ellissoidica*** λ di P si specifica in longitudine est o longitudine ovest a seconda che il punto sia ad est o a ovest del meridiano fondamentale di Greenwich.

I valori di longitudine sono dunque compresi fra 180° Ovest (-180°) e 0° per l'emisfero a ovest di Greenwich e fra 0° e 180° Est ($+180^\circ$) per l'emisfero a est di Greenwich.



Coordinate geografiche



Nel caso che il punto P non appartenga all'ellissoide le sue coordinate geografiche ellissoidiche sono rappresentate dalla terna $(\varphi_e, \lambda_e, h)$ dove h è la quota ellissoidica.



Raggi di curvatura e sezioni normali

La lunghezza di 1° di latitudine geografica varia a seconda della latitudine a cui ci si trova, per effetto dello *schacciamento terrestre*.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\Delta\varphi = 1^\circ$ (in km)	110.57	110.61	110.70	110.85	111.04	111.23	111.41	111.56	111.66	111.69

Tabella: Lunghezza di 1° di latitudine geografica in funzione della latitudine φ (ellissoide WGS84): per carte a grande scala si tratta di una differenza non trascurabile.

La lunghezza di 1° di longitudine geografica varia a seconda della latitudine a cui ci si trova. Questo è dovuto alla cosiddetta "*convergenza dei meridiani*", cioè al fatto che le linee dei meridiani si incontrano ai Poli.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\Delta\lambda = 1^\circ$ (in km)	111.32	109.64	104.65	96.49	85.39	71.70	55.80	38.19	19.39	0.00

Tabella: Lunghezza di 1° di longitudine geografica in funzione della latitudine φ (Ellissoide WGS84).



Raggi di curvatura e sezioni normali

Raggio medio di curvatura

In un punto P, si definisce **raggio medio di curvatura** delle infinite sezioni normali all'ellissoide, la media geometrica tra il raggio minimo e massimo

$$R_m = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{\rho N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}$$

E' un parametro di grande interesse nella semplificazione delle elaborazioni analitiche geodetiche e topo-cartografiche.

Risulta minimo all'equatore ($\varphi=0$) e massimo ai poli ($\varphi=90^\circ$).

Tale raggio R_m può considerarsi come il raggio di una sfera, detta **sfera locale**, tangente l'ellissoide nel punto P e che meglio l'approssima in un intorno di circa 100 km di raggio del punto stesso.

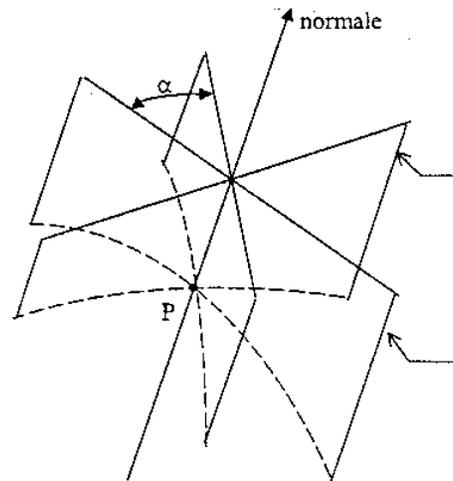


Raggi di curvatura e sezioni normali

Il raggio di curvatura R_α di una sezione normale generica, che forma un angolo α , chiamato AZIMUT, con il meridiano, in funzione del raggio di curvatura minimo ρ e massimo N è dato da:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

Teorema di EULERO

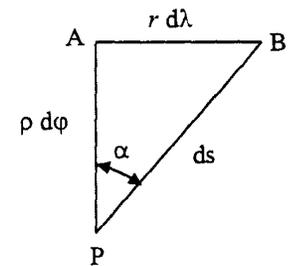
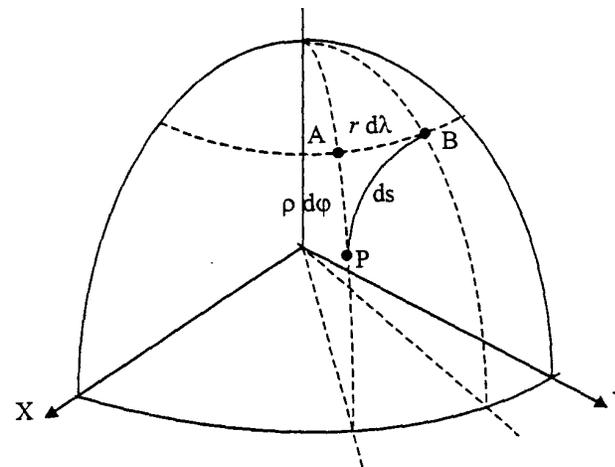
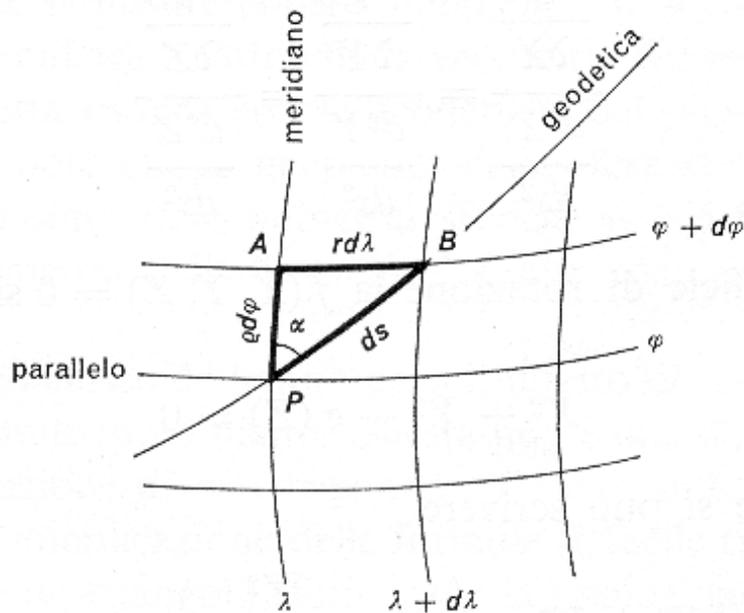


piano che definisce la sezione normale principale con raggio di curvatura in P pari a N

piano che definisce il meridiano (sezione normale principale che ha raggio di curvatura in P pari a ρ)

LUNGHEZZA DI ARCHI FINITI DI PARALLELO E DI MERIDIANO

La determinazione della *lunghezza di archi finiti di parallelo e di meridiano* ha notevole importanza soprattutto in relazione alla determinazione geometrica dei parametri dell'ellissoide terrestre.



Triangolo infinitesimo sull'ellissoide di rotazione

Archi di meridiano e parallelo

La lunghezza di un arco di parallelo di latitudine φ , compreso fra le longitudini λ_1 e λ_2 , si ottiene integrando:

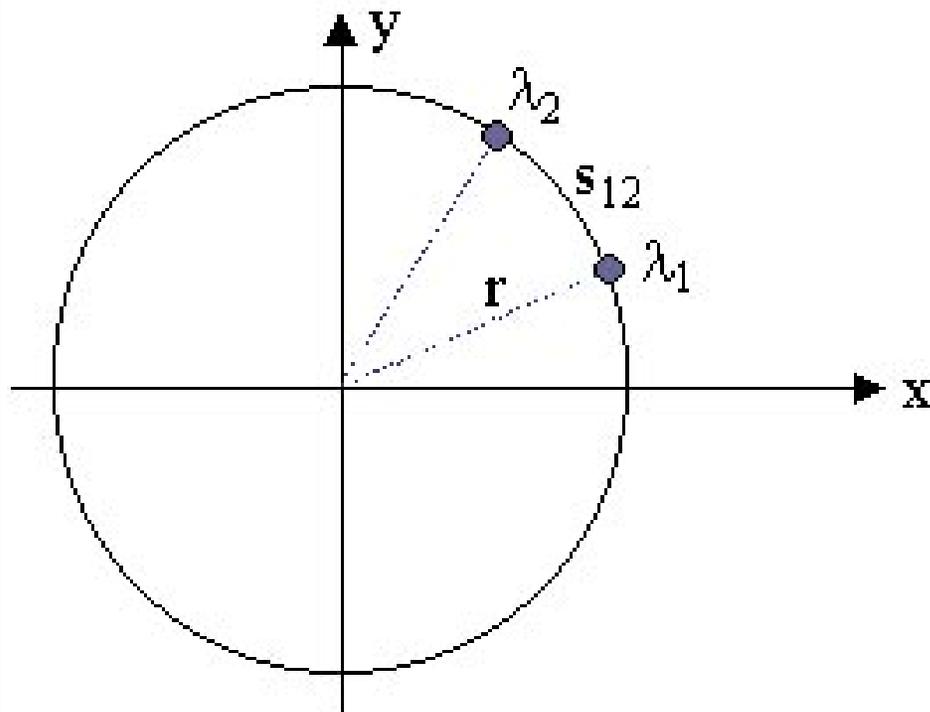
$$l_p = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r d\lambda = r \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Dove:

$r \rightarrow$ raggio del parallelo

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

le longitudini λ_1 e λ_2 vanno espresse in radianti.

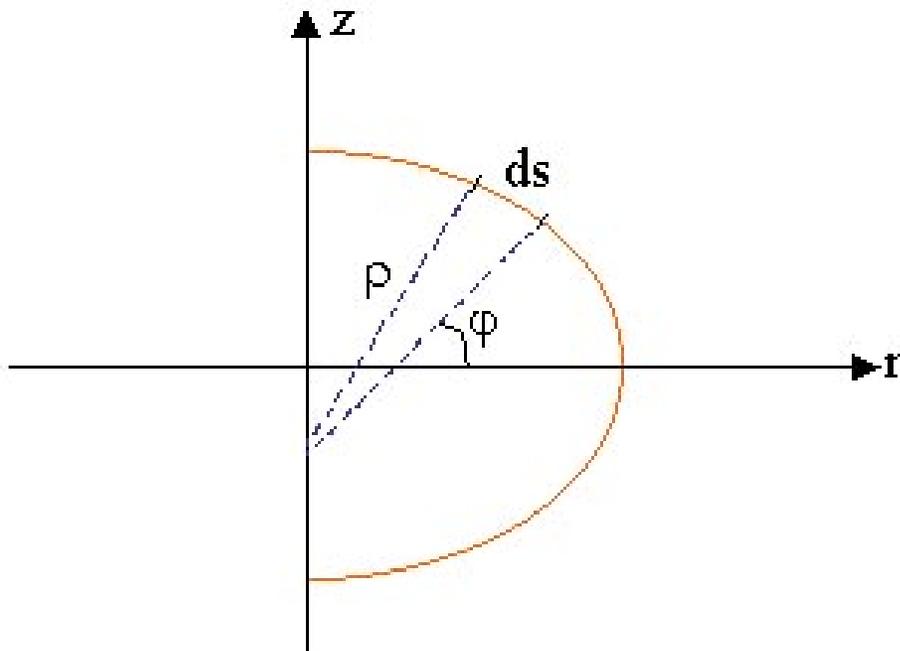




Archi di meridiano e parallelo

Analogamente per il calcolo della **lunghezza dell'arco di meridiano**, integrando tra due valori della latitudine φ_1 e φ_2 :

$$l_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi$$



Dove:

$\rho \rightarrow$ raggio del meridiano

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$



Archi di meridiano e parallelo

L'integrale si può risolvere solo tramite uno sviluppo in serie (Andrae) e si ottiene:

$$\begin{aligned} l_m &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cdot d\varphi \cong \\ &= a \cdot (1 - e^2) \cdot [A(\varphi_2 - \varphi_1) - B(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \\ &+ C(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) - D(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1) + \\ &+ E(\sin 8\varphi_2 - \sin 8\varphi_1) - F(\sin 10\varphi_2 - \sin 10\varphi_1) + \dots] \end{aligned}$$

N.B. → le latitudini φ_1 e φ_2 vanno espresse in radianti.



Archi di meridiano e parallelo

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \dots$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \dots \right)$$

$$C = \frac{1}{4} \left(\frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \dots \right)$$

$$D = \frac{1}{6} \left(\frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \dots \right)$$

$$E = \frac{1}{8} \left(\frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \dots \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \left(\frac{693}{131072}e^{10} + \dots \right)$$



Archi di meridiano e parallelo

Il primo termine dello sviluppo dell'integrale è decisamente importante e dipende dalla differenza delle latitudini; queste vengono misurate con metodi astronomici e quindi riferite alla verticale, mentre lo sviluppo in serie si riferisce alla normale.

Le latitudini misurate quindi risentono della cosiddetta deviazione della verticale.

Se l'arco di meridiano è misurato direttamente, per esempio con lo sviluppo di una base geodetica così come si è fatto dal seicento in poi, le incognite diventano a ed e^2 :

è proprio questa la via percorsa nel secolo XVIII e XIX per calcolare i parametri a e b .

Fu proprio allora che ci si accorse dell'influenza del primo termine, cioè del valore delle latitudini astronomiche anziché ellissoidiche sul calcolo delle incognite.



Archi di meridiano e parallelo

Si cercò di ovviare misurando archi di meridiano qua e là per la terra, a latitudini diverse (spedizioni in Perù, 1735-1737 e poi in Lapponia, 1736-1737 e altre ancora) cercando quindi di rendere accidentale l'errore dovuto alla misura di φ e perciò significativo il valore medio dei parametri così determinati.

Poiché nella misura diretta (per via astronomica) delle coordinate geografiche è possibile raggiungere precisioni dell'ordine di $0'',2$ l'approssimazione del posizionamento planimetrico è dell'ordine di circa 6m, infatti:

$$\left(\frac{0.2}{3600} \frac{\pi}{180} \right) 6370 \cong 0.006 \text{ km} \cong 6 \text{ m}$$

Questa precisione è inadeguata ai fini topografici e non omogenea con quella raggiungibile nella misura delle distanze con i distanziometri elettronici, che è dell'ordine di $10^{-6} \cdot D$, pari a circa $5 \cong 6$ cm per le massime distanze operative di $50 \cong 60$ km.

Da ciò deriva la necessità di definire la posizione planimetrica dei punti attraverso misure di angoli e di distanze procedendo in un secondo tempo al calcolo delle coordinate geografiche dei punti; queste dovranno essere ricavate con approssimazione di 1/1000 di secondo per ottenere la congruenza con la corrispondente precisione della distanza.



ESEMPIO 5:

Calcolo di un arco di parallelo

Si vuole determinare sull'ellissoide Internazionale un arco di parallelo pari a 1" alla latitudine $\varphi_1 = 45^\circ 33' 00''$.

I parametri dell'ellissoide Internazionale sono:

$$a = 6'378'388 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00672267$$

$$l_p = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r d\lambda = r \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) = 1'' = 0.000004848$$

$$\frac{1}{3600}^\circ : x^r = 90^\circ : \frac{\pi}{2}$$



Archi di meridiano e parallelo

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{[1 - e^2 \sin^2 \varphi]}} = \frac{a}{W} \cos \varphi$$

$$\varphi = 45^\circ 33' 00'' = 45^\circ + \frac{33}{60} = 45^\circ,55$$

$$W = \sqrt{[1 - e^2 \sin^2 \varphi]} = 0.998285598$$

$$\frac{1}{W} = 1.001717346$$

$$N = \frac{a}{W} = 6'389'341.899 \text{ m}$$

$$r = 4'474'370.316 \text{ m}$$

$$l_p = 21.692 \text{ m}$$



ESEMPIO 6:

Calcolo di un arco di meridiano

Si vuole determinare sull'ellissoide Internazionale un arco di meridiano pari a 1" compreso tra le latitudini:

$$\varphi_1 = 45^\circ 33' 00''$$

$$\varphi_2 = 45^\circ 33' 01''$$

I parametri dell'ellissoide Internazionale sono:

$$a = 6'378'388 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00672267$$

$$l_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi$$



Archi di meridiano e parallelo

$$l_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \cong$$
$$\cong a \cdot (1 - e^2) \cdot A(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \dots = 1.0050739888$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = 1'' = 0.000004848^r$$

$$l_m = 30.870 \text{ m}$$



Esempi di coordinate geografiche

E
s
e
m
p
i

$$\lambda_{\text{Torino}} = 7^{\circ}.42 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Torino}} = 45^{\circ},4 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Trieste}} = 13^{\circ}.46 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Trieste}} = 45^{\circ},39 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Milano}} = 9^{\circ}.12 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Milano}} = 45^{\circ},28 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Bologna}} = 11^{\circ}.20 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Bologna}} = 43^{\circ},30 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Firenze}} = 11^{\circ}.16 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Firenze}} = 44^{\circ},46 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Genova}} = 8^{\circ}.55 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Genova}} = 44^{\circ},25 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Pisa}} = 10^{\circ}.24 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Pisa}} = 43^{\circ}.43 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Roma}} = 12^{\circ}.41 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Roma}} = 41^{\circ}.48 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Napoli}} = 14^{\circ}.15 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Napoli}} = 40^{\circ}.21 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Reggio Calabria}} = 15^{\circ}.39 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Reggio Calabria}} = 38^{\circ}.6 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Palermo}} = 13^{\circ}.22 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Palermo}} = 37^{\circ}.7 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{Cagliari}} = 9^{\circ}.6 \text{ E}$$

$$\varphi_{\text{Cagliari}} = 39^{\circ}.13 \text{ N}$$



Angoli e distanze sull'ellissoide

Definizione di distanze e angoli sulla superficie ellissoidica di riferimento

- *Poiché tra due punti di una superficie curva possono essere tracciate linee di natura geometrica diversa occorre definire quale tra queste ha la proprietà di rappresentare la distanza misurabile fra due punti;*
- *se due di tali linee escono da un punto O si definirà come angolo fra queste l'angolo che le tangenti alle linee nel punto O formano fra loro.*

Definizione di distanza

Si può dimostrare che sulla superficie di riferimento, la linea che congiunge due punti, non troppo distanti tra loro, e che possiede le proprietà di una distanza (è unica e rappresenta il percorso di minima lunghezza) è **la geodetica**.



Angoli e distanze sull'ellissoide

Le geodetiche godono della seguente proprietà:

la linea geodetica è quella particolare linea della superficie che gode della proprietà di avere la normale principale in ogni suo punto coincidente con la normale alla superficie in quel punto.

- Le *geodetiche dell'ellissoide* sono linee gobbe, non sono cioè contenute in un piano e il loro raggio di curvatura in un punto viene valutato mediante il Teorema di Eulero:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

- Le *geodetiche della superficie sferica*, sono archi di circonferenza massima.

In questo caso i punti vengono congiunti da archi di circonferenza massima e le misure da fare per individuarne la posizione relativa sono le lunghezze di archi di circonferenza massima e angoli fra circonferenze massime;

- Le *geodetiche del piano*, sono rette (qualsiasi altra curva del piano ha la normale principale giacente sul piano stesso), ed in questo caso si misurano lunghezze di segmenti di retta ed angoli fra rette.



Angoli e distanze sull'ellissoide

Il fatto che le geodetiche sull'ellissoide siano linee gobbe *non è una difficoltà dal punto di vista della costituzione di una trigonometria ellissoidica*, perfettamente definibile a parte la complicazione delle formule (è facile risolvere un triangolo piano ed anche un triangolo sferico, ma la risoluzione di un triangolo sull'ellissoide i cui lati siano geodetiche ellissoidiche comporta l'uso di formule molto complesse).

E' una complessità dal punto di vista delle misure, in quanto è intuibile che può essere facile, ad esempio, misurare la lunghezza di una linea contenuta in un piano ma non altrettanto facile misurare la lunghezza di una linea gobba, non fosse altro per i problemi che sorgerebbero per individuarla.



Le sezioni normali sono geodetiche? → Dipende

COMPORTAMENTO DELLE SEZIONI NORMALI

Soffermiamoci sul comportamento delle sezioni normali sull'ellissoide in relazione alle analoghe sezioni tracciate sulla sfera e sul piano.

Sfera

Su di una sfera si prendano in considerazione due diversi punti A e B ed il piano normale in A passante per B:

è facile constatare che questo piano normale interseca la sfera medesima secondo un arco di cerchio massimo coincidente con quello intersecato dal piano normale in B che passa per A.

Infatti, le due normali condotte alla sfera nei punti A e B, entrambe incidenti nel centro C della stessa sfera, risultano fra loro complanari e l'arco di cerchio massimo intersecato sulla sfera dal piano che le contiene definisce una ed una sola sezione normale.

SULLA SFERA LE SEZIONI NORMALI SONO GEODETICHE



Piano

Analoga constatazione può essere fatta allorché si prendano in considerazione due distinti punti A e B disposti sopra un piano.

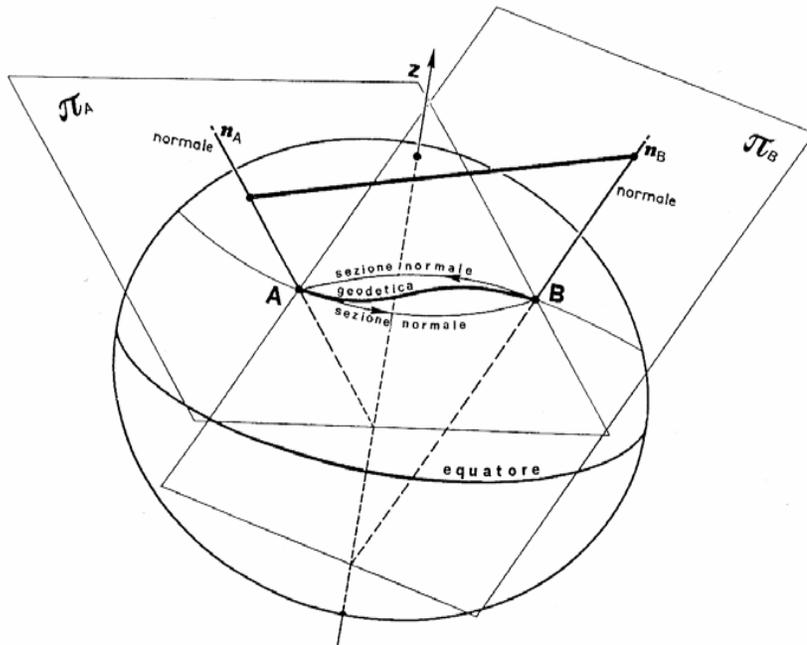
Infatti conducendo per il primo punto A il piano normale contenente B, esso intersecherà il piano che li contiene lungo una retta coincidente con l'intersezione determinata, sullo stesso piano dato, dal piano normale condotto per il secondo punto B e contenente il primo punto A.

Tale circostanza è evidentemente dovuta al parallelismo delle due normali al piano dato per i punti A e B, che con questo definiscono un'unica sezione normale.

SUL PIANO LE SEZIONI NORMALI SONO GEODETICHE

Ellissoide

Infine, prendendo in considerazione l'ellissoide di rotazione si constata invece come questa coincidenza venga a mancare, poiché le normali condotte per differenti punti della superficie, pur intersecando tutte l'asse di rotazione, non risultano sempre incidere in uno stesso punto.



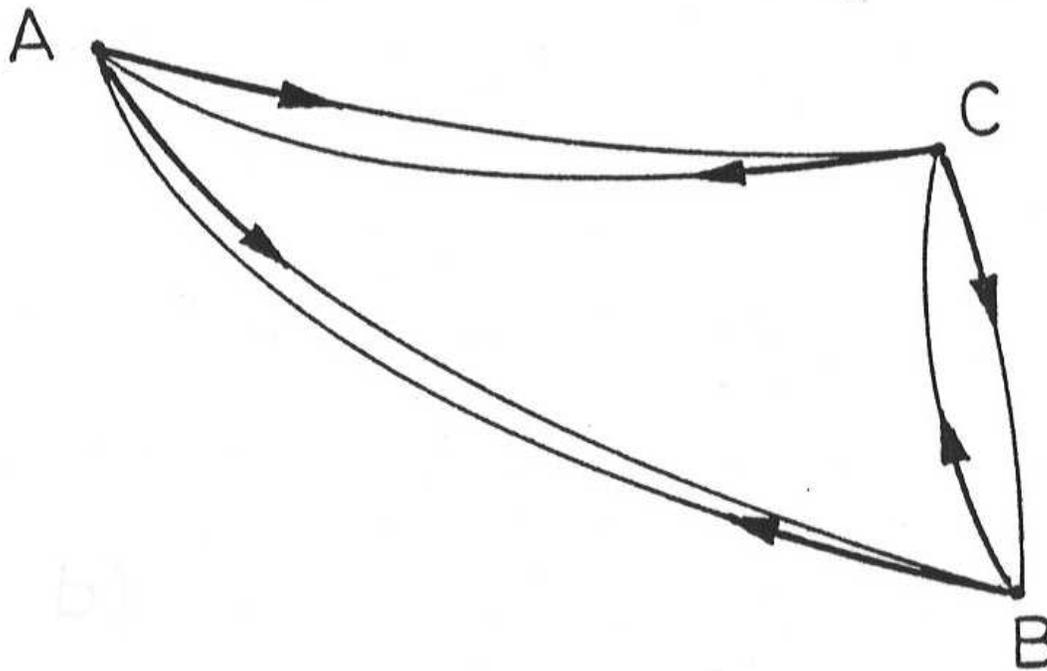
Per cui, presi sull'ellissoide di rotazione due distinti punti A e B, si consideri la sezione normale prodotta dal piano che contiene la normale in A ed il punto B, questa sezione differisce dalla sezione normale reciproca prodotta dal piano che contiene la normale in B e il punto A.

IN GENERALE SULL'ELLISSOIDE LE SEZIONI NORMALI NON SONO GEODETICHE

Angoli e distanze sull'ellissoide

Ad esempio la duplicità delle sezioni normali non consente di ricorrere a tali linee per definire in modo univoco i triangoli ellissoidici:

infatti dati tre punti esistono in genere sei sezioni normali che li congiungono a due a due.



Sezioni normali reciproche per tre punti



Angoli e distanze sull'ellissoide

Fanno eccezione i soli casi in cui i due distinti punti A e B giacciono o sullo stesso piano meridiano o sul parallelo di riferimento, l'equatore:

soltanto in questi due casi le normali per A e per B risultano infatti tra loro complanari.

Esaminando con maggior attenzione questa circostanza, si può evidenziare che gli scostamenti tra le due sezioni normali reciproche sono funzioni crescenti dell'eccentricità e dell'ellisse meridiana generatrice dell'ellissoide di rotazione, per cui si può concludere che più ci si allontana dalla forma sferica, più sensibile risulta lo sdoppiamento delle sezioni normali reciproche.

Da un punto di vista teorico quindi, dati due punti A e B, le sezioni normali sull'ellissoide non sono determinate in maniera univoca e non possono per questo definire la distanza da un punto all'altro.



Angoli e distanze sull'ellissoide

EQUAZIONI DELLE GEODETICHE

In generale, data una superficie $\Phi(x,y,z)=0$, i coseni direttori della normale alla superficie valgono:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{con} \quad N = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}$$

Considerando una linea appartenente alla superficie, data in forma parametrica $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, i coseni direttori della normale a tale linea sono:

$$R \cdot \frac{d^2x}{ds^2}; R \cdot \frac{d^2y}{ds^2}; R \cdot \frac{d^2z}{ds^2}$$

Imponendo la coincidenza delle due normali:

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

Da cui ad esempio:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = 0$$



Angoli e distanze sull'ellissoide

Nel nostro caso la superficie descritta da Φ è l'ellissoide di rotazione. Riscriviamone l'equazione:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \rightarrow X^2 + Y^2 + \frac{a^2}{c^2} \cdot Z^2 - a^2 = 0 \rightarrow X^2 + Y^2 - \left(a^2 - \frac{a^2}{c^2} \cdot Z^2 \right) = 0$$

sapendo che $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{1 - e^2}$

$$\Phi(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - \left(a^2 - \frac{Z^2}{1 - e^2} \right) = 0$$

Risulta quindi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y$$

Sostituendo nell'equazione trovata in precedenza:

$$x \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} - y \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \rightarrow \frac{d}{ds} \left(x \cdot \frac{dy}{ds} - y \cdot \frac{dx}{ds} \right) = 0 \rightarrow x \cdot \frac{dy}{ds} - y \cdot \frac{dx}{ds} = \text{cost.}$$



Angoli e distanze sull'ellissoide

Si sono viste le equazioni parametriche dell'ellissoide:

$$X = x(s) = r \cdot \cos\lambda$$

$$Y = y(s) = r \cdot \sin\lambda$$

da cui:
$$\frac{dX}{ds} = -r \cdot \sin\lambda \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \cos\lambda \cdot \frac{dr}{ds} = -Y \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \cos\lambda \cdot \frac{dr}{ds}$$

$$\frac{dY}{ds} = r \cdot \cos\lambda \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \sin\lambda \cdot \frac{dr}{ds} = X \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \sin\lambda \cdot \frac{dr}{ds}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$X \cdot \frac{dY}{ds} - Y \cdot \frac{dX}{ds} = \text{cost}$$

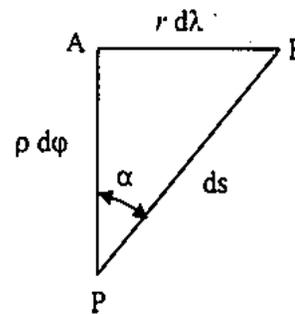
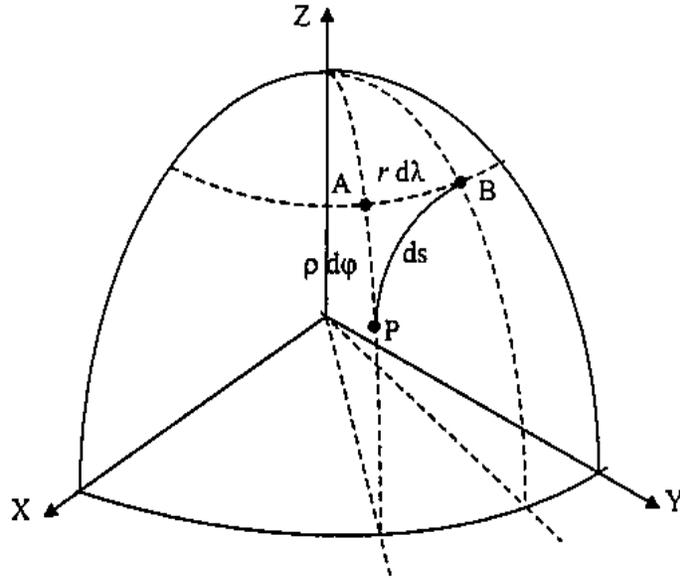
$$X \cdot \frac{d\lambda}{ds} + X \cdot \sin\lambda \cdot \frac{dr}{ds} + Y^2 \cdot \frac{d\lambda}{ds} - Y \cdot \cos\lambda \cdot \frac{dr}{ds} = \text{cost}$$

$$(X^2 + Y^2) \cdot \frac{d\lambda}{ds} + (X \cdot \sin\lambda - Y \cdot \cos\lambda) \cdot \frac{dr}{ds} = \text{cost}$$

$$r^2 \cdot \frac{d\lambda}{ds} + (r \cdot \cos\lambda \cdot \sin\lambda - r \cdot \sin\lambda \cdot \cos\lambda) \cdot \frac{dr}{ds} = \text{cost}$$



Angoli e distanze sull'ellissoide



$$r^2 \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \text{cost}$$

Un triangolo infinitesimo ABP sull'ellissoide può essere considerato piano.

Se α è l'azimut della geodetica PB, si ha:

$$r \cdot d\lambda = ds \cdot \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin\alpha}{r}$$



$$r \cdot \sin\alpha = \text{cost}$$

**TEOREMA
di
CLAIRAUT**

Sulle superfici di rotazione è costante, per ogni punto di una geodetica, il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'azimut della geodetica.



Angoli e distanze sull'ellissoide

La costante è tipica per ogni geodetica e viene chiamata **COSTANTE di CLAIRAUT**.

Le linee geodetiche di una superficie di rotazione sono definibili con semplicità.

Se da un punto P esce una geodetica con $\alpha = 50\text{gon}$ (NE), l'azimut cresce man mano che la geodetica si allontana dal punto, in quanto il raggio del parallelo diminuisce.

Se P ha latitudine φ , il raggio di curvatura della sezione normale di azimut α è espresso dal teorema di Eulero. Il valore R_α rappresenta anche il raggio di curvatura della geodetica, che in P ha un azimut pari ad α



Angoli e distanze sull'ellissoide

ESEMPIO 7:

Sull'ellissoide di Hayford si consideri la geodetica uscente con azimut $\alpha=60^\circ$ da un punto di latitudine 43° . Calcolare l'azimut della geodetica in P' di latitudine $\varphi=44^\circ$ e P'' con $\varphi=45^\circ$.

	φ	$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$	$r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{W}$
P	43°	0.9984353459	4672168.001
P'	44°	0.9983766693	4595688.673
P''	45°	0.9983179178	4517800.72

Per il teorema di Clairaut: $r \cdot \sin \alpha = \text{cost}$

$$4672168.001 \cdot \sin 60^\circ = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \text{cost} = 4046216.18$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{\text{cost}}{r_\varphi}$$

$$P' \rightarrow \alpha = 61.69517^\circ$$

$$P'' \rightarrow \alpha = 63.58771^\circ$$



Angoli e distanze sull'ellissoide

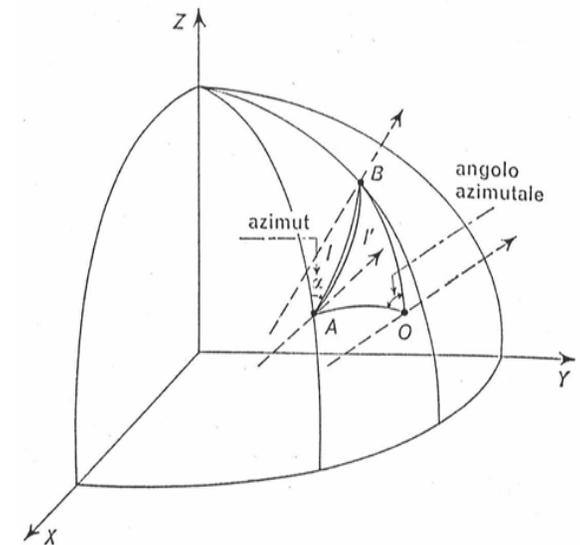
Definizione di angolo azimutale e azimut

Angolo azimutale

Considerati tre punti A, B, O sulla superficie di riferimento, l'angolo azimutale AOB tra le geodetiche OA e OB è l'angolo formato dalle tangenti in O alle due linee.

Azimut

Considerati due punti A e B sulla superficie di riferimento, l'azimut di B rispetto a A è l'angolo che la tangente alla geodetica AB forma con la tangente, diretta verso nord, al meridiano in A . Tale angolo viene definito come azimut della geodetica, è computato a partire dal meridiano in senso orario e può assumere valori compresi tra 0 e 2π .





Teoremi geodesia operativa

La geometria sulla superficie di riferimento (ellissoide) si può costruire considerando figure geometriche i cui lati siano archi di geodetiche ellissoidiche.

Si mettono in evidenza le difficoltà di misurare rigorosamente la lunghezza di un arco di geodetica come pure di misurare l'angolo fra due geodetiche (angolo fra le tangenti alle geodetiche uscenti da un punto).

E' opportuno dunque definire le misure che un geodeta o un topografo possono eseguire.

Come conseguenza della posizione fatta di assumere come superficie di riferimento l'ellissoide le misure di angoli e distanze andrebbero eseguite con riferimento alla *normale* all'ellissoide

Ma le misure che si possono eseguire sulla superficie fisica fanno riferimento alla verticale, cioè alla normale al geoide, conseguenza del fatto che gli strumenti di misura hanno assi che si possono con facilità e precisione orientare rispetto alla *verticale*, ad esempio mediante l'utilizzo di una livella.



Teoremi geodesia operativa

Gli angoli che si misurano sono quindi sempre riferiti al geoide per cui, stante le differenti direzioni della normale al geoide e della normale all'ellissoide, equivalgono teoricamente ad angoli tra sezioni oblique su quest'ultimo.

Questa incongruenza si può teoricamente e volendo anche praticamente superare apportando delle correzioni.

Ma è da tenere presente che **le incertezze**, *che inevitabilmente accompagnano i risultati delle misure sia angolari sia di distanza, determinano, per conseguenza, incertezze nella posizione ellissoidica dei punti. Queste incertezze potrebbero risultare dello stesso ordine di grandezza delle correzioni che si dovrebbero apportare alle misure per riferirle al geoide.*



Teoremi geodesia operativa

La sostanza di quanto sopra costituisce l'essenza dei ***teoremi della geodesia operativa***:

qualunque misura di azimuth, angolo o distanza eseguita con i mezzi attualmente a disposizione dei geodeti e dei topografi sulla superficie fisica, può ritenersi eseguita con riferimento ad archi di geodetica sulla superficie di riferimento.

- **1° teorema**

Per lunghezze fino a circa 200 Km posso confondere angoli tra linee geodetiche con angoli tra le corrispondenti sezioni normali

- **2° teorema**

Per lunghezze fino a 200 Km posso confondere la lunghezza della geodetica con le lunghezze delle corrispondenti sezioni normali



Teoremi geodesia operativa

Pertanto tale incongruenza viene accettata e si procede nell'ipotesi che si misurano angoli e distanze con riferimento al geoide, ma i risultati delle misure si reputano uguali a quelli che si sarebbero ottenuti effettuando le misure con riferimento all'ellissoide.

Inoltre, si misurano lunghezze di archi di sezioni normali e angoli fra sezioni normali, tra l'altro non unicamente definite, mentre si dovrebbero misurare lunghezze di archi di geodetica ed angoli fra le tangenti alle geodetiche.



Sviluppi Puiseux-Weingarten

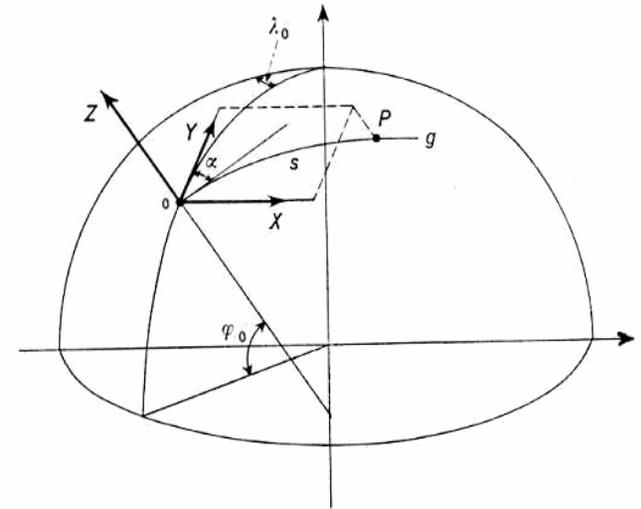
Al riguardo gli sviluppi di Puiseux-Weingarten forniscono la possibilità di valutare:

1. *La differenza fra la lunghezza dell'arco di sezione normale e la lunghezza dell'arco di geodetica*
2. *La differenza di azimuth fra sezioni normali e geodetiche*
3. *L'approssimazione conseguibile nella determinazione delle coordinate dei punti, allorché vengano nell'ordine presi in considerazione: l'ellissoide di rotazione, la sfera e il piano, al variare della latitudine φ_0 , della lunghezza s e dell'azimut α della geodetica.*

Introduciamo un sistema di riferimento euleriano con l'asse Z coincidente con la normale all'ellissoide in O, l'asse Y coincidente con la tangente al meridiano in O e diretto verso Nord e l'asse X coincidente con la tangente al parallelo in O e diretto verso Est.

Le formule di **Puiseux-Weingarten** servono allo studio delle proprietà di curvatura della geodetica e nella soluzione dei problemi della **GEODESIA OPERATIVA**.

Tali sviluppi esprimono le coordinate nel sistema euleriano di un punto P_{ell} (x, y, z) dell'ellissoide, in funzione dell'arco s di geodetica, compreso tra l'origine O della terna euleriana e P, e dell'azimut α di tale geodetica nell'origine del riferimento euleriano (*coordinate geodetiche polari del punto P* (s, α)).



$$\begin{cases} x_{P_{ell}} = s \cdot \operatorname{sena} \alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho_o N_o} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_o}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_o} \right) \right] \\ y_{P_{ell}} = s \cdot \operatorname{cosa} \alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho_o N_o} \left(1 - \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi_o}{1 - e^2} \right) \right] \\ z_{P_{ell}} = -\frac{s^2}{2R_g} \end{cases}$$



1. Differenza tra archi di geodetica e archi di sezione normale

Per quanto riguarda la *differenza tra archi di geodetica s e archi di sezioni normali s'* , assumendo la lunghezza dell'arco di geodetica $s=1000$ km si può calcolare che *la differenza fra la lunghezza dell'arco di sezione normale e la lunghezza dell'arco di geodetica non supera il centimetro, ovvero l'errore relativo è dell'ordine di 10^{-8}* .

$$\frac{s'-s}{s} = \frac{1}{360} \cdot \frac{s^4}{N^2 R_a^2} \cdot \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right)^2 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \cos^4 \varphi$$

Poiché *i metodi di misura della distanza utilizzati non consentono di raggiungere precisioni superiori a $10^{-6} \div 10^{-7}$* è perfettamente giustificato ritenere che *misure eseguite secondo archi di sezione normale diano gli stessi risultati delle misure eseguite secondo archi di geodetica.*



2. Differenza tra i due azimut

La differenza di azimut fra sezioni normali (A) e geodetiche (α), considerando il caso in cui tale differenza è massima, e cioè all'equatore e a parità di lunghezza dell'arco s di geodetica (circa 300 km), è dell'ordine del centesimo di secondo sessagesimale ($0.03''$).

$$A - \alpha = \frac{s^2}{12 \cdot N \cdot R_\alpha} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \varphi$$

Tale differenza è nulla ai poli (dove geodetiche, sezioni normali e meridiani - che sono geodetiche- coincidono).

Se si tiene conto che la precisione di misura degli angoli raggiunge al massimo qualche decimo di secondo sessagesimale ($0,1'' \div 0,2''$),

$$\text{ossia in radianti a } 5 \times 10^{-7} \rightarrow 0.1'' \cdot \frac{\pi}{3600} \cdot \frac{1}{180},$$

e che non è possibile, per effetto della curvatura terrestre, effettuare misure fra punti distanti più di 200 km, si può concludere che una *misura di azimut*, anche se effettuata con riferimento a una sezione normale può sempre considerarsi riferita a una geodetica.



Quindi tutto ciò porta a concludere che una misura di azimuth riferita ad una sezione normale dell'ellissoide può di fatto considerarsi uguale a quella relativa alla geodetica corrispondente.

In altre parole: gli angoli tra due sezioni normali e tra due geodetiche possono considerarsi uguali nei limiti di precisione degli attuali strumenti di misura .

Differenza tra i due angoli azimutali

Analoga conclusione si può trarre per la *misura degli angoli azimutali* dato che per un angolo azimutale, considerato come differenza tra due azimuth, si potrebbero avere al massimo discrepanze doppie rispetto a quelle appena messe in evidenza.



3. Approssimazione conseguibile nella determinazione delle coordinate dei punti, allorché vengano nell'ordine presi in considerazione: l'ellissoide di rotazione, la sfera e il piano

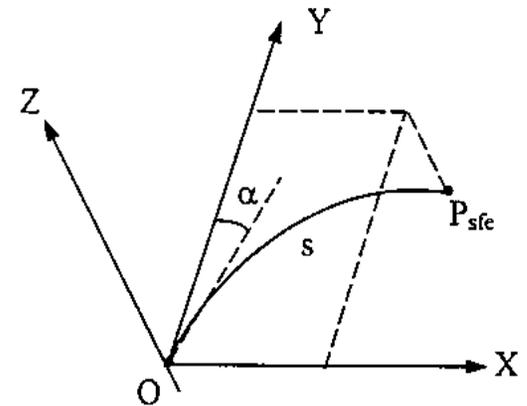
SUPERFICIE SFERICA

Scriviamo gli sviluppi di Puiseux-Weingarten per una sfera di raggio $R = \sqrt{\rho \cdot N}$, tangente all'ellissoide nel punto O. Consideriamo la stessa terna euleriana OXYZ e un punto P_{sfe} della sfera avente le stesse coordinate s ed α del punto P_{ell} dell'ellissoide.

Sulla sfera di raggio R si ha:

$$\rho = N = R_\alpha = R \quad e \quad e^2 = 0$$

$$\begin{cases} X_{P_{sfe}} = s \cdot \sin\alpha \cdot \left[1 - \frac{s^2}{6 \cdot R^2} \right] = s \cdot \sin\alpha \cdot \left(1 - \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot N} \right) \\ Y_{P_{sfe}} = s \cdot \cos\alpha \cdot \left[1 - \frac{s^2}{6R^2} \right] = s \cdot \cos\alpha \cdot \left(1 - \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot N} \right) \\ Z_{P_{sfe}} = -\frac{s^2}{2 \cdot R} = -\frac{s^2}{2 \cdot \sqrt{\rho \cdot N}} \end{cases}$$

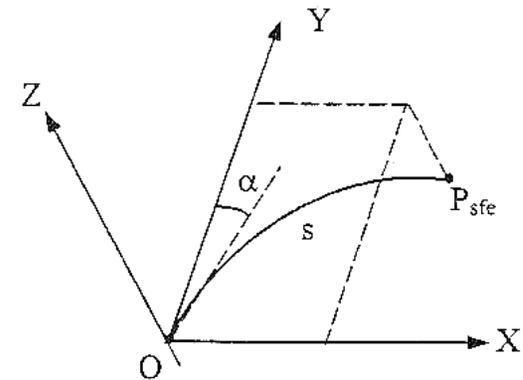
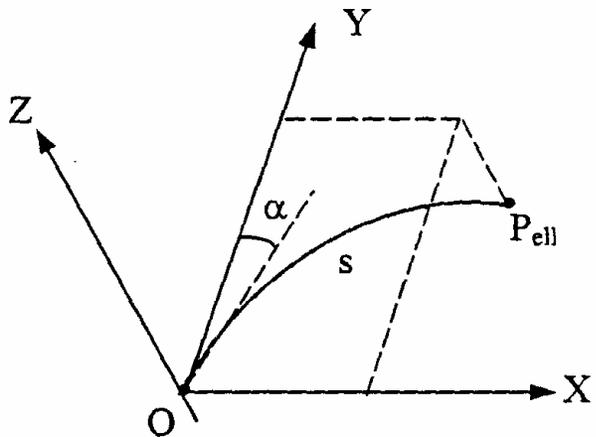




Sviluppi Puiseux-Weingarten

L'errore che si commette considerando il punto P proiettato sulla sfera di raggio R anziché sull'ellissoide si ottiene dalla differenza delle coordinate euleriane nelle due ipotesi:

$$\begin{cases} X_{P_{sfe}} - X_{P_{ell}} = -s \cdot \sin\alpha \cdot \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot N} \cdot \frac{e^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\varphi}{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi} \\ Y_{P_{sfe}} - Y_{P_{ell}} = s \cdot \cos\alpha \cdot \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot N} \cdot \frac{e^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi}{1 - e^2} \\ Z_{P_{sfe}} - Z_{P_{ell}} = \frac{s^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\rho \cdot N}} \right) \end{cases}$$





Sviluppi Puiseux-Weingarten

Le differenze (gli errori) fra le coordinate X_{Psfe} ed Y_{Psfe} e le coordinate X_{Pell} ed Y_{Pell} (quelle che rappresentano la posizione planimetrica del punto Q) risulteranno massime per $\varphi=0$ e $\alpha=0$ o $\alpha=\pi/2$.

s (in km)	50	100	150	200
errore planimetrico assoluto $\Delta x = \Delta y$ (in mm)	3.47	27.74	93.62	226.35
errore planimetrico relativo $\Delta x/s = \Delta y/s$	0.07×10^{-6}	0.28×10^{-6}	0.62×10^{-6}	1.13×10^{-6}

Scostamenti planimetrici tra ellissoide e sfera locale

Considerando $s=100$ km tali differenze non superano i 28 mm.

Se si tiene presente che nella misura delle distanze si può raggiungere, e limitatamente a qualche decina di chilometri, un precisione relativa di 10^{-6} ($\pm 1\text{mm}/1\text{km}$), tali differenze risultano decisamente inferiori alle incertezze di posizione derivanti dalle misure di distanza.



Sviluppi Puiseux-Weingarten

Mediante le formule di **Puiseux-Weingarten** è possibile evidenziare che, *nei limiti delle approssimazioni fornite dalle operazioni di misura delle distanze e degli angoli, e solo per il posizionamento planimetrico, appare lecito confondere la superficie ellissoidica con una superficie sferica di identica curvatura totale, applicabile in un punto P, per un intorno di circa **100 km** dallo stesso punto.*

La regione entro cui può verificarsi la sostituibilità dell'ellissoide di rotazione con la **sfera locale** di raggio:

$$R = \sqrt{\rho N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \varphi}$$

prende il nome di **campo geodetico** e all'interno di questo campo figure ellissoidiche possono essere risolte con la trigonometria sferica.

Nell'ambito del campo geodetico, si potranno sostituire alle figure ellissoidiche le corrispondenti figure sferiche, aventi uguali elementi angolari e lineari, e queste ultime potranno essere risolte con la trigonometria sferica .



Sviluppi Puiseux-Weingarten

Per quanto riguarda *le quote* il discorso è diverso

$$Z_{Psfe} - Z_{Pell} = \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{R_g} - \frac{1}{\sqrt{\rho N}} \right) \cong \frac{e^2}{4} \frac{s^2}{\sqrt{\rho N}} \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\alpha$$

Questa differenza si annulla ai poli (dove tutti i raggi di curvatura sono uguali) e assume i valori massimi, in dipendenza del valore di α , all'equatore.

Per $\varphi=45^\circ$, la differenza $Z_{Psfe} - Z_{Pell}$ in funzione della distanza s assume i valori assoluti massimi in corrispondenza di $\alpha=0^\circ$ ed $\alpha=90^\circ$ riassunti nella seguente tabella:

s (in km)	1	10	20	50	100
$ Z_{Psfe} - Z_{Pell} $	0,13 mm	1,3 cm	5,4 cm	0,33 m	1,3 m

Scostamenti altimetrici tra ellissoide e sfera locale



Sviluppi Puiseux-Weingarten

Per $\varphi = 0^\circ$, cioè all'equatore, la differenza $Z_{Psfe} - Z_{Pell}$ risulta massima:

s (in km)	1	10	20	50	100
$ Z_{Psfe} - Z_{Pell} $ cm	0.03	2.66	10.63	66.43	265.72

Scostamenti altimetrici tra ellissoide e sfera locale

Tenuto conto della precisione dei dislivelli ottenuti con la *livellazione trigonometrica*, la sfera locale può essere assunta come superficie di riferimento nell'intorno di un punto quando la distanza s tra i punti di cui si calcola il dislivello non eccede i $15 \div 20$ km.

Nella livellazione geometrica:

si leggono:

- i metri
 - i decimetri
 - i millimetri
- >

con stadia graduata al centimetro:
si stimano i decimi

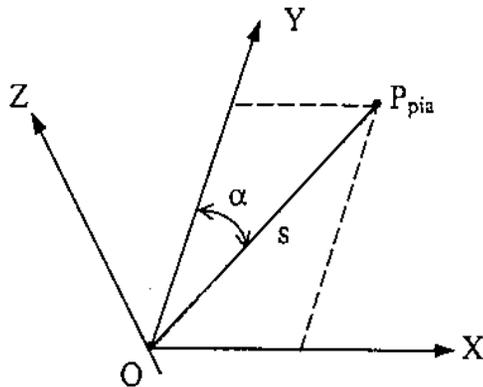
con stadia graduata al mezzo centimetro:
si leggono i decimi e si stimano i centesimi



SUPERFICIE PIANA

Consideriamo sempre la stessa terna euleriana ed un punto P_{pia} appartenente al piano XY ed avente le stesse coordinate s ed α del punto P_{ell} dell'ellissoide.

Riscriviamo gli sviluppi di Puiseux-Weingarten tenendo conto che il raggio di curvatura del piano è infinito e l'eccentricità nulla:



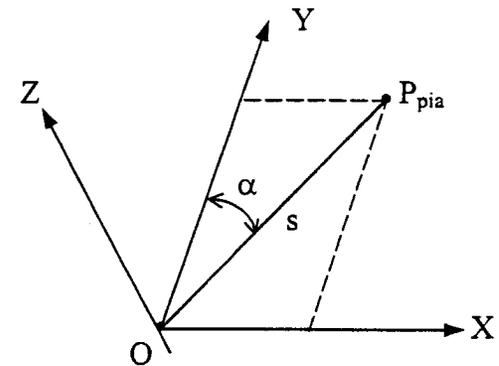
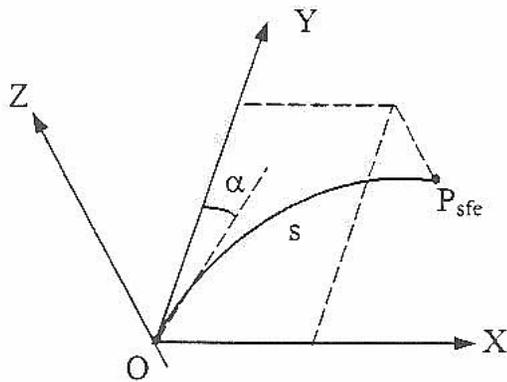
$$\begin{cases} X_{P_{pia}} = s \cdot \sin\alpha \\ Y_{P_{pia}} = s \cdot \cos\alpha \\ Z_{P_{pia}} = 0 \end{cases}$$

Gli errori che si commettono rispetto all'ipotesi di lavorare nel campo geodetico sono:

$$\begin{cases} X_{P_{pia}} - X_{P_{sfe}} = s \cdot \sin \alpha \cdot \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot N} \\ Y_{P_{pia}} - Y_{P_{sfe}} = s \cdot \cos \alpha \cdot \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot N} \\ Z_{P_{pia}} - Z_{P_{sfe}} = \frac{s^2}{2 \cdot \sqrt{\rho \cdot N}} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{W}$$



Le differenze (gli errori) fra le coordinate $X_{P_{pia}}$ ed Y_{pia} e le coordinate $X_{P_{sfe}}$ ed $Y_{P_{sfe}}$ (che rappresentano la posizione planimetrica del punto Q) risulteranno massime per $\varphi=0$, cui corrispondono i valori minimi dei vari raggi di curvatura, e per $\alpha=0^\circ$ o 90° gradi.



Sviluppi Puiseux-Weingarten

s (in km)	1	10	15	30	50
errore planimetrico assoluto $\Delta x = \Delta y$ (in mm)	0.004	4	14	112	519
errore planimetrico relativo $\Delta x/s = \Delta y/s$	0.004×10^{-6}	0.4×10^{-6}	0.9×10^{-6}	3.7×10^{-6}	10.4×10^{-6}

Scostamenti planimetrici tra sfera locale e piano tangente

Siccome la precisione massima di distanziometri EDM è dell'ordine di 1×10^{-6} , discende quindi che la differenza tra le due coordinate può essere trascurata a tutti gli effetti in una zona di 15 km di raggio nell'intorno dell'origine e in tale intorno si potrà assumere, agli effetti del solo rilievo planimetrico, come superficie di riferimento il piano tangente all'ellissoide nel punto stesso, utilizzando le note formule della trigonometria piana.



Sviluppi Puiseux-Weingarten

Le **formule di Puiseux-Weingarten** evidenziano inoltre che, nei limiti delle approssimazioni fornite dalle operazioni di misura delle distanze e degli angoli, *appare lecito confondere la superficie sferica con il suo piano tangente* (e quindi è lecito sostituire ad una data figura sferica la sua proiezione sul piano tangente) *in una porzione di superficie compresa in un raggio di 15 km circa intorno al punto considerato.*

La regione entro cui può verificarsi la sostituibilità dell'ellissoide di rotazione con il piano tangente ai fini del solo rilievo planimetrico prende il nome di ***campo topografico***.

Logicamente, riducendo la delimitazione dell'area operativa a quella propria del campo topografico, le varie elaborazioni di calcolo risulteranno tutte ulteriormente semplificate, riducendosi all'applicazione delle relazioni della trigonometria piana.

Per l'altimetria non si può definire un campo topografico, poiché l'errore che si commetterebbe sarebbe sempre maggiore dell'incertezza strumentale.

Occorre tenere conto della curvatura della superficie di riferimento.



Sviluppi Puiseux-Weingarten

$$Z_{Ppia} - Z_{Psfe} = \frac{s^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho N}}$$

s [km]	0.1	0.5	1	5	10	15
Z _{Ppia} -Z _{Psfe} [mm]	0.8	20	80	2000	7800	17757

Scostamenti altimetrici tra sfera locale e piano tangente

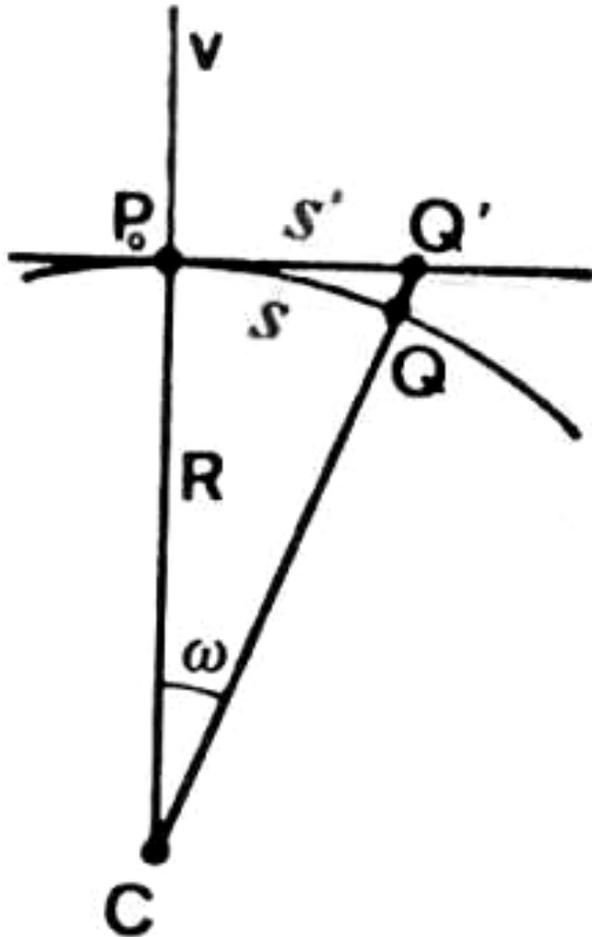
Dalla tabella si constata che:

- già a 300 ÷ 350 m dal punto di stazione, l'errore di sfericità nel dislivello è dell'ordine di 10 mm, paragonabile alla sensibilità del metodo di misura dei dislivelli della livellazione trigonometrica;
- poiché si possono misurare, con livellazione geometrica di alta precisione, differenze di quota tra punti distanti 100 m con la precisione del decimo di millimetro (0,1 mm), si constata che a tale distanza lo scostamento in direzione dell'asse z fra sfera e piano tangente e quindi la differenza Δz , è dell'ordine di 0.8 mm, e quindi l'ipotesi piana del campo topografico per la determinazione delle differenze di quota non è lecita.



Influenza della sfericità

Influenza della sfericità nella misura delle distanze e dei dislivelli in campo topografico



Influenza della sfericità nella misura delle distanze in campo topografico

Si consideri il piano tangente alla sfera locale in P_o .

La differenza Δs tra la distanza $s = P_o Q$ e la distanza $s' = P_o Q'$ (con Q' proiezione di Q sul piano tangente) vale:

$$\begin{aligned}\Delta s &= s' - s = \\ &= R \tan \omega - R \omega = R(\tan \omega - \omega)\end{aligned}$$

Sviluppando $\tan\omega$ in serie e trascurando i termini del 5° ordine e superiori si ottiene, ricordando che $s = \omega R$:

$$\Delta s = R\left(\omega + \frac{2\omega^3}{6} - \omega\right) = R\frac{\omega^3}{3} = \frac{s^3}{3R^2}$$

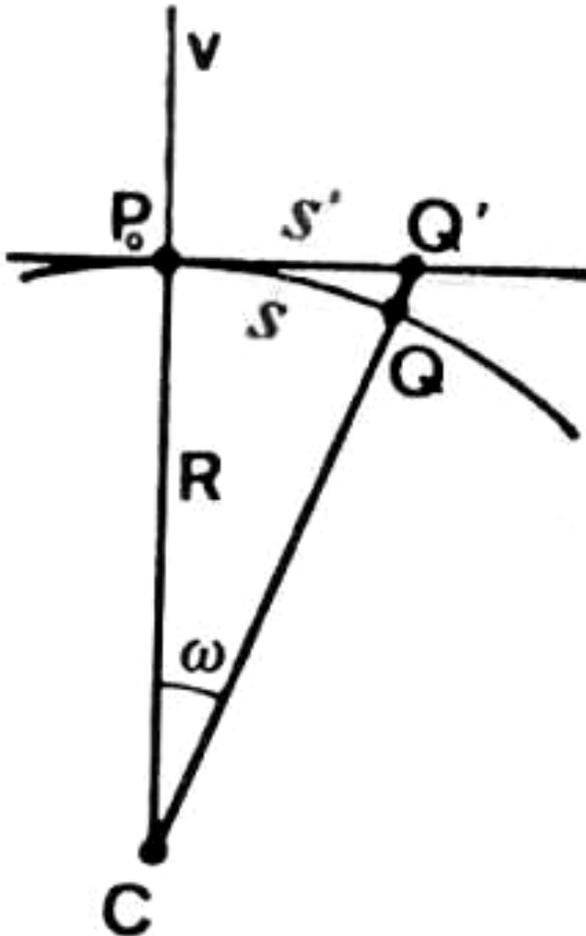
Il rapporto:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{s^2}{3R^2}$$

rappresenta l'errore relativo che si commette nel sostituire s con s' .

Ricavando s si ottiene:

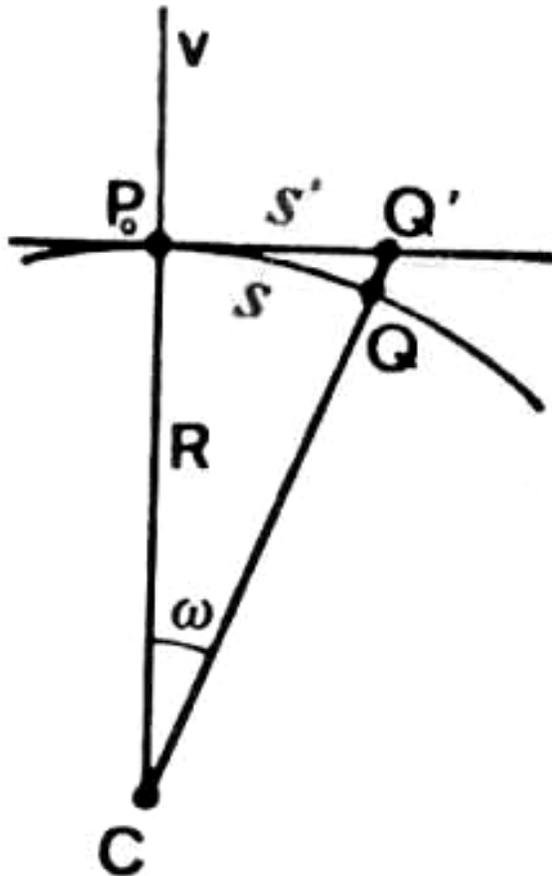
$$s = R\sqrt{3\frac{\Delta s}{s}}$$





Influenza della sfericità

Assegnando a $\Delta s/s$ il valore della precisione della misura ed assegnando ad R il valore massimo 6378 km si ricava il massimo valore di s , cioè della distanza entro la quale si può lavorare sul piano tangente.



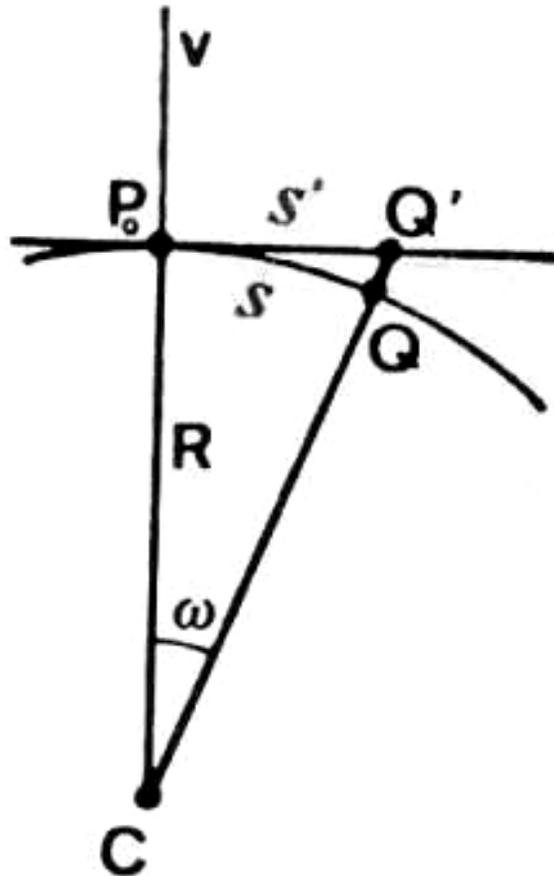
Per esempio, con $\frac{\Delta s}{s} = 2 \cdot 10^{-6}$

si ottiene $s = 15,6 \text{ km}$

Influenza della sfericità nella misura dei dislivelli in campo topografico

Il problema *per le quote*, anche in questo caso, si pone in modo diverso.

Si noti che il sostituire Q con Q' significa commettere un errore:



$$\begin{aligned}\Delta Q &= CQ' - CQ = \\ &= \sqrt{R^2 + s^2} - R = R\left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{R^2}} - 1\right)\end{aligned}$$

In cui è stato sostituito s' con s in quanto ci si riferisce al campo topografico.



Influenza della sfericità

Sviluppando in serie il radicale e trascurando il termine $s^4/8R^4$ e quelli di ordine superiore, in quanto molto piccoli, si ottiene:

$$\Delta Q = R \left(1 + \frac{s^2}{2R^2} - 1 \right) = \frac{s^2}{2R}$$

Tale grandezza, sempre positiva, viene detta *correzione di sfericità* ed assume i seguenti valori:

s (km)	0,1	0,5	1,0	5,0	10,0
ΔQ (m)	0,0008 m	0,02 m	0,08 m	2,0 m	7,8 m

Poiché si possono misurare differenze di quota tra punti distanti 100 m con livellazione geometrica di alta precisione, con la lettura diretta del decimo di mm e la stima del centesimo di mm, si può constatare che se si richiede questo ordine di precisione *non è mai lecito sostituire il piano tangente nelle misure delle quote.*



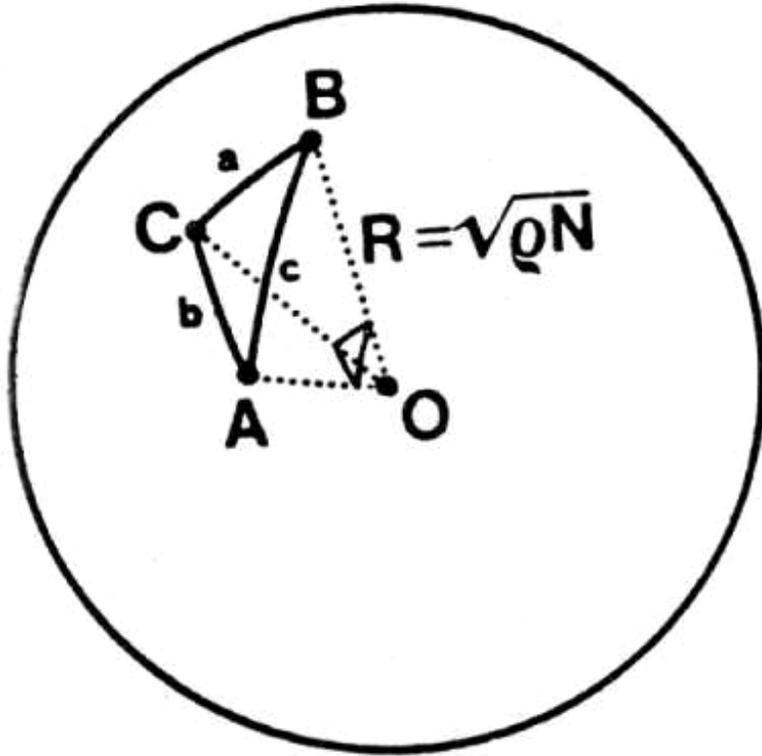
RISOLUZIONE DI TRIANGOLI SFERICI. TEOREMA DI LEGENDRE

Sia dato un triangolo sferico i cui lati l siano una piccola frazione del raggio R della sfera di appartenenza e si assuma la quantità l/R come quantità piccola del primo ordine (10^{-2}).

Commettendo un errore dell'ordine di $(l/R)^4 \cong (10^{-8})$ gli angoli del triangolo piano, che ha i lati della stessa lunghezza dei lati del triangolo sferico, si possono derivare dagli angoli del triangolo sferico, sottraendo ad ognuno di essi un terzo dell'eccesso sferico:

in quest'ordine di approssimazione i due triangoli sono equivalenti

Triangoli sferici



Il Teorema di Legendre ci dice che un triangolo sferico, di lati a , b e c ed angoli α , β e γ , contenuto nel campo geodetico può essere, ai fini del calcolo, considerato come un triangolo piano avente i lati uguali a quelli del triangolo sferico rettificati e gli angoli pari a quelli del triangolo sferico diminuiti ognuno di un terzo dell'eccesso sferico.

La geometria sferica ci insegna che la somma dei tre angoli α , β e γ è superiore a π di una quantità, che denoteremo con 3ε , chiamata *eccesso sferico*:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + 3\varepsilon$$

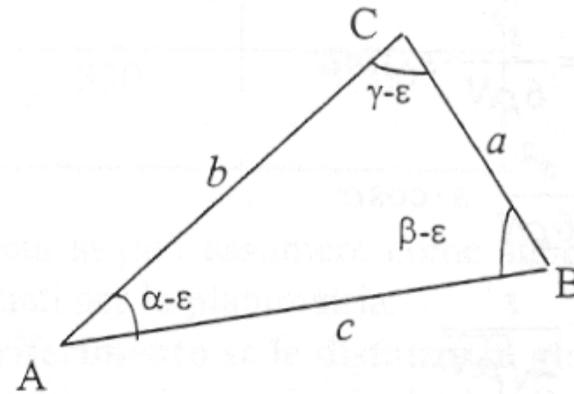
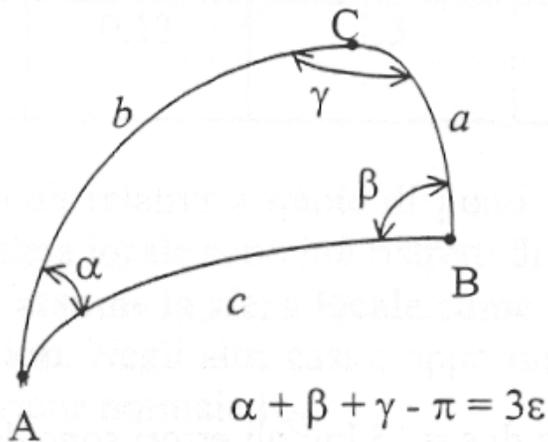


Triangoli sferici

L'eccesso sferico, per il **Teorema di Cavalieri**, è pari al rapporto fra l'area del triangolo ed il quadrato del raggio della sfera locale:

$$3\varepsilon = \frac{S}{R^2}$$

dove S indica l'area del triangolo ed R è il raggio della sfera.





ESEMPIO 8:

Di un triangolo sferico A, B, C si conoscono gli archi di geodetica
 $AC=37956.090\text{m}$

$AB=89709.516\text{ m}$

e l'angolo in BAC= $28^{\circ}45'42.820''$

Si calcolino gli elementi geometrici mancanti sapendo che:

$\varphi_A=43^{\circ}00'00.000''$

$\lambda_A=11^{\circ}52'07.479''$

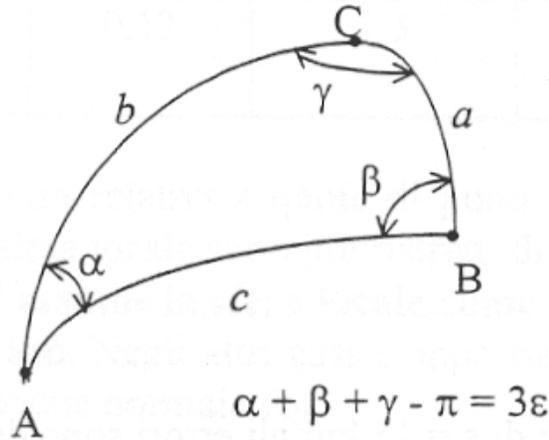
Ed i parametri dell'ellissoide Internazionale o di Hayford sono:

$a=6378388\text{ m}$

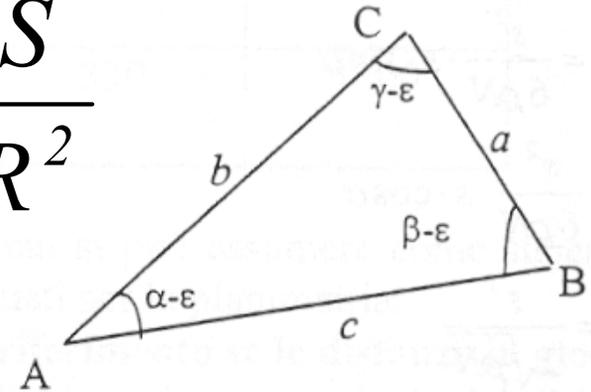
$e^2=0.006722670$



Triangoli sferici



$$3\varepsilon = \frac{S}{R^2}$$



$$\alpha = 28^\circ 45' 42.820'' = 45^\circ + \frac{45}{60} + \frac{42.820}{3600} = 28.76189444$$

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \alpha}{2} = 819'198'630.9 \text{ m}^2$$

Si calcola il raggio della sfera locale in A:

$$R = \sqrt{\rho N}$$



Triangoli sferici

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{W^3} (1-e^2) = \frac{6'378'388}{0.998435346^3} 0.993277330 = 6'365'340.144 \text{ m}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{a}{W} = \frac{6'378'388}{0.998435346} = 6'388'383.609 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{\rho N} = 6'376'851.468 \text{ m}$$

$$3\varepsilon = \frac{S}{R^2} = 0.000020145^r = 0^\circ.001154248$$

$$\varepsilon = 0^\circ.000384749$$

Calcolo degli elementi mancanti del triangolo:

$$\alpha_{\text{piano}} = \alpha_{\text{sfera}} - \varepsilon = 28^\circ 76150969$$



Triangoli sferici

Con il Teorema di Carnot applicato al triangolo piano:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{BC} = 59'317.548(45) \text{ m}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma$$

$$\gamma = \arccos \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}} = 133^\circ.3065171$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}} = 17^\circ.93197321$$

Verificare quanto vale la somma degli angoli del triangolo piano:

$$\alpha + \beta + \lambda = 180^\circ$$



Triangoli sferici

Calcolo degli elementi sulla sfera:

$$\overline{BC} = 59'317.548(45) \text{ m}$$

$$\gamma_{sfera} = \gamma_{piano} + \varepsilon = 133^{\circ}.3069018 = 133^{\circ}18'24.846''$$

$$\beta_{sfera} = \beta_{piano} + \varepsilon = 17^{\circ}.93235796 = 17^{\circ}55'56.489''$$



Esercizio 1 - geodesia

Sull'ellissoide di Hayford si consideri la geodetica uscente con azimut $\alpha=60^\circ$ da un punto di latitudine 43° . Calcolare l'azimut della geodetica in P' di latitudine $\varphi=44^\circ$ e P'' con $\varphi=45^\circ$.

	φ	$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$	$r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{W}$
P	43°	0.9984353459	4672168.001
P'	44°	0.9983766693	4595688.673
P''	45°	0.9983179178	4517800.72

Per il teorema di Clairaut: $r \cdot \sin \alpha = \text{cost}$

$$4672168.001 \cdot \sin 60^\circ = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \text{cost} = 4046216.18$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{\text{cost}}{r_\varphi}$$

$$\begin{aligned} P' &\rightarrow \alpha = 61.69517^\circ \\ P'' &\rightarrow \alpha = 63.58771^\circ \end{aligned}$$



Esercizio 2 - geodesia

Determinare le coordinate cartesiane geocentriche del punto IGM95 105703 – Cascina di coordinate geografiche WGS84:

$$\text{lat } 43^{\circ} 40' 29.524'' \quad \text{lon } 10^{\circ} 34' 01.239'' \quad q_{\text{ell}} 62.04\text{m}$$

$$a_{\text{WGS84}} = 6378137 \quad \alpha_{\text{WGS84}} = 1/298.257223563$$

$$\varphi = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = 43.67486778^{\circ}$$

$$\lambda = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = 10.56701083^{\circ}$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 = 0.006694379992 \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 0.998402515$$

$$N = \frac{a}{W} = 6388342.281\text{m}$$

$$\begin{cases} X = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda = 4542182.681\text{m} \\ Y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda = 847339.830\text{m} \\ Z = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi = 4382077.144\text{m} \end{cases}$$



Esercizio 3 - geodesia

Il vertice IGM di M.te Pagliano (1°ordine) ha coordinate su ROMA40:

$$\begin{aligned} \text{lat } 44^{\circ} 32' 21.594'' \quad \text{lon } -5^{\circ} 00' 11.276'' \\ a_{\text{Hayford}} = 6378388 \quad e^2_{\text{Hayford}} = 0.006722670022 \end{aligned}$$

Calcolare nel punto:

- 1) Raggi principali di curvatura ρ , N.
- 2) Raggio sfera locale R.
- 3) Raggio di curvatura della sezione obliqua di azimut $\alpha=45^{\circ}$ ed inclinata di $\beta=60^{\circ}$ rispetto alla normale.
- 4) Raggio del parallelo

$$\varphi = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = 44.53933167^{\circ}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 0.9983449875$$



Esercizio 3 - geodesia

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3} = 6367068.64 \text{ 6m} \quad N = \frac{a}{W} = 6388342.28 \text{ 1m}$$

$$R = \sqrt{\rho \cdot N} = 6378005.83 \text{ 5m}$$

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad \rightarrow \quad R_\alpha = \frac{\rho \cdot N}{N \cdot \cos^2 \alpha + \rho \cdot \sin^2 \alpha} = 6377996.44 \text{ 1m}$$

$$R_\beta = R_\alpha \cdot \cos \beta = 3188998.22 \text{ 1m}$$

$$r = N \cdot \cos \varphi = 4553854.75 \text{ 2m}$$