



Teoria degli errori

Se si misura più volte la stessa grandezza si hanno risultati diversi specialmente se le misure si fanno con alta precisione.

Se, per esempio, si misura su una carta la distanza fra due punti con il doppio decimetro le determinazioni ottenute fino al decimo di millimetro saranno sempre l'una diversa dall'altra. Se però si vuole un'approssimazione minore (per es. il mm) le varie determinazioni risulteranno coincidenti.

Nascono allora i quesiti:

- 1) Quale valore assumere per una grandezza della quale si sono fatte misure con risultati non coincidenti?
- 2) Quale sarà il grado di precisione da attribuire a tale valore?
- 3) Il sistema di misura sarà accettabile?

A questi quesiti le risposte le dà la teoria degli errori di osservazione, che trova applicazione in tutte le scienze di osservazione, quando si effettuano numerose misure di una grandezza. I risultati sono tanto più accettabili quanto maggiore è il numero delle determinazioni della grandezza in esame.

Gli sviluppi di tale teoria consentono poi di ricavare, per i vari tipi di misura, la precisione che ci si deve attendere nel determinarle e, quindi, la tolleranza accettabile per ciascun tipo di operazioni.



Teoria degli errori

Le misure si classificano in DIRETTE e INDIRETTE. Sia le une che le altre possono essere condizionate.

Sono **DIRETTE** di una grandezza quelle che possono eseguirsi sovrapponendo l'unità di misura alla grandezza da misurare e leggendo direttamente il valore. Per esempio le misure di una lunghezza effettuata mediante l'impiego di un metro.

Sono misure **INDIRETTE** di una grandezza quelle che possono essere ottenute attraverso relazioni analitiche, che legano tra loro altre grandezze misurate direttamente. Per esempio, il dislivello tra due punti può essere ricavato dalla relazione $\Delta AB = D \cot g z$ dove D rappresenta la distanza topografica tra A e B, z l'angolo zenitale. In questo caso, quindi, la misura del dislivello viene ricavata fondamentalmente dalla misura diretta di una distanza e di un angolo.

Le misure vengono poi definite condizionate, quando le grandezze che si determinano debbono sottostare a delle condizioni note. Ad esempio se si misurano gli angoli interni di un poligono di n vertici, le misure effettuate dovranno soddisfare la condizione

$$\sum \alpha_i = (n - 2) \cdot \pi$$



Teoria degli errori

Si definisce **errore assoluto** di una qualunque delle misure effettuate la differenza tra il valore della grandezza ed il valore misurato;
l'errore relativo è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura della grandezza.

Circa la natura degli errori da cui sono affette le misure, diremo che tali errori si suddividono in tre categorie: grossolani, sistematici e accidentali.

Sono **errori grossolani (outlier)** quelli dovuti a qualche svista nell'eseguire le misure come, ad esempio, il contare un numero di unità di misura diverso da quello reale, se per esempio si esegue una determinazione diretta di lunghezza; nel leggere ad una graduazione un valore errato, se si misura un angolo, ecc.

Tali errori non sono temibili quando si effettuino più misure di una grandezza perchè allora si nota subito se fra le misure concordanti ce n'è qualcuna che si discosta notevolmente dalle altre.

Vedremo che lo scostamento massimo di una misura ci verrà fornito dalla disequaglianza di Tchebycheff.



Teoria degli errori

Gli **errori sistematici (bias)** sono quelli dovuti all'impiego di uno strumento o un metodo di misura che faccia sbagliare sempre nello stesso senso. Tali errori hanno dunque segno costante e possono influire anche gravemente sulle misure; in genere operando con accuratezza possono essere individuati e valutati. Si possono quindi correggere le misure o si possono usare gli strumenti con metodi che consentano di eliminare tali errori. Ad esempio, vedremo che nella misura degli angoli orizzontali alcuni errori dovuti a difetti strumentali si possono eliminare effettuando due letture in opportune posizioni dello strumento e facendone la media (letture coniugate).

Gli **errori accidentali** o casuali, sono errori dovuti a cause diverse, indipendenti fra di loro. Tali errori si presentano nelle misure a volte con un segno, a volte col segno opposto, e quasi sempre con valori piuttosto piccoli. Sono generalmente dovuti all'osservatore, agli effetti dell'ambiente, agli strumenti, all'ora di osservazione, ecc. Gli errori accidentali sono inevitabili nelle misure, tuttavia si può ridurre il loro effetto ripetendo più volte la misura di una grandezza e considerando l'errore accidentale come una variabile casuale (aleatoria).

La "teoria degli errori" si occupa esclusivamente degli errori accidentali e fornisce i criteri per elaborare i risultati di più misure della stessa grandezza allo scopo di determinare i limiti entro i quali devono essere contenuti gli errori per poter essere considerati casuali e di calcolare il valore più probabile della grandezza.



Teoria degli errori

Osserviamo che in genere non ha senso parlare di **valore vero** di una grandezza, e si può più convenientemente parlare di **valore istantaneo** e in determinate condizioni, in quanto le grandezze fisiche variano nel tempo per diverse cause, fra le quali la temperatura, la pressione e l'umidità relativa dell'ambiente. Solo in alcuni casi si può definire il valore vero di una grandezza come, ad esempio, quando si tratti della somma dei tre angoli di un triangolo piano (che deve essere eguale a 180°) o della somma degli angoli in giro d'orizzonte attorno ad una stazione (che deve essere un angolo giro).

In mancanza del valore vero, e confortati dal fatto che, se pure le grandezze fisiche sono variabili, le loro variazioni sono generalmente molto piccole e spesso inferiori all'approssimazione dei nostri mezzi di misura, si definisce un **valore più conveniente** (o più attendibile o stima) della grandezza, ricavato dal sistema di misure effettuate, secondo un criterio prestabilito e generalmente accettato.

Il criterio che si accetta per **determinazioni omogenee** (cioè eseguite dallo stesso osservatore, con gli stessi mezzi strumentali, nello stesso tempo, nelle stesse condizioni ambientali, con la stessa accuratezza) è quello di prendere come valore più conveniente della grandezza la media aritmetica delle determinazioni eseguite (**Postulato della media**).



Teoria degli errori

Siano $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i valori ottenuti nell'effettuare n misure di una stessa grandezza X . Si assume come valore più conveniente della grandezza, il numero dato dalla relazione:

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Si chiamano **scarti** (o errori apparenti) v_i le differenze fra i risultati delle determinazioni eseguite ed il valore più conveniente:

$$v_1 = X_1 - X_0, v_2 = X_2 - X_0, \dots, v_n = X_n - X_0$$

Si chiamano **errori veri** x_i le analoghe differenze nel caso in cui della grandezza oggetto di misura si conosca il valore vero:

$$x_1 = X_1 - X, x_2 = X_2 - X, \dots, x_n = X_n - X$$



Teoria degli errori

Se si effettuano numerose misure di una grandezza nota (ad es. somma degli angoli interni di un triangolo) e si calcolano, come ora detto, gli errori veri, si trova sperimentalmente che tali errori soddisfano le seguenti considerazioni:

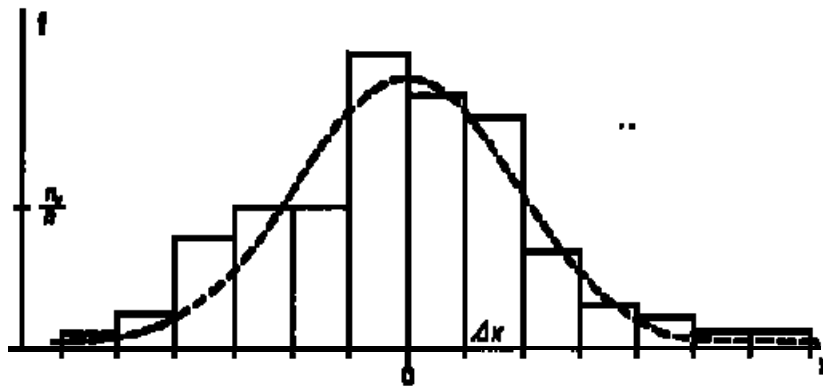
- 1) gli errori positivi si presentano con uguale frequenza di quelli negativi;
- 2) gli errori piccoli sono più frequenti di quelli grandi (gli errori si addensano intorno allo zero, cioè se si considerano due intervalli di eguale ampiezza uno prossimo allo zero e l'altro più discosto, nel primo cade un numero maggiore di errori);
- 3) gli errori sono sempre compresi entro due determinati limiti.

Se si distribuiscono gli errori su un asse delle ascisse, si divide l'intervallo totale in cui essi cadono in tanti intervalli uguali Δx e si calcolala la frequenza $f = n_i/n$ (numero n_i degli errori che cadono nell'intervallo diviso per il numero totale n degli errori) dell'errore in ciascun intervallo si troveranno numeri decrescenti man mano che ci si allontana dall'origine.

Riportiamo su ogni intervallo Δx un rettangolo con ordinata y tale che sia:

$$y_i \cdot dx = n_i / n$$

cioe tale che l'area del rettangolo risulti eguale alla frequenza dell'errore in quell'intervallo, in una scala prefissata; si otterrà un diagramma del tipo di quello disegnato. L'area di tale diagramma è uguale a 1 in quanto si ha:



$$\sum \frac{n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Se si passa al limite per Δx tendente a zero, nella ipotesi che le osservazioni siano infinitamente numerose e si distribuiscano con continuità sull'asse, il diagramma diventa una curva (curva di frequenza teorica di Gauss, stessa figura), che esprime la legge teorica di distribuzione della frequenza degli errori per un sistema di misure che soddisfi le condizioni sopra enunciate.



L'affidabilità delle misure

Parecchi termini vengono impiegati per esprimere l'affidabilità delle misure.

Tre vocaboli di uso frequente sono precisione, accuratezza e incertezza.

- *La precisione esprime il grado di reciproca vicinanza o conformità di misure ripetute della stessa quantità (descrive la concentrazione di misure ripetute).*

Se le misure ripetute sono molto vicine fra loro, si dice che hanno elevata precisione; se sono disperse, hanno bassa precisione. L'alta precisione in genere riflette l'elevato livello di attenzione e perfezionamento nella strumentazione e nelle procedure seguite per effettuare le misure. La precisione è indicata dalla dispersione o diffusione della distribuzione delle probabilità. Quanto più stretta è la distribuzione, tanto più elevata è la precisione, e viceversa. Un indice comune della precisione è la deviazione standard σ . Quanto maggiore è la precisione, tanto minore è il valore di σ , e viceversa.



L'affidabilità delle misure

- L'accuratezza è il grado di conformità o vicinanza di una misura al valore reale (esprime la distanza fra le misure ed il valore vero).

L'accuratezza comprende non solo gli effetti di errori casuali, ma anche le deviazioni dovute ad errori sistematici non corretti. In assenza di questi ultimi, la deviazione standard può essere usata anche come indicatore dell'accuratezza.

- L'incertezza è l'intervallo all'interno del quale si presume che sia compreso l'errore di una misura.

Un dato livello di probabilità è generalmente associato ad una incertezza. Ad esempio, l'incertezza del 90% rappresenta l'intervallo di valori all'interno del quale è probabile al 90% (vale a dire che la probabilità è 0.90) che ricada l'errore della misura. In generale, se l'incertezza di una misura è nota, dovrebbe essere data insieme al valore misurato.

L'affidabilità delle misure

Una misura ottimale deve essere ovviamente precisa ed accurata, ma capita a volte di effettuare misure precise ma non accurate, oppure accurate ma non precise, oppure anche, nel caso peggiore, non accurate e non precise.

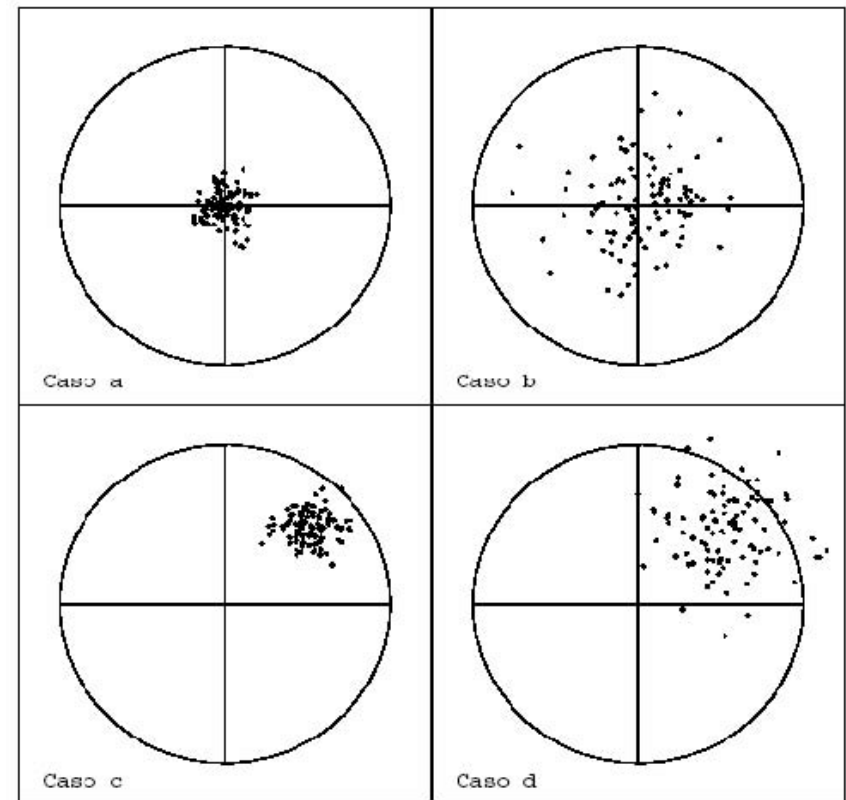
E' abbastanza calzante una analogia fra le misure e gli spari ripetuti di un tiratore a un bersaglio, che potrebbero essere:

vicini gli uni agli altri e concentrati attorno al centro del bersaglio: *misura precisa e accurata* (Caso a);

dispersi attorno al centro del bersaglio: *misura poco precisa ma accurata* (Caso b);

vicini gli uni agli altri e concentrati attorno ad un punto lontano dal centro del bersaglio, magari per una srettifica del mirino: *misura precisa ma non accurata* (Caso c);

dispersi attorno a un punto lontano dal centro del bersaglio: *misura poco precisa e poco accurata* (Caso d)





Problema della stima

Ogni operazione di misura di una grandezza fisica, purchè affetta da soli errori accidentali aventi mediamente lo stesso ordine di grandezza, equivale all'estrazione casuale da una densità di distribuzione normale (o gaussiana).

- STIMA → valore numerico attribuito ad m e σ (caratteristici della distribuzione gaussiana).
- STIMATORE → relazione analitica, funzione di un campione limitato di estrazioni casuali, che definisce la stima

La stima dei parametri della distribuzione normale, in funzione dei valori di un campione estratto a caso, avviene attraverso l'applicazione di principi assiomatici, uno dei quali è quello di

MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

IN GENERALE

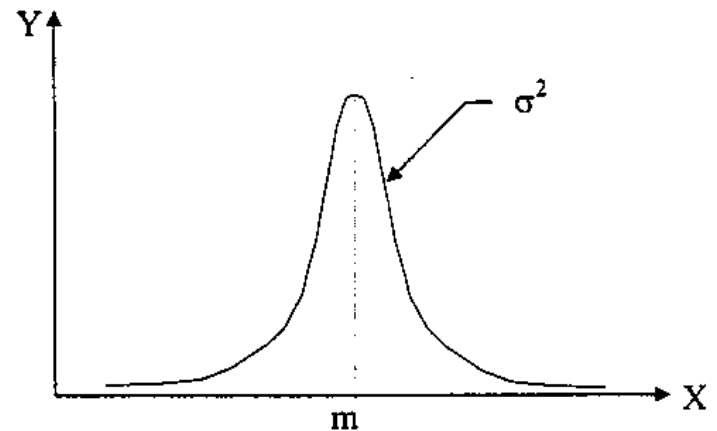
Consideriamo una distribuzione teorica $f(x)$ dipendente da r parametri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$. Consideriamo una n -pla $x_1, x_2, \dots, x_n$ di individui estratti a caso dalla distribuzione teorica. La densità di probabilità di questa distribuzione sarà:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n / \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$$

La probabilità sarà tanto più alta quanto maggiore sarà la verosimiglianza o plausibilità delle stime dei parametri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Applichiamo il principio di massima verosimiglianza alla distribuzione gaussiana, dove i parametri da stimare sono media e varianza.





Problema della stima

La probabilità di estrazione legata al singolo individuo x_i della n -pla di valori estratti a caso $x_1, x_2, \dots, x_n$ dalla distribuzione teorica è:

$$dp_i = f(x_i) dx$$

La probabilità dell'uscita dell'intero campione $x_1, x_2, \dots, x_n$ si ottiene dal teorema delle probabilità composte:

$$dP = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) dx_n$$

La $f(x_i)$, dipendente da media e varianza, per una distribuzione gaussiana è:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$

quindi la probabilità d'uscita dell'intero campione è:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n / m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}$$



Problema della stima

La probabilità è massima quando è minimo l'esponente di e:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \min$$

che per σ^2 costante ci fornisce il

PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \min$$

Quindi, se la $f(x)$ è una distribuzione gaussiana, il principio di massima verosimiglianza conduce al principio dei minimi quadrati e la diretta applicazione di questo principio porta alla determinazione della stima più plausibile del parametro media.



Proprietà degli stimatori

Genericamente il procedimento di stima dei parametri di una distribuzione gaussiana sarà indicato nel seguente modo:

$$\bar{m} = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{\sigma}^2 = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dove h e g rappresentano i generici stimatori.

Le stime generate dagli stimatori devono soddisfare a delle proprietà e devono essere:

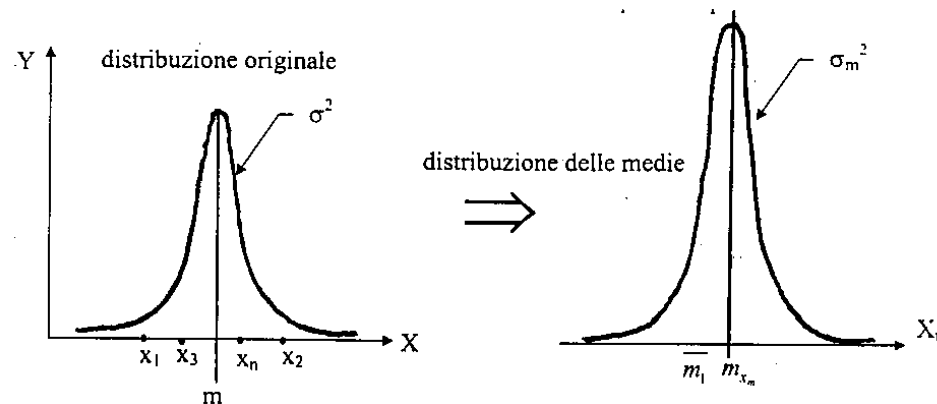
- CONSISTENTI
- NON AFFETTE DA ERRORI SISTEMATICI
- EFFICIENTI

CONSISTENTI:

Una stima si dice consistente se, al tendere all'infinito del numero n di elementi, costituenti il campione utilizzato, tende al valore teorico del parametro stimato.

Ogni stima è una quantità aleatoria, in quanto dipende da un campione aleatorio, quindi ogni funzione degli n valori estratti definisce una popolazione delle stime da campioni di n elementi, ovvero una variabile casuale.

Per le distribuzioni delle stime si potranno definire, analogamente a quanto avviene per una qualsiasi variabile casuale, la media e la varianza.



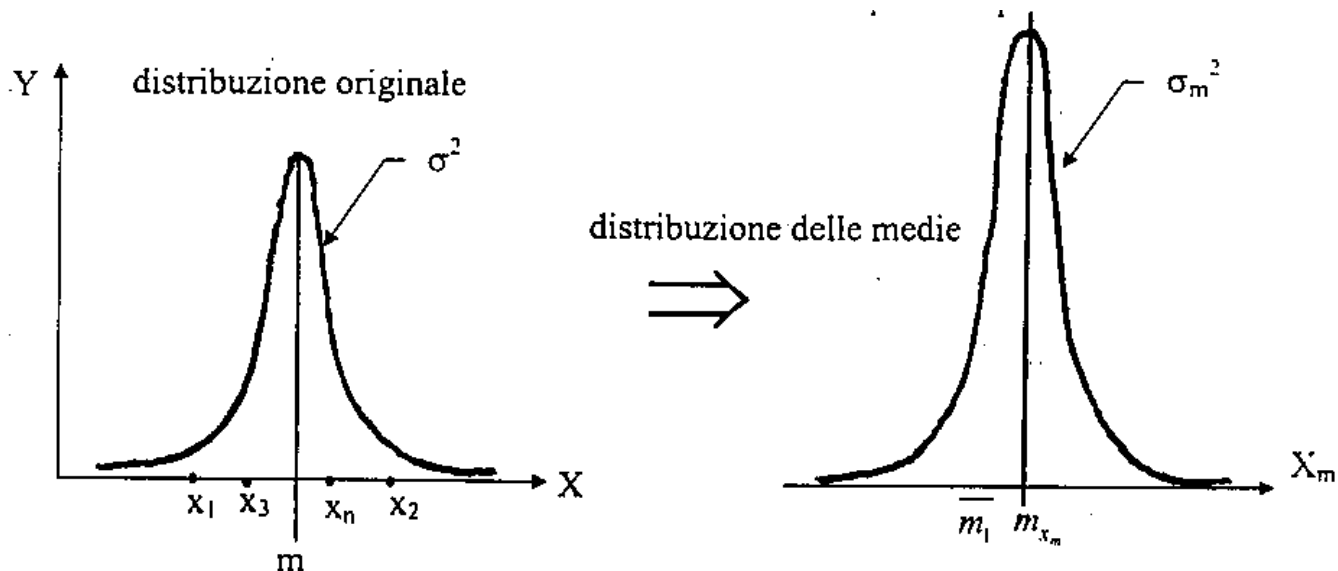
Proprietà degli stimatori

NON AFFETTE DA ERRORI SISTEMATICI:

Una stima si dice non affetta da errore sistematico se la media della popolazione delle stime coincide con la media della popolazione da cui vengono estratti i campioni.

EFFICIENTE:

Una stima si dice efficiente se, rispetto a tutte le possibili stime del parametro, la popolazione cui appartiene ha la varianza minima.





Misure dirette di ugual precisione

Per trovare uno stimatore della media applichiamo il principio di massima verosimiglianza e troviamo il valore $\bar{m}$ per cui è verificata l'equazione:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \min$$

Derivando rispetto all'incognita m ed uguagliando a zero la derivata:

$$\frac{d}{dm} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{m} = \sum_{i=1}^n x_i - n \bar{m} = 0$$

da cui la stima più plausibile del parametro media:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

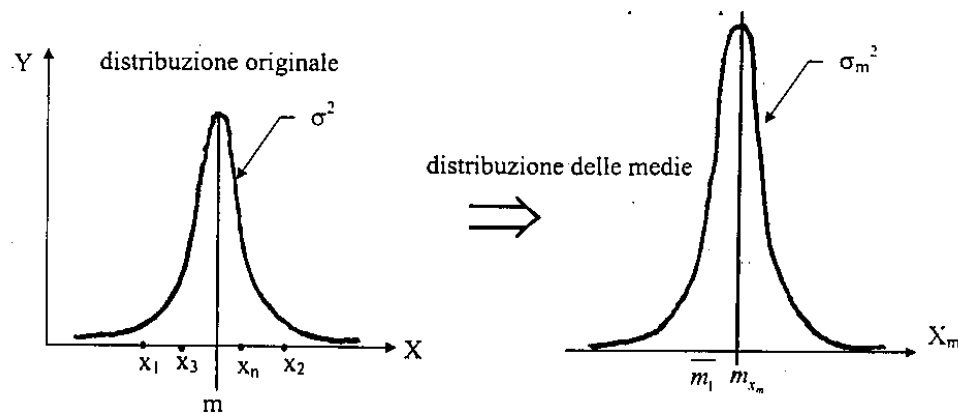
Misure dirette di ugual precisione

Bisogna verificare se la stima della media ottenuta rispetta le proprietà enunciate in precedenza.

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Estrarre dalla variabile casuale X l' n -pla di valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ e poi farne la media aritmetica equivale a calcolare un individuo di una nuova variabile casuale chiamata delle medie.

Ripetendo infinite volte questa operazione generiamo infiniti valori $\bar{m}$ e quindi costruiamo la distribuzione delle medie, che sarà normale come quella di partenza.





Misure dirette di ugual precisione

Per verificare la bontà della stima dobbiamo calcolare il valore della media teorica della distribuzione delle medie.

Ciascun valore di questa distribuzione è stato ricavato come media aritmetica di un campione di individui $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ estratti dalla distribuzione originale X .

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$$

La relazione tra $\bar{m}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ sarà una relazione fra variabili casuali indipendenti del tipo normale e quindi possiamo calcolare il valore della media teorica della distribuzione delle medie che sta a primo membro.

Utilizzando l'operatore $M[a]$ con il significato di "calcolo il valore della media teorica della distribuzione a ":

$$M[\bar{m}] = \frac{1}{n}M[x_1] + \frac{1}{n}M[x_2] + \dots + \frac{1}{n}M[x_n]$$



Misure dirette di ugual precisione

$$M[\bar{m}] = \frac{1}{n}M[x_1] + \frac{1}{n}M[x_2] + \dots + \frac{1}{n}M[x_n]$$

Notiamo che:

- la distribuzione x_1 è costituita da infiniti valori “estratti per primi” dalla distribuzione X e avrà quindi media teorica m e varianza σ^2 .
- la distribuzione x_2 è costituita da infiniti valori “estratti per secondi” dalla distribuzione X e avrà quindi media teorica m e varianza σ^2 .
- ...
- la distribuzione x_n è costituita da infiniti valori “estratti per ultimi” dalla distribuzione X e avrà quindi media teorica m e varianza σ^2 .

Quindi:

$$M[\bar{m}] = \frac{1}{n}m + \frac{1}{n}m + \dots + \frac{1}{n}m = m$$

Cioè la media teorica della distribuzione delle medie coincide con la media teorica della distribuzione originale e quindi la stima non è affetta da errore sistematico.



Misure dirette di ugual precisione

Per quanto riguarda la determinazione della varianza σ_m^2 della distribuzione delle medie,

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$$

applicando le regole della combinazione di variabili casuali indipendenti di tipo normale, si ha:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

In base alle definizioni date prima, si può dire che la stima è efficiente. L'effettuare n osservazioni di una stessa grandezza, ovvero effettuare n estrazioni da una distribuzione di varianza σ^2 , e costruire la media aritmetica del campione $\bar{m}$, equivale ad eseguire un'unica osservazione da una distribuzione che ha la stessa media teorica (m) ed una varianza n volte più piccola (σ^2 / n)



Misure dirette di ugual precisione

La stima della varianza della distribuzione originale, in base al campione estratto $x_1, x_2, \dots, x_n$, è invece affetta da errore sistematico. Infatti, secondo la definizione data, la varianza vale:

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)(m - \bar{m}) &= \frac{2}{n} (m - \bar{m}) \sum_{i=1}^n (x_i - m) = \frac{2}{n} (m - \bar{m}) \left(\sum_{i=1}^n x_i - nm \right) = \\ &= \frac{2}{n} (m - \bar{m}) (n\bar{m} - nm) = -2(m - \bar{m})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 \cdot f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m + m - \bar{m})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m - \bar{m})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)(m - \bar{m}) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 + (m - \bar{m})^2 - 2(m - \bar{m})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - (m - \bar{m})^2\end{aligned}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m - \bar{m})^2$$



Misure dirette di ugual precisione

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m - \bar{m})^2$$

I termini a secondo membro sono pari, secondo le definizioni date, rispettivamente alla varianza della distribuzione originale (σ^2) e a quella della distribuzione della media (σ_m^2) e quindi:

$$s^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \frac{n-1}{n}$$

La distribuzione delle varianze s^2 non coincide quindi con quella della distribuzione originale σ^2 e pertanto la stima è affetta da errore sistematico. Per ottenere una stima buona è sufficiente moltiplicare tutti gli individui del campione per il termine correttivo $n / (n-1)$.

La stima della varianza della distribuzione originale è quindi:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2}{n-1}$$



Misure dirette di ugual precisione

La stima della varianza della distribuzione delle medie, a partire dal campione estratto $x_1, x_2, \dots, x_n$, sarà quindi:

$$\overline{\sigma}_m^2 = \frac{\overline{\sigma}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{m})^2}{n \cdot (n-1)}$$

Misurare direttamente una grandezza significa quindi:

- eseguire n osservazioni $x_1, x_2, \dots, x_n$
- calcolare la media aritmetica $\overline{m}$
- calcolare la varianza della distribuzione delle medie $\overline{\sigma}_m^2$

La misura della grandezza si esprimerà come:

$$\overline{m} \pm \overline{\sigma}_m$$

Ovvero la media aritmetica accompagnata dallo scarto quadratico medio della distribuzione.



Disuguaglianza di Tchebycheff

La varianza è un indice di dispersione abbastanza significativo.
Per una distribuzione di probabilità qualunque si può scrivere:

$$m = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \cdot f_i = v_1^2 \cdot f_1 + v_2^2 \cdot f_2 + \dots + v_n^2 \cdot f_n$$

Fissato un valore dello scarto v_m compreso tra v_1 e v_n , si pongano uguali a zero tutti i valori degli scarti inferiori o uguali a v_m , ed uguali a v_m tutti gli scarti superiori; si ha che:

$$\sigma_{(x)}^2 \geq v_m^2 \cdot (f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n)$$

La somma dei termini tra parentesi definisce la frequenza relativa f^* degli scarti che hanno un valore assoluto superiore a v_m ; poichè la somma di tutte le frequenze relative è uguale ad uno, la frequenza relativa f_* degli scarti inferiori o uguali a v_m è:

$$f_* = 1 - f^* \quad \text{e quindi} \quad \sigma_{(x)}^2 \geq v_m^2 \cdot (1 - f_*)$$

$$\text{da cui} \quad f_* \geq 1 - \frac{\sigma_{(x)}^2}{v_m^2}$$



Disuguaglianza di Tchebycheff

Ponendo $v_m = \lambda \cdot \sigma_{(x)}$

Si ha la disuguaglianza di Tchebycheff, significativa per $\lambda > 1$

$$f_* \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Per $\lambda = 2$, risulta $f^* = 0.75$, ovvero in qualsiasi distribuzione almeno il 75% degli individui è distribuito nell'intervallo $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$.

Per $\lambda = 3$, risulta $f^* = 0.89$, ovvero in qualsiasi distribuzione almeno l' 89% degli individui è distribuito nell'intervallo $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

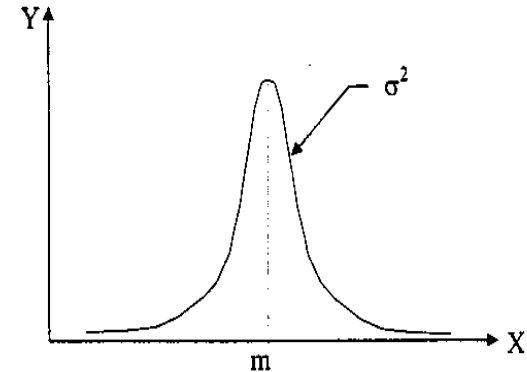
Nel caso di una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano le percentuali aumentano.

Distribuzione di Gauss

La densità di probabilità di una variabile casuale normale o gaussiana x di media m e varianza σ^2 è:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Le principali caratteristiche di questa distribuzione sono:



- è simmetrica rispetto alla retta $x = m$;
- ha due flessi in corrispondenza dei punti $x = m + \sigma$ e $x = m - \sigma$;
- al crescere di σ^2 la curva si appiattisce e viceversa, al diminuire di σ^2 , diventa più aguzza;
- è definita da $-\infty$ a $+\infty$ e quindi: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Gli individui di una qualunque variabile casuale di tipo normale si distribuiscono attorno al valore della media secondo le seguenti percentuali:

il **63,3%** è compreso nell'intervallo **[$m - \sigma$, $m + \sigma$]**

il **95,4%** è compreso nell'intervallo **[$m - 2\sigma$, $m + 2\sigma$]**

il **99,7%** è compreso nell'intervallo **[$m - 3\sigma$, $m + 3\sigma$]**



Misure dirette di ugual precisione

Per la diseguaglianza di Tchebycheff si ha che per l'estrazione delle medie derivanti dalle misure della grandezza X:

tra $\bar{m} - \bar{\sigma}_m$ e $\bar{m} + \bar{\sigma}_m$ la probabilità è del 68%

tra $\bar{m} - 2\bar{\sigma}_m$ e $\bar{m} + 2\bar{\sigma}_m$ la probabilità è del 95%

tra $\bar{m} - 3\bar{\sigma}_m$ e $\bar{m} + 3\bar{\sigma}_m$ la probabilità è praticamente del 100%

L'intervallo $\pm 3\bar{\sigma}_m$ rappresenta quindi la massima variazione possibile dei valori $\bar{m}$ ottenuti facendo la media aritmetica di n misure.

La massima variazione di una sola misura x_i è invece pari a $\pm 3\bar{\sigma}$.

ERRORE GROSSOLANO → misura che differisce dalla media $\bar{m}$ per più di $\pm 3\bar{\sigma}$.

Eseguendo n misure e calcolando la media aritmetica $\bar{m}$ si diminuisce di $\sqrt{n}$ volte l'intervallo di variabilità delle misure (l'aumento di precisione cresce con la radice quadrata del numero di misure).



Misure dirette di ugual precisione

!!Se si esegue una sola misura di una grandezza non si alcun modo di verificare se tale valore è affetto da errore grossolano!!

Come $\bar{\sigma}$ della distribuzione da cui è stata estratta la misura conviene assumere quello della **precisione strumentale** caratteristica dello strumento impiegato per la misura.

Anche eseguendo misure con strumenti di bassa precisione conviene associare al valore rappresentativo della misura un $\bar{\sigma}$ pari alla precisione strumentale perchè, probabilmente, la ripetizione della misura darebbe un valore uguale a quello precedente e sarebbe errato attribuire alla misura uno scarto quadratico medio nullo.



Misure dirette di ugual precisione

Esempio:

Un angolo azimutale è stato misurato quattro volte con i seguenti risultati:

α misurato	$\alpha - \overline{m}_\alpha$	$(\alpha - \overline{m}_\alpha)^2$
54 ^g ,6542	-0,0001	1·10 ⁻⁸
54 ^g ,6539	-0,0004	16·10 ⁻⁸
54 ^g ,6547	0,0004	16·10 ⁻⁸
54 ^g ,6544	0,0001	1·10 ⁻⁸
Σ		34·10 ⁻⁸

$$\overline{m}_\alpha = 54^g,6543$$

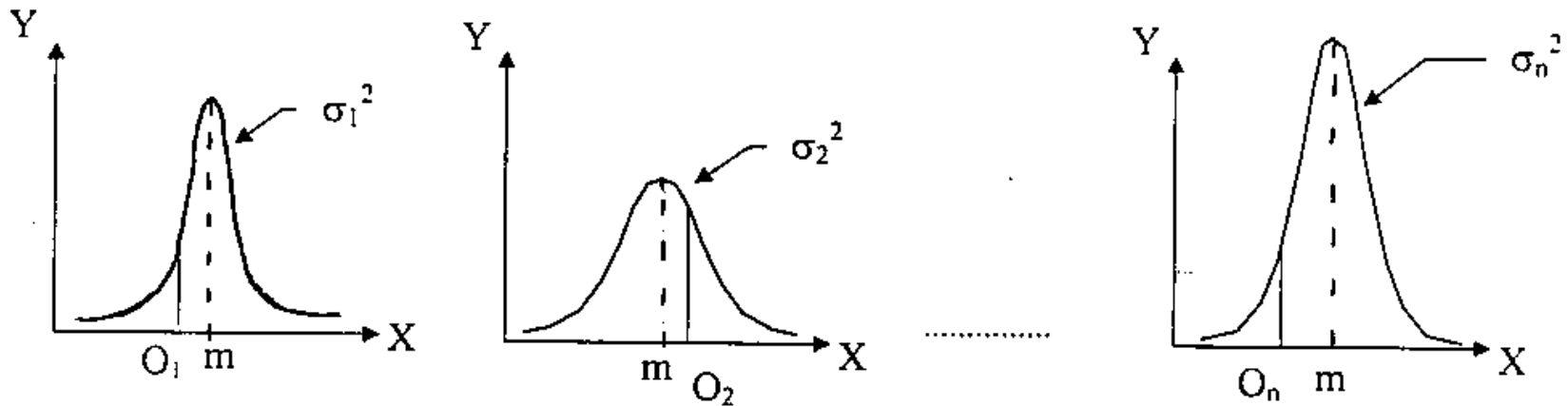
$$\overline{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (\alpha_i - \overline{m}_\alpha)^2}{n-1} = \frac{34 \cdot 10^{-8}}{3} = 113 \cdot 10^{-9} \rightarrow \overline{\sigma} = \pm 0^g,00034$$

$$\overline{\sigma}_m^2 = \frac{\overline{\sigma}}{n} = \frac{113 \cdot 10^{-9}}{4} = 28 \cdot 10^{-9} \rightarrow \overline{\sigma}_m = \pm 0^g,00017$$

La misura dell'angolo sarà dunque: $\alpha = 54^g,6543 \pm 0^g,00017$

Misure dirette di diversa precisione

Se una grandezza (ad esempio un angolo azimutale) viene misurata più volte con strumenti aventi diversa precisione di misura o in condizioni operative differenti, non è possibile ricavare la stima con la semplice media aritmetica delle misure eseguite.



Le n distribuzioni avranno tutte media m , poichè rappresentano la stessa grandezza, ma avranno varianze σ_i^2 diverse, poichè di precisione diversa.

Da ciascuna distribuzione viene estratto un individuo O_i e quindi complessivamente avremo a disposizione un campione $O_1, O_2, \dots, O_n$.

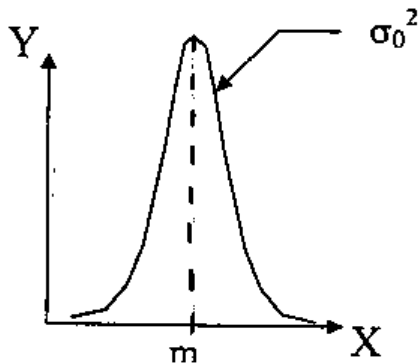


Misure dirette di diversa precisione

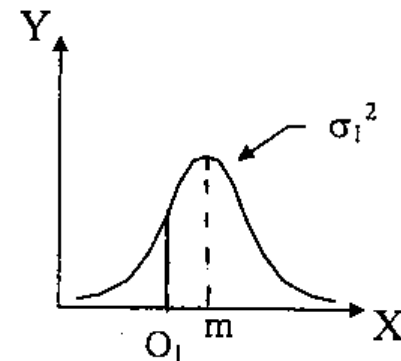
La probabilità di estrazione del singolo individuo O_i dalla relativa distribuzione è:

$$f(O_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(O_i-m)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Ciascun individuo O_i si può pensare come risultato della media di più individui estratti da una distribuzione avente la stessa media teorica m delle singole distribuzioni e varianza pari a σ_0^2 a cui si dà il nome di **varianza dell'unità di peso**; essa rappresenta la varianza di una distribuzione a cui è stato arbitrariamente attribuito un peso unitario.



$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$



Estrarre un individuo O_i dalla distribuzione di varianza σ_1^2 equivale ad estrarre p_1 individui dalla distribuzione di varianza σ_0^2 e poi farne la media.



Misure dirette di diversa precisione

Mediante i pesi, tutte le distribuzioni vengono riferite alla distribuzione σ_0^2 di peso unitario.

Scegliendo σ_0^2 in modo del tutto arbitrario, i pesi delle singole misure saranno:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2}, \quad \dots, \quad p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

La probabilità di estrazione del singolo individuo O_i dalla distribuzione di varianza σ_0^2 è:

$$f(O_i) = \frac{p_i^{1/2}}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{p_i}{2\sigma_0^2}(O_i-m)^2}$$

La probabilità di uscita dell'intero campione $O_1, O_2, \dots, O_n$ è dato, per il teorema delle probabilità composte, dal prodotto delle singole probabilità:

$$V(O_1, O_2, \dots, O_n, m, \sigma_0^2) = \frac{(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n)^{1/2}}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \cdot \sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2}$$



Misure dirette di diversa precisione

Qualunque sia il valore di σ_0^2 , il massimo della funzione V si ha quando l'esponente di e è minimo:

$$\sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2 = \min$$

Come fatto in precedenza, deriviamo rispetto m la sommatoria e imponiamo uguale a zero la derivata:

$$\frac{d}{dm} \sum_{i=1}^n p_i (O_i - m)^2 = -2 \sum_{i=1}^n p_i (O_i - \bar{m}_p) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n p_i O_i - \sum_{i=1}^n p_i \bar{m}_p = \sum_{i=1}^n p_i O_i - \bar{m}_p \sum_{i=1}^n p_i = 0$$

Si ottiene così la **MEDIA PONDERATA** delle O_i misure di diversa precisione:

$$\bar{m}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i O_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{p_1 O_1 + p_2 O_2 + \dots + p_n O_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$



Misure dirette di diversa precisione

Se i pesi vengono moltiplicati tutti per una stessa costante, il valore della media ponderata non cambia.



!! La scelta di σ_0^2 può essere arbitraria !!

Per verificare che la stima data dalla media ponderata è una buona stima, bisogna appurare che sia:

- consistente
- non affetta da errori sistematici
- efficiente

Per far questo procediamo analogamente al caso della media aritmetica nell'ipotesi di misure di ugual precisione, ipotizzando di eseguire infinite volte l'estrazione del campione $O_1, O_2, \dots, O_n$.

$$M[O_1] + M[O_2] + \dots + M[O_n] = m$$



Misure dirette di diversa precisione

Quindi, la media della distribuzione delle medie ponderate sarà:

$$M[\bar{m}_p] = \frac{p_1 M[O_1] + p_2 M[O_2] + \dots + p_n M[O_n]}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{m \sum_{i=1}^n P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = m$$

resta così dimostrato che la stima di $\bar{m}_p$ è consistente e non affetta da errore sistematico.

Per quanto riguarda la varianza della distribuzione delle medie ponderate, applicando le regole sulla combinazione di variabili casuali:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{p_1}{\sum p_1} \right) \sigma_1^2 + \left(\frac{p_2}{\sum p_2} \right) \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{\sum p_n} \right) \sigma_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n p_i^2}$$

Questo stimatore, che risulta essere corretto, è utilizzabile nel caso siano note le varianze delle osservazioni, che hanno dato la stima della media ponderata.



Misure dirette di diversa precisione

Nel caso in cui si conoscano solo i pesi si può scrivere, ricordando che $\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$

$$\bar{\sigma}_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Per poter calcolare in questo modo σ_p^2 , è necessario stimare la quantità σ_0^2 .

Si può dimostrare che la miglior stima della quantità σ_0^2 è ricavabile con la seguente espressione:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n-1}$$



Misure indirette

Consideriamo una grandezza X ed n grandezze $X_1, X_2, \dots, X_n$ tra le quali esista un legame funzionale del tipo:

$$X = f (X_1 , X_2 , \dots , X_n)$$

Le grandezze X_i possono essere misurate direttamente e quindi essere tra loro stocasticamente indipendenti; in questo caso ognuna di loro è rappresentata da una stima della media e della varianza che ha caratterizzato la loro misura.

Se invece le grandezze X_i sono misurate indirettamente esse risultano generalmente stocasticamente correlate e quindi sono rappresentate da valori stimati delle rispettive medie e da una matrice di Varianza-covarianza della distribuzione a n dimensioni $X_1, X_2, \dots, X_n$.

$$U = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n}^2 & \sigma_{2n}^2 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$



Misure indirette

La relazione

$$X = f (X_1 , X_2 , \dots , X_n)$$

definisce la grandezza X come una variabile casuale i cui parametri dipendono dai parametri delle variabili casuali X_i .

Misurare indirettamente la grandezza X significa definire la distribuzione delle misure possibili della X a partire dalle variabili casuali indipendenti che definiscono le n misure dirette oppure la variabile casuale ad n dimensioni dipendente dalle n variabili $X_1, X_2, \dots, X_n$ che definisce globalmente le misure indirette di queste grandezze.

Due casi possibili:

- 1) Legame funzionale $f \rightarrow$ combinazione lineare delle $X_i \rightarrow$ soluzione semplice.
- 2) Legame funzionale $f \rightarrow$ legame più complesso fra le $X_i \rightarrow$ bisogna generalizzare il procedimento risolutivo.



Legame funzionale f “Lineare”

In questo caso X è esprimibile come:

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

Nel caso in cui le grandezze X_i siano stocasticamente indipendenti, la stima della media di X si può esprimere come:

$$X_m = a_1 X_{1m} + a_2 X_{2m} + \dots + a_n X_{nm}$$

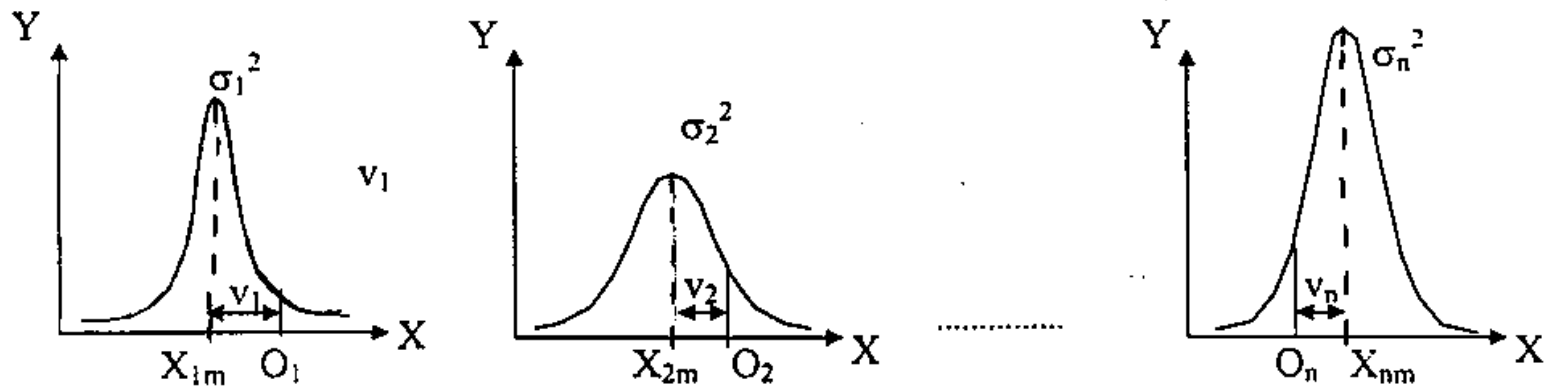
e la varianza come:

$$\sigma_X^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$$

Se le variabili X_i sono correlate la media è la stessa, mentre la varianza vale:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 = & a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 + 2a_1 a_2 \sigma_{12} + 2a_1 a_3 \sigma_{13} + \dots + 2a_1 a_n \sigma_{1n} + 2a_2 a_3 \sigma_{23} + \\ & + \dots + 2a_2 a_n \sigma_{2n} + \dots + 2a_{(n-1)} a_n \sigma_{(n-1)n} \end{aligned}$$

Non facendo alcuna ipotesi sulla forma del legame funzionale f si ha:



sia $O_1, O_2, \dots, O_n$ un campione estratto da ciascuna delle distribuzioni di misure possibili di $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ogni valore O_i è il risultato di un'estrazione casuale dalle distribuzioni di media teorica X_{im} .

Quindi è possibile esprimere le O_i nel seguente modo:

$$O_1 = X_{1m} + v_1 \quad O_2 = X_{2m} + v_2 \quad \dots \quad O_n = X_{nm} + v_n$$

Se gli scarti v_i sono sufficientemente piccoli da poter considerare trascurabili i loro quadrati, possiamo linearizzare l'equazione del legame funzionale con uno sviluppo in serie di Taylor attorno al punto definito dalle medie teoriche X_{im} .

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} f(O_1, O_2, \dots, O_n) &= f(X_{1m} + v_1, X_{2m} + v_2, \dots, X_{nm} + v_n) = \\ &= f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm}) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m v_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m v_n \end{aligned}$$

Ripetendo infinite volte l'estrazione del campione $O_1, O_2, \dots, O_n$ insieme con le operazioni prima descritte, costruiamo le distribuzioni a primo e secondo membro dell'equazione linearizzata.

Applichiamo quindi l'operatore $M[]$ alle distribuzioni così costruite:

$$M[f(O_1, O_2, \dots, O_n) - f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})] = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m M[v_1] + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m M[v_n]$$

La media della distribuzione a primo membro è nulla in quanto il secondo membro è una combinazione di variabili scarto, che per definizione sono distribuzioni a media teorica nulla e quindi:

$$M[f(O_1, O_2, \dots, O_n)] = f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$$

perchè gli infiniti valori teorici $f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$ sono tutti uguali fra loro.



Misure indirette

Ogni n-pla $O_1, O_2, \dots, O_n$ estratta è una stima di $X = f(O_1, O_2, \dots, O_n)$. Le infinite n-pie generano la distribuzione della X che avrà media teorica X_m .

$$X_m = f(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$$

Concludendo, nell'ipotesi che gli scarti vi siano piccoli, la media della grandezza X può essere stimata introducendo nell'equazione precedente le stime delle medie delle distribuzioni X_i .

$$\bar{X}_m = f(\bar{X}_{1m}, \bar{X}_{2m}, \dots, \bar{X}_{nm})$$



Misure indirette

Per la stima della varianza della X:

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

Nel caso in cui le grandezze X_i sono incorrelate:

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_m^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m^2 \sigma_n^2$$

Nel caso in cui le grandezze X_i sono correlate:

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_m^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_m^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_m^2 \sigma_n^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \right) \sigma_{ij}$$



Variabile statistica a due dimensioni

Gli individui di una popolazione siano caratterizzati da due attributi (es. peso-altezza, x-y, temperatura-pressione, ...). I valori (x_1 , x_2 , ..., x_r) sono caratterizzati da una distribuzione marginale di frequenze (m_1 , m_2 , ..., m_r) e analogamente, i valori (y_1 , y_2 , ..., y_s) da una distribuzione (n_1 , n_2 , ..., n_s). Indicando con H_{kj} le frequenze assolute è possibile costruire la tabella a doppia entrata, che rappresenta la variabile a due dimensioni (x,y).

	x_1	x_2	...	x_r	
y_1	H_{11}	H_{12}	...	H_{1r}	$n_1 = \sum_{k=1}^r H_{k1}$
y_2	H_{21}	H_{22}	...	H_{2r}	$n_2 = \sum_{k=1}^r H_{k2}$
...	...	...	...	...	
y_s	H_{s1}	H_{s2}	...	H_{sr}	$n_s = \sum_{k=1}^r H_{ks}$
	$m_1 = \sum_{j=1}^s H_{1j}$	$m_2 = \sum_{j=1}^s H_{2j}$		$m_r = \sum_{j=1}^s H_{rj}$	



Variabile statistica a due dimensioni

Considerando le frequenze relative relative $h_{ik} = H_{ik}/N$, i parametri caratteristici, che rappresentano la variabile casuale bidimensionale, si possono scrivere nel modo seguente:

MEDIE:

- Media della x sulla distribuzione marginale m

$$m_x = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s x_i h_{ik}$$

- Media della y sulla distribuzione marginale n

$$m_y = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r y_k h_{ik}$$



Variabile statistica a due dimensioni

VARIANZE:

-Varianza della x sulla distribuzione marginale m

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - m_x)^2 h_{ik}$$

-Varianza della y sulla distribuzione marginale n

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r (y_k - m_y)^2 h_{ik}$$

COVARIANZA:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - m_x)(y_k - m_y) h_{ik}$$



Variabile statistica a due dimensioni

È importante mettere in evidenza che nel caso bidimensionale le frequenze h_{ik} sono diverse dalle h_i definite nel caso della variabile monodimensionale, in quanto le h_{ik} sono frequenze condizionate.

Infatti rappresentano le frequenze con le quali si presentano le misure x_i quando siano associate, cioè condizionate, alle y_k .

Si può dimostrare che, nel caso in cui le due variabili x ed y siano indipendenti, la covarianza è nulla.

I momenti di secondo grado di una variabile statistica a due dimensioni possono essere considerati quali elementi di una matrice quadrata simmetrica chiamata **matrice di varianza – covarianza**.

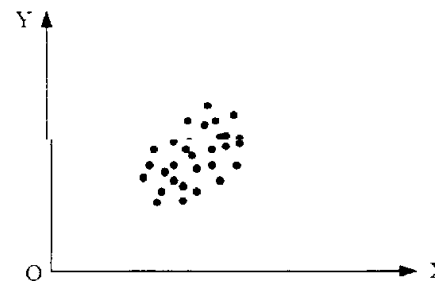
$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Variabile statistica a due dimensioni

La **correlazione** fra le due variabili di una distribuzione a due dimensioni è una specie di dipendenza, diversa da quella funzionale in quanto ad un valore di una variabile possono corrispondere più valori della seconda variabile.

Si definisce **coefficiente di correlazione lineare** la quantità:

$$r = \frac{\sum (x_j - m_x)(y_j - m_y)}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$



Correlazione lineare debole



Correlazione lineare forte

La correlazione può essere forte o debole; una correlazione debole è caratterizzata dal fatto che le distribuzioni condizionate variano poco al variare dell'altra variabile; in una correlazione forte i valori delle due variabili sono quasi legate da una dipendenza funzionale.

Il valore di **r** è compreso tra -1 e 1; il valore 0 indica che tra le due variabili non esiste dipendenza lineare ma non dice nulla su altre eventuali correlazioni (parabolica, esponenziale, ...)

Distribuzione normale a due dimensioni

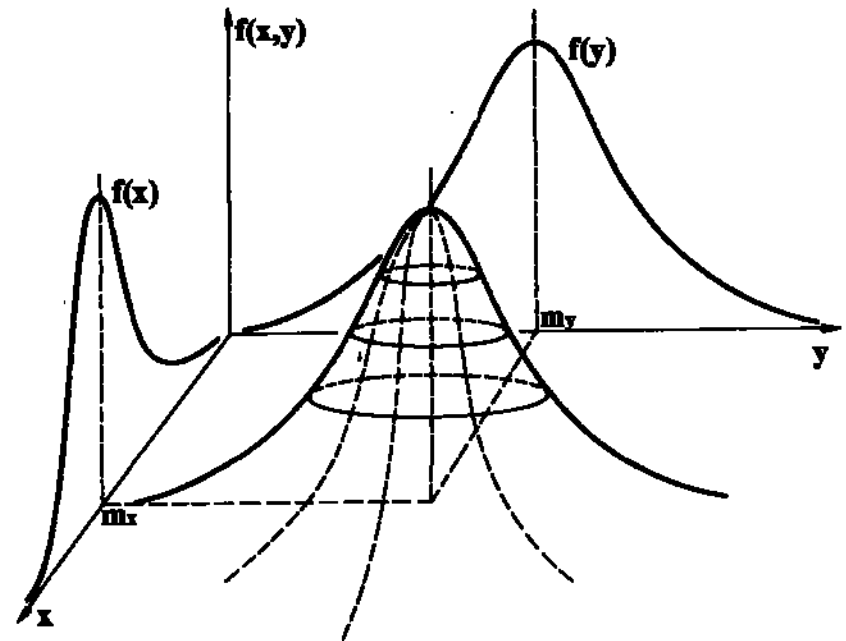
Consideriamo ora due variabili casuali di tipo normale (X e Y) fra loro correlate e distribuite con legge normale. La densità di probabilità è espressa da:

$$f(x, y) = \frac{1 - r^2}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2r\cdot\frac{x-m_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-m_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

Questa densità di distribuzione è rappresentata da una superficie a Campana, centrata in $x=m_x$ e $y=m_y$. Le distribuzioni marginali di frequenza di x e y sono quelle consuete per le variabili monodimensionali.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2}$$





Distribuzione normale a due dimensioni

L'intersezione di un piano parallelo al piano x-y con la superficie della distribuzione di frequenza della variabile bidimensionale è un'ellisse. L'equazione di questa ellisse si trova ponendo $f(x,y) = K$. Si ottiene:

$$\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{x - m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{y - m_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y - m_y}{\sigma_y} \right)^2 = (1 - r^2) \cdot c^2$$

dove

$$c^2 = \ln \left[4\pi^2 K^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - r^2) \right]^{-1} = \text{cost}$$

Se si vuole analizzare solo la componente relativa agli errori casuali, si può porre uguale a zero m_x e m_y e centrare quindi la distribuzione di probabilità in (0,0).

Si ha quindi:

$$\left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 - 2 \cdot r \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x} \right) \cdot \left(\frac{y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2 = (1 - r^2) \cdot c^2$$

equazione di una famiglia di ellissi d'errore centrata nell'origine del sistema x,y di coordinate.

Distribuzione normale a due dimensioni

Se $c = 1$ si ottiene l'equazione dell'**ELLISSE d'ERRORE STANDARD**. Questa equazione è data nel sistema x, y , ma può essere riscritta nel sistema di assi x', y' , coincidenti con i semiassi principali dell'ellisse.

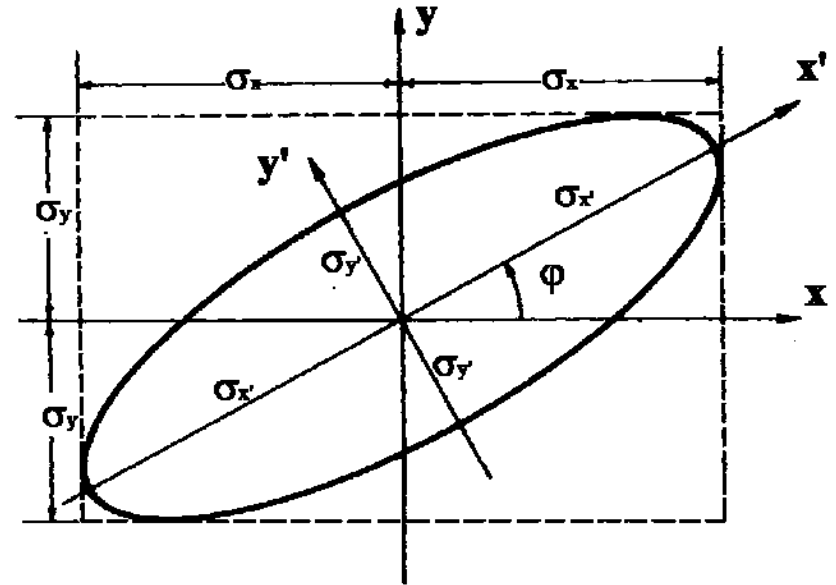
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice di varianza covarianza per la variabile casuale (x, y) è:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

mentre per la variabile casuale (x', y') è:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix}$$



Applicando la legge generale per la propagazione della varianza si ha:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



Distribuzione normale a due dimensioni

Svolgendo il prodotto fra matrici si ha:

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \cdot \cos^2 \varphi + 2\sigma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi$$

$$\sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \cdot \sin^2 \varphi - 2\sigma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y^2 \cos^2 \varphi$$

$$0 = (\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \cdot \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

e sostituendo

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \quad \text{e} \quad (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \cos 2\varphi$$

si ottiene:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

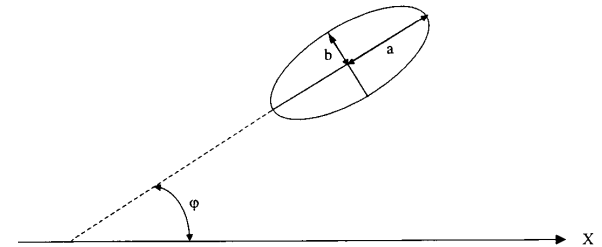
dove il quadrante dell'angolo 2φ va individuato, come già fatto nel caso del calcolo dell'azimut a partire dalle coordinate note di due punti, analizzando il segno del numeratore e del denominatore.

Distribuzione normale a due dimensioni

Eliminando nelle equazioni della slide precedente il termine φ , si ottengono le espressioni delle varianze in x' e y' , che corrispondono agli assi principali dell'ellisse standard:

$$\sigma_{x'}^2 = a^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{y'}^2 = b^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$



Calcolato l'angolo φ con l'equazione trovata in precedenza è quindi possibile tracciare l'ellisse standard.

Da un punto di vista statistico l'ellisse standard rappresenta l'area all'interno della quale si ha il 39% di probabilità di trovare un individuo estratto a caso dalla popolazione. In un'ellisse di dimensioni doppie tale probabilità sale a circa l'80%, mentre in un'ellisse di dimensioni pari a 3 volte l'ellisse standard la probabilità supera il 99%.



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

E' questo il caso di gran lunga più utilizzato in tutte le applicazioni topografiche e fotogrammetriche.

Problema:

stimare la media e la matrice di varianza-covarianza di una distribuzione r -dimensionale funzione di r grandezze indirette $X_1, X_2, \dots, X_r$ a partire da un campione di n misure dirette rappresentate da n distribuzioni incorrelate, di media e varianza note $L_1, L_2, \dots, L_n$ ($n > r$).

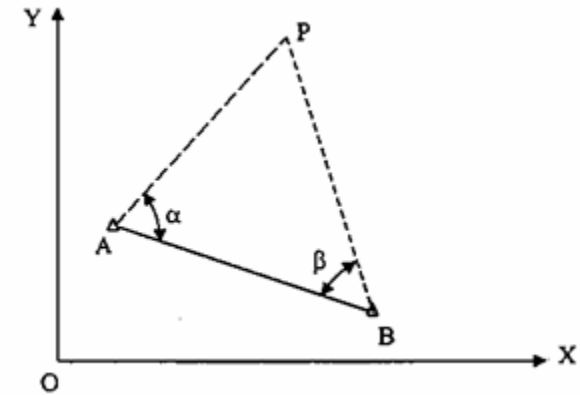
Il risultato dovrà dipendere da tutto il campione disponibile e si può dire che esso sarà il frutto di una **compensazione** delle misure eseguite.

Le grandezze X_j sono legate alle grandezze L_i da legami funzionali generici, dipendenti solitamente da condizioni geometriche e/o fisiche.

Consideriamo un semplice esempio:

Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Si vuole determinare le coordinate planimetriche (X , Y) di un punto P visibile da due punti A e B di coordinate note (intersezione semplice in avanti); la soluzione del problema avviene tramite la misura degli angoli azimutali in A e B . Qualsiasi errore nella misura degli angoli determina in questo modo un errore nella determinazione delle coordinate del punto senza possibilità di accorgersene.



Se invece si esegue anche la misura del lato AP , si ha un controllo sulle precedenti misure.

Ogni misura diretta effettuata sarà caratterizzata da una certa precisione ed ognuna di esse dovrà partecipare con il proprio peso alla soluzione del problema.

!! Le misure in esubero rispetto a quelle minime necessarie alla soluzione del problema geometrico non devono dipendere dalle altre misure !!



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Iniziamo ipotizzando che il legame funzionale tra le grandezze indirette e quelle dirette sia una combinazione lineare di queste ultime.

Consideriamo un sistema di n equazioni lineari che lega r grandezze incognite $X_1, X_2, \dots, X_r$ alle n grandezze misurabili direttamente $L_1, L_2, \dots, L_n$ con $n > r$ nell'ipotesi che ogni equazione contenga come termine noto una sola grandezza misurabile direttamente.

$$\begin{cases} a_1 X_1 + b_1 X_2 + \dots + u_1 X_r = L_1 \\ a_2 X_1 + b_2 X_2 + \dots + u_2 X_r = L_2 \\ \dots \\ a_n X_1 + b_n X_2 + \dots + u_n X_r = L_n \end{cases} \quad n > r$$

dove $a_i, b_i, \dots, u_i$ sono coefficienti noti.

Se disponessimo dei valori teorici di media L_i , una qualsiasi serie di r equazioni, scelte tra le n disponibili, sarebbe sufficiente per dare una soluzione che soddisfa anche le restanti $n-r$ equazioni.



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

In forma matriciale il sistema di equazioni lineari si scrive:

$$A \cdot X = T$$

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \quad T = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}$$

$A \rightarrow$ Matrice disegno $X \rightarrow$ Vettore incognite $L \rightarrow$ Vettore termini noti

Non si dispone mai dei valori teorici L_i delle grandezze misurate direttamente ma al massimo delle loro stime $\overline{L}_i$.

La relazione tra i valori teorici e quelli stimati, sarà espressa da $L_i = \overline{L}_i + v_i$ dove v_i rappresenta lo scarto tra la misura stimata e quella teorica.

Il sistema delle equazioni di osservazione andrà più correttamente riscritto tenendo conto degli scarti.



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

$$\begin{cases} a_1 X_1 + b_1 X_2 + \dots + u_1 X_r = \overline{L}_1 + v_1 \\ a_2 X_1 + b_2 X_2 + \dots + u_2 X_r = \overline{L}_2 + v_2 \\ \dots \\ a_n X_1 + b_n X_2 + \dots + u_n X_r = \overline{L}_n + v_n \end{cases}$$

Le quantità v_i rappresentano gli scarti teorici e sono anch'essi incogniti.

Il sistema scritto ha n equazioni ed $n+r$ incognite $\rightarrow$ è indeterminato (non è possibile trovare i valori X_i che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni).

IL PROBLEMA VA AFFRONTATO DA UN PUNTO DI VISTA STATISTICO

Ci proponiamo di stimare le medie delle misure indirette $\overline{X}_i$ a partire dalle stime delle misure dirette $\overline{L}_i$.

$$\begin{cases} a_1 \overline{X}_1 + b_1 \overline{X}_2 + \dots + u_1 \overline{X}_r = \overline{L}_1 + v_1 \\ a_2 \overline{X}_1 + b_2 \overline{X}_2 + \dots + u_2 \overline{X}_r = \overline{L}_2 + v_2 \\ \dots \\ a_n \overline{X}_1 + b_n \overline{X}_2 + \dots + u_n \overline{X}_r = \overline{L}_n + v_n \end{cases} \rightarrow A \cdot X = T + V$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Per ottenere lo stimatore delle medie applichiamo nuovamente il principio dei minimi quadrati:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min$$

Per avere una notazione più scorrevole ci limitiamo al caso della stima di due grandezze X_1 e X_2 legate linearmente a tre misure dirette L_1, L_2, L_3 .

$$\begin{cases} a_1 \overline{X}_1 + b_1 \overline{X}_2 = \overline{L}_1 + v_1 \\ a_2 \overline{X}_1 + b_2 \overline{X}_2 = \overline{L}_2 + v_2 \\ a_3 \overline{X}_1 + b_3 \overline{X}_2 = \overline{L}_3 + v_3 \end{cases} \rightarrow A \cdot X = T + V$$

Scrivendo il sistema in funzione degli scarti incogniti:

$$\begin{cases} a_1 \overline{X}_1 + b_1 \overline{X}_2 - \overline{L}_1 = v_1 \\ a_2 \overline{X}_1 + b_2 \overline{X}_2 - \overline{L}_2 = v_2 \\ a_3 \overline{X}_1 + b_3 \overline{X}_2 - \overline{L}_3 = v_3 \end{cases} \rightarrow A \cdot X - T = V$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

La sommatoria del quadrato degli scarti v_i è:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n v_i^2 &= a_1^2 \overline{X_1^2} + b_1^2 \overline{X_2^2} + \overline{L_1^2} + 2a_1 b_1 \overline{X_1 X_2} - 2a_1 \overline{X_1 L_1} - 2b_1 \overline{X_2 L_1} + \\ &+ a_2^2 \overline{X_1^2} + b_2^2 \overline{X_2^2} + \overline{L_2^2} + 2a_2 b_2 \overline{X_1 X_2} - 2a_2 \overline{X_1 L_2} - 2b_2 \overline{X_2 L_2} + \\ &+ a_3^2 \overline{X_1^2} + b_3^2 \overline{X_2^2} + \overline{L_3^2} + 2a_3 b_3 \overline{X_1 X_2} - 2a_3 \overline{X_1 L_3} - 2b_3 \overline{X_2 L_3}\end{aligned}$$

Per trovare il minimo di questa funzione bisogna risolvere il sistema delle derivate parziali rispetto $\overline{X_1}$ e $\overline{X_2}$ imposte uguali a zero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_{i=1}^n v_i^2}{\partial \overline{X_1}} = 2\overline{X_1}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2\overline{X_2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) - 2(a_1 \overline{L_1} + a_2 \overline{L_2} + a_3 \overline{L_3}) = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n v_i^2}{\partial \overline{X_2}} = 2\overline{X_1}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + 2\overline{X_2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(b_1 \overline{L_1} + b_2 \overline{L_2} + b_3 \overline{L_3}) = 0 \end{cases}$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Il sistema scritto è lineare a due equazioni in due incognite $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$.
In notazione matriciale:

$$N \cdot X = T_n$$

$$N = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{vmatrix} \quad T_n = \begin{vmatrix} a_1\overline{L}_1 + a_2\overline{L}_2 + a_3\overline{L}_3 \\ b_1\overline{L}_1 + b_2\overline{L}_2 + b_3\overline{L}_3 \end{vmatrix}$$

La soluzione si ottiene come:

$$X = N^{-1} \cdot T_n$$

$N \rightarrow$ Matrice normale (2x2, simmetrica, dipende solo dai coefficienti del sistema originario)

$T_n \rightarrow$ Vettore dei termini noti normalizzati (dipende solo dai coefficienti del sistema originario e dalle stime note delle misure dirette)

$N^{-1} \rightarrow$ inversa della matrice normale (anch'essa simmetrica)



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Ricapitolando, utilizzando direttamente il principio dei minimi quadrati per la stima delle grandezze incognite, bisogna:

- 1) Scrivere il sistema delle equazioni delle osservazioni
- 2) Scrivere l'equazione della sommatoria dei quadrati degli scarti
- 3) Calcolare le derivate parziali di questa equazione rispetto le incognite
- 4) Scrivere la matrice normale del sistema di annullamento delle equazioni precedenti ed invertirla.
- 5) Calcolare la soluzione

Considerando che le grandezze da stimare contemporaneamente sono solitamente in numero elevato (>100)

!! E' ESTREMAMENTE COMPLESSO APPLICARE UN TALE METODO !!



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Sfruttando delle relazioni esistenti fra le matrici A , T , N e T_n , giungeremo a scrivere il sistema normale in modo più agevole. Infatti:

$$N = A^T \cdot A$$

$$T_n = A^T \cdot T$$

Verifichiamo le relazioni nel caso dell'esempio semplificato precedente:

$$A^T \cdot A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix} = N$$

$$A^T \cdot T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{L_1} \\ \overline{L_2} \\ \overline{L_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\overline{L_1} + a_2\overline{L_2} + a_3\overline{L_3} \\ b_1\overline{L_1} + b_2\overline{L_2} + b_3\overline{L_3} \end{vmatrix} = T_n$$

E' quindi possibile affrontare il problema della stima di r misure indirette in funzione di n misure dirette in modo completamente automatico una volta scritta la matrice disegno ed il vettore dei termini noti.



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Generalmente le n misure dirette sono caratterizzate da precisioni diverse, pertanto il loro contributo alla stima delle medie delle misure indirette deve essere pesato.

Si dovrà moltiplicare ciascuna equazione per il peso della misura diretta corrispondente. In notazione matriciale:

$$P \cdot A \cdot X = P \cdot T$$

con P matrice dei pesi diagonale e di ordine n :

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix}$$

Quindi:

$$N = A^T \cdot P \cdot A$$

$$T_n = A^T \cdot P \cdot T$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Si è già visto che, assieme alla stima della media, è da determinare anche la stima della varianza.

In questo caso, dove le r misure indirette sono le variabili casuali di una distribuzione normale r -dimensionale, bisogna determinare la matrice di varianza-covarianza (matrice quadrata di ordine r , che ha sulla diagonale principale le varianze e nelle altre posizioni le covarianze).

In funzione delle medie stimate la varianza dell'unità di peso è:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n - r}$$

con il vettore degli scarti pari a:

$$V = A \cdot X - T$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

La matrice di varianza-covarianza si ottiene dal prodotto della varianza dell'unità di peso per la matrice inversa del sistema normale:

$$C_{xx} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \dots & \sigma_{x_1 x_r} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \sigma_{x_2 x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{x_r x_1} & \sigma_{x_r x_2} & \dots & \sigma_{x_r}^2 \end{vmatrix}$$

Un'altra quantità importante da calcolare è la matrice di varianza-covarianza degli scarti:

$$C_w = \sigma_0^2 \cdot (P^{-1} - A \cdot N^{-1} \cdot A^T)$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Nel caso in cui le relazioni che legano le r misure indirette alle n misure dirette non siano lineari, l'operazione di stima dovrà essere preceduto da una linearizzazione (attorno al valore approssimato delle incognite) delle equazioni di osservazione e poi si procederà in modo iterativo.

In questo caso, il sistema di equazioni è:

$$f_i (X_1, X_2, \dots, X_r / L_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad n > r$$

Nell'ipotesi che $X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0$, siano dei valori sufficientemente approssimati delle grandezze da misurare indirettamente in modo tale che i quadrati degli scarti e le potenze superiori possano essere trascurati, posto:

$$X_1 = X_1^0 + x_1$$

$$X_2 = X_2^0 + x_2$$

...

$$X_r = X_r^0 + x_r$$

si avrà:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_r, L_i) = f(X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0, L_i) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_0 x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_r} \right)_0 x_r = 0$$



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

Indicando per ogni equazione:

$$f(X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0, L_i) = -L_i$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_0 = a_i \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_0 = b_i \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_r} \right)_0 = u_i$$

si può scrivere il sistema di equazioni linearizzate:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + u_1 x_r = L_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + u_2 x_r = L_2 \\ \dots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + u_n x_r = L_n \end{cases}$$

LE INCOGNITE x_i SONO LE QUANTITA' DA SOMMARE AI VALORI X_i^0 PER OTTENERE LE GRANDEZZE INCOGNITE X_i .



SISTEMA DI EQUAZIONI ALLE CORREZIONI



Misure indirette di più grandezze con equazioni esuberanti

La matrice di varianza-covarianza della distribuzione delle correzioni x_i coincide con la matrice di varianza-covarianza della distribuzione delle stime $\overline{X}_{im}$ perchè i valori approssimati X_i^0 sono delle costanti.

Il procedimento iterativo consiste nel considerare i valori delle incognite $X_i = X_i^0 + x_i$, ottenuti in una soluzione, come i valori approssimati per la soluzione successiva.

La convergenza del procedimento iterativo viene accertata mediante l'analisi delle correzioni x_i apportate da ogni singola iterazione ed il procedimento potrà essere arrestato nel momento in cui il valore delle correzioni x_i sarà di un ordine di grandezza inferiore alla precisione raggiungibile con la misura.



Compensazione di una linea di livellazione

Nel momento in cui si ha una rete di livellazione, ovvero l'appartenenza di alcuni caposaldi a diversi poligoni di livellazione, non è possibile operare per semplice ripartizione dell'errore di chiusura e bisogna adottare una compensazione in presenza di equazioni d'osservazione esuberanti.

La compensazione di una rete di livellazione si esegue con le stesse modalità, qualunque sia il tipo di misura dei dislivelli adottato (geometrica, trigonometrica,...) Quello che varia è l'entità dello s.q.m. delle misure, che nel caso di livellazione geometrica cresce proporzionalmente alla radice quadrata dello sviluppo lineare della linea, mentre nella livellazione trigonometrica si può assumere, per distanze inferiori ai 10km, che cresca proporzionalmente alla distanza stessa.

Una rete di livellazione può essere o meno collegata ad uno o più punti di quota nota. Se non è vincolata per eseguire la compensazione si dovrà assegnare un valore arbitrario alla quota di un punto.

L'equazione di osservazione, che lega le quote incognite h_i e h_j di due punti è:

$$h_j - h_i - \Delta_{ij} = 0$$



Compensazione di una linea di livellazione

Se le misure sono quelle strettamente necessarie, il calcolo delle quote dei punti della rete è banale, riducendosi alla somma di dislivelli a partire dai punti di quota nota.

In pratica, però, si esegue sempre un numero di misure di dislivello superiore a quello minimo necessario e quindi il calcolo della rete dovrà procedere come

misura indiretta di n grandezze con un numero esuberante di equazioni

Se i dislivelli misurati nella rete sono n , potremmo scrivere un sistema di n equazioni lineari del tipo:

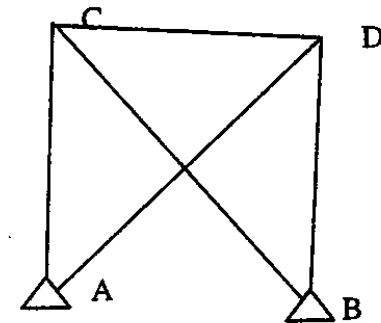
$$h_j - h_i - \Delta_{ij} = 0$$

Il sistema non richiederà alcun tipo di linearizzazione e non sarà quindi necessario conoscere i valori approssimati delle quote dei punti della rete e la soluzione si otterrà con una sola iterazione di calcolo.

Esempio di compensazione rete di livellazione (A.Cina)

Sia data la quota di due capisaldi A e B, 5 dislivelli misurati e il relativo sviluppo delle linee. Si calcolino con minimi quadrati le quote dei capisaldi C e D con la matrice di varianza-covarianza. Si considerino i pesi proporzionali all'inverso delle lunghezze delle linee.

DATI	linea	Disliv. [m]	Lungh. [km]	Pesi= =1/L	Pesi ^{1/2}
$Q_A=245,761$	AC	11,716	2,3	0,4348	0,6594
$Q_B=263,943$	CD	-8,242	3,1	0,3226	0,5680
	DB	14,719	2,8	0,3571	0,5976
	AD	3,466	4,2	0,2381	0,4880
	BC	-6,476	3,9	0,2564	0,5064



Soluzione:

- 1) Scrittura del sistema d'equazioni: stante la linearità delle equazioni non si fa ricorso ai valori approssimati delle incognite. Le equazioni che formano la matrice disegno possono essere allora scritte secondo la (10.7):

$$\begin{cases}
 Q_A - Q_C + \Delta_{AC} = v_1 \\
 Q_C - Q_D + \Delta_{CD} = v_2 \\
 Q_D - Q_B + \Delta_{DB} = v_3 \\
 Q_A - Q_D + \Delta_{AD} = v_4 \\
 Q_B - Q_C + \Delta_{BC} = v_5
 \end{cases}
 \quad \text{in forma matriciale } Ax - l_0 = v \rightarrow
 \begin{bmatrix}
 -1 & 0 \\
 1 & -1 \\
 0 & 1 \\
 0 & -1 \\
 -1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 Q_C \\
 Q_D
 \end{pmatrix} -
 \begin{pmatrix}
 -257.477 \\
 8.242 \\
 249.224 \\
 -249.227 \\
 -257.467
 \end{pmatrix} =
 \begin{pmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{pmatrix}$$



Esempio di compensazione rete di livellazione (A.Cina)

- 2) Il sistema di 5 equazioni in 2 incognite può essere risolto con il principio dei minimi quadrati attraverso il calcolo della matrice normale N e la normalizzazione del vettore dei termini noti T_n :

$$N = A^T P A =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4348 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3226 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3571 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2381 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2564 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0138 & -0.3226 \\ -0.3226 & 0.9178 \end{bmatrix}$$

$$T_n = A^T P l_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4348 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3226 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3571 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2381 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2564 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -257.477 \\ 8.242 \\ 249.224 \\ -249.227 \\ -257.467 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 180.6224 \\ 145.6896 \end{pmatrix}$$



Esempio di compensazione rete di livellazione (A.Cina)

La normalizzazione può essere fatta anche a partire dalla matrice disegno pesata A_p , secondo le (7.30) e (7.31), nella quale si moltiplica ogni riga della matrice A per la radice quadrata del peso corrispondente:

$$N = A_p^T A_p =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.4348 & 0.3226 & 0 & 0 & -0.2564 \\ 0 & -0.3226 & 0.3571 & -0.2381 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4348 & 0 \\ 0.3226 & -0.3226 \\ 0 & 0.3571 \\ 0 & -0.2381 \\ -0.2564 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0138 & -0.3226 \\ -0.3226 & 0.9178 \end{bmatrix}$$

$$T_n = A_p^T l_{op} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.4348 & 0.3226 & 0 & 0 & -0.2564 \\ 0 & -0.3226 & 0.3571 & -0.2381 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 169.7753 \\ -4.6811 \\ -148.9398 \\ 121.6103 \\ 130.3735 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180.6224 \\ 145.6896 \end{pmatrix}$$

Il risultato è naturalmente lo stesso. Questa procedura consente di arrivare alla matrice normale con un solo prodotto tra matrici e può essere utile nel caso di matrici dei pesi diagonali.



Esempio di compensazione rete di livellazione (A.Cina)

- 3) Stima dei parametri: le soluzioni stimate si ricavano dalla soluzione del sistema normale:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_C \\ \hat{Q}_D \end{pmatrix} = N^{-1}T_n = \begin{bmatrix} 1.1106 & 0.3903 \\ 0.3903 & 1.2267 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 180,6224 \\ 145,6896 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 257.4719 \\ 249.2268 \end{pmatrix}$$

- 4) Calcolo degli scarti e della matrice di varianza-covarianza

$$\hat{v} = A\hat{x} - l_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 257.4719 \\ 249.2268 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -257.477 \\ 8.242 \\ 249.224 \\ -249.227 \\ -257.467 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -257.472 \\ 8.245 \\ 249.227 \\ -249.227 \\ -257.472 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -257.477 \\ 8.242 \\ 249.224 \\ -249.227 \\ -257.467 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.003 \\ 0.003 \\ 0.000 \\ -0.005 \end{pmatrix}$$

Gli scarti raggiungono i valori massimi e minimi compresi in +5mm e -5 mm. Una semplice analisi degli scarti non fa rilevare in prima analisi la presenza di errori grossolani nelle misure.

Si può calcolare ora il valore stimato della varianza dell'unità di peso e la stima della matrice di varianza-covarianza:



Esempio di compensazione rete di livellazione (A.Cina)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{n-r} = \frac{0.0000234}{5-2} = 0.0000078$$

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_A^2 & \hat{\sigma}_{AB} \\ \hat{\sigma}_{AB} & \hat{\sigma}_B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000009 & 0.000003 \\ 0.0000030 & 0.000010 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \hat{\sigma}_A &= \pm \sqrt{0.000009} \text{ m} = \pm 2.9 \text{ mm} \\ \hat{\sigma}_B &= \sqrt{0.000010} \text{ m} = \pm 3.1 \text{ mm} \end{aligned}$$

I valori sulla diagonale principale della matrice di varianza-covarianza rappresentano le varianze dei parametri stimati. Gli scarti quadratici medi risultano millimetrici.

Si può calcolare ora la matrice di varianza-covarianza degli scarti stimati $C_{\hat{v}\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{v}\hat{v}}$

$$C_{\hat{v}\hat{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{9,28E-06} & \mathbf{5,62E-06} & \mathbf{3,04E-06} & \mathbf{-3,04E-06} & \mathbf{-8,66E-06} \\ \mathbf{5,62E-06} & \mathbf{1,20E-05} & \mathbf{6,52E-06} & \mathbf{-6,52E-06} & \mathbf{5,62E-06} \\ \mathbf{3,04E-06} & \mathbf{6,52E-06} & \mathbf{1,23E-05} & \mathbf{9,57E-06} & \mathbf{3,04E-06} \\ \mathbf{-3,04E-06} & \mathbf{-6,52E-06} & \mathbf{9,57E-06} & \mathbf{2,32E-05} & \mathbf{-3,04E-06} \\ \mathbf{-8,66E-06} & \mathbf{5,62E-06} & \mathbf{3,04E-06} & \mathbf{-3,04E-06} & \mathbf{2,18E-05} \end{vmatrix}$$

Gli elementi diagonali di questa matrice sono proprio le varianze degli scarti (grassetto).



Reti planimetriche

Per determinare delle coordinate planimetriche dei vertici di una rete di inquadramento, le uniche grandezze topografiche necessarie sono le direzioni azimutali e le distanze, opportunamente ridotte alla superficie di riferimento.

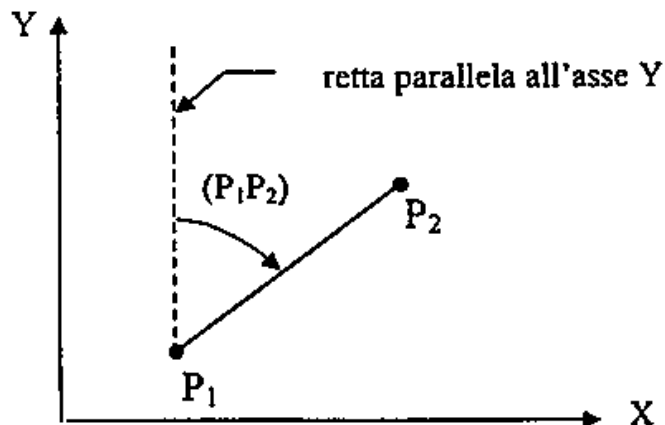
Prima delle operazioni di rilievo e compensazione, occorre definire il sistema di riferimento nel quale si vuole ricavare la soluzione, fissando arbitrariamente le coordinate X , Y di un punto della rete e una direzione (ad esempio la direzione dello zero della graduazione del cerchio azimutale del teodolite messo in stazione in un vertice della rete).

E' poi possibile rototraslare la rete compensata per fittarla in un sistema di riferimento finale.

In presenza di misure esuberanti rispetto a quello delle incognite sarà necessario eseguire una compensazione. Bisognerà:

- 1) determinare dei valori approssimati delle coordinate incognite (n vertici $\rightarrow 2n - 3$ incognite), utilizzando alcune delle misure eseguite in modo da poter impostare un trasporto di coordinate cartesiane.
- 2) scrivere le equazioni che legano le quantità incognite (coordinate X , Y dei vertici) alle misure dirette (angoli e distanze), termini noti delle equazioni.

Considerati due punti P_1 e P_2 di coordinate X_1 , Y_1 e X_2 , Y_2 si può ricavare:



ANGOLO DI DIREZIONE:

$$\text{tg}(P_1P_2) = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}$$

DISTANZA:

$$d_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Facendo stazione in un punto P_1 con un teodolite, l'origine del cerchio azimutale si dispone secondo una direzione qualunque, che non coincide con la direzione dell'asse Y del sistema di riferimento scelto.



L'angolo di direzione (P_1P_2) non è misurabile direttamente.

L_2 (lettura azimutale teodolite) – $(P_1P_2) = \beta$ (**correzione azimutale di stazione**)

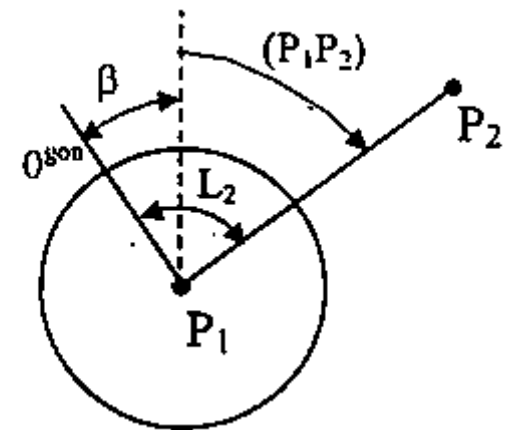
La correzione azimutale di stazione, detta anche orientamento della stazione, è un'incognita, ma è uguale per tutte le direzioni azimutali misurate con il teodolite posto in stazione in P_1 (purché non si modifichi lo zero strumentale durante le misure).

Per ogni direzione azimutale misurata si può quindi scrivere:

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) + \beta - L_2 = 0$$

X_i, Y_i, β incogniti

L_2 noto

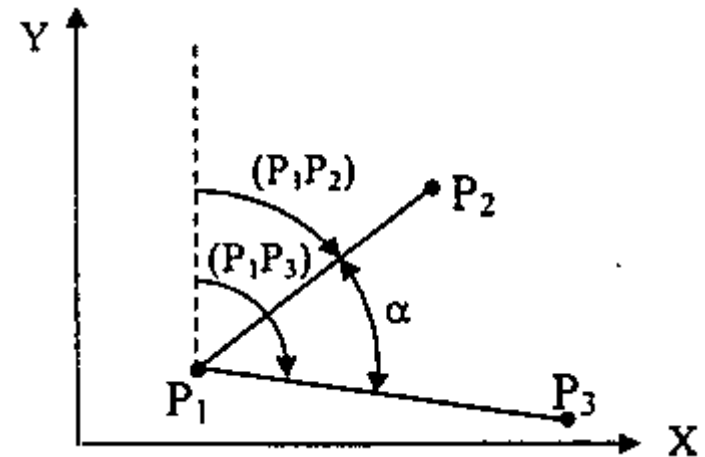


Per ogni distanza misurata possiamo invece scrivere:

$$\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} - d_{12} = 0 \quad X_i, Y_i \text{ incogniti} \quad d_{12} \text{ nota}$$

Inoltre, nel caso in cui vengano misurati gli angoli azimutali α fra i vertici della rete si generano delle equazioni del tipo:

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) - \alpha = 0$$



Il problema del calcolo e della compensazione di una rete di n vertici consiste quindi nella misura indiretta delle $2n$ coordinate, effettuata sulla base delle misure dirette di angoli di direzione, distanze e angoli azimutali in numero strettamente sufficiente o in numero esuberante.

Per la determinazione delle $2n$ coordinate si deve definire e risolvere un sistema di $2r$ equazioni (con $r > n$), e si devono quindi eseguire $2r$ misure dirette indipendenti.

Poichè le equazioni utilizzate non sono lineari, è necessario procedere alla loro linearizzazione calcolando i termini del primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor nell'intorno dei valori approssimati delle incognite.

Consideriamo l'equazione dell'angolo di direzione:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \beta, L_2) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) + \beta - L_2 = 0$$

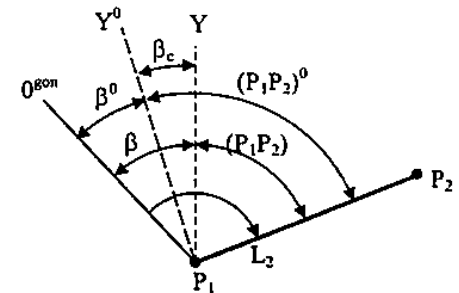
Siano $X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, \beta^0$ i valori approssimati delle incognite. Lo sviluppo in serie di Taylor, fermato ai termini lineari, è:

$$f(X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, \beta^0, L_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 y_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^0 \beta_c = 0$$

dove

$$x_i = X_i - X_i^0$$

sono le correzioni da apportare ai valori approssimati delle incognite.



Calcolando le derivate parziali nei punti approssimati otteniamo i coefficienti:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 = \left[\frac{1}{1 + \frac{(X_2 - X_1)^2}{(Y_2 - Y_1)^2}} \cdot \frac{-1}{Y_2 - Y_1} \right]^0 = -\frac{Y_2^0 - Y_1^0}{(d_{12}^0)^2} = a_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 = \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{(d_{12}^0)^2} = c_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 = \frac{X_2^0 - X_1^0}{(d_{12}^0)^2} = b_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 = -\frac{X_2^0 - X_1^0}{(d_{12}^0)^2} = d_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^0 = 1$$

L'equazione linearizzata sarà dunque:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 Y_2 + \beta_c + (P_1 P_2)^0 + \beta^0 - L_2 = 0$$

Quando uno dei due vertici ha coordinate note l'equazione si semplifica perchè le corrispondenti correzioni saranno nulle.



Reti planimetriche

Operando in modo analogo per l'equazione alla distanza:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, d_{12}) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} - d_{12} = 0$$

Lo sviluppo in serie di Taylor, limitato ai termini lineari è:

$$f(X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, d_{12}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 y_2 = 0$$

Calcolando le derivate parziali con i valori approssimati:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 = \left(\frac{-1}{2\sqrt{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2}} \cdot 2(X_2^0 - X_1^0)\right)^0 = -\frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{12}^0} = a'_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 = -\frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{12}^0} = b'_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 = \frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{12}^0} = c'_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 = \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{12}^0} = d'_1$$

L'equazione linearizzata sarà dunque:

$$a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'_1 x_2 + d'_1 y_2 + d_{12}^0 - d_{12} = 0$$



Reti planimetriche

Per l'equazione dell'angolo azimutale si ha invece:

$$f(X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \alpha) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) - \alpha = 0$$

Sviluppando in serie di Taylor:

$$f(X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0, X_3^0, Y_3^0, \alpha^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 y_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\right)^0 x_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_3}\right)^0 y_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^0 = -\frac{Y_3^0 - Y_1^0}{(d_{13}^0)^2} + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{(d_{12}^0)^2} = a''_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)^0 = \frac{X_3^0 - X_1^0}{(d_{13}^0)^2} - \frac{X_2^0 - X_1^0}{(d_{12}^0)^2} = b''_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^0 = -\frac{Y_2^0 - Y_1^0}{(d_{12}^0)^2} = c''_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_2}\right)^0 = \frac{X_2^0 - X_1^0}{(d_{12}^0)^2} = d''_1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\right)^0 = \frac{Y_3^0 - Y_1^0}{(d_{13}^0)^2} = e''_1 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_3}\right)^0 = -\frac{X_3^0 - X_1^0}{(d_{13}^0)^2} = f''_1$$



Reti planimetriche

L'equazione linearizzata sarà:

$$a''_1 x_1 + b''_1 y_1 + c''_1 x_2 + d''_1 y_2 + e''_1 x_3 + f''_1 y_3 + \alpha^0 - \alpha = 0$$

In questo caso è possibile che uno o due vertici della rete tra cui si è misurato l'angolo azimutale α siano fissi, cioè di coordinate note; l'equazione si semplificherà poichè i corrispondenti termini di correzione saranno nulli.

Linearizzate tutte le equazioni di osservazione sarà possibile scrivere il sistema di r equazioni in n incognite x_i (correzioni da apportare ai valori approssimati) con $r \geq n$. Dal sistema si potrà poi scrivere la matrice disegno A ed il vettore dei termini noti T .

Considerati infine i pesi da attribuire ad ogni misura eseguita:

$$(p_i)_\alpha = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_i}^2} \quad (p_i)_d = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{d_{ij}}^2}$$

sarà possibile risolvere la compensazione con il metodo dei minimi quadrati:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{T}_n$$



Reti planimetriche

Il vettore soluzione X conterrà le correzioni x_i, y_i che, sommate ai valori approssimati delle incognite X_i^0, Y_i^0 , daranno il valore delle incognite X_i, Y_i .

Poichè tutte le equazioni sono state linearizzate in serie di Taylor, nell'intorno dei valori approssimati delle incognite, ma limitatamente ai soli termini lineari, la soluzione andrà ricercata mediante una serie di iterazioni di calcolo.

Ad ogni iterazione, il sistema risolvibile verrà riscritto utilizzando come nuovi valori approssimati quelli calcolati nell'iterazione precedente.

La sequenza iterativa viene interrotta quando i valori delle correzioni x_i sono di un ordine di grandezza inferiori alla precisione delle coordinate incognite.

La decisione di interrompere le iterazioni può anche essere presa nel momento in cui la stima della varianza dell'unità di peso raggiunge il suo valore minimo.



Esercizio

Siano note le coordinate planimetriche di tre caposaldi, 100, 300 e 500. Riferendosi allo schema di rilievo in figura, si determinino tramite il principio ai minimi quadrati le coordinate planimetriche dei punti 200 e 400 con la matrice di varianza covarianza e le relative ellissi d'errore. Le misure realizzate sono:

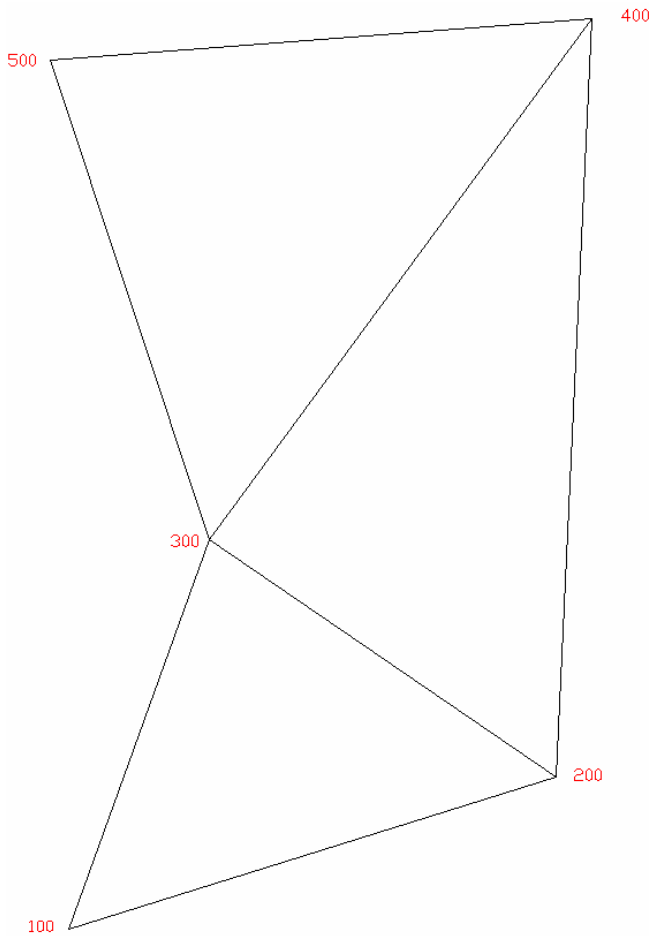
4 distanze: $d_{100-200}$, $d_{500-400}$, $d_{200-300}$, $d_{300-400}$

9 angoli azimutali: $\alpha_{200-100-300}$, $\alpha_{300-200-100}$, $\alpha_{100-300-200}$, $\alpha_{200-300-400}$, $\alpha_{300-400-200}$,
 $\alpha_{400-200-300}$, $\alpha_{400-300-500}$, $\alpha_{500-400-300}$, $\alpha_{300-500-400}$

Misure angolari [gon]		Distanze [m]		Coordinate capisaldi [m]	
$\alpha_{200-100-300}$	58.696	$d_{100-200}$	450.003	E_{100}	99.814
$\alpha_{300-200-100}$	57.393	$d_{500-400}$	478.466	N_{100}	199.972
$\alpha_{100-300-200}$	83.910	$d_{200-300}$	370.349	E_{300}	223.637
$\alpha_{200-300-400}$	97.829	$d_{300-400}$	569.116	N_{300}	542.821
$\alpha_{300-400-200}$	37.369	Coord. Approssimate [m]		E_{500}	83.483
$\alpha_{400-200-300}$	64.806	E_{200}	529	N_{500}	965.021
$\alpha_{400-300-500}$	60.743	N_{200}	334	Precisioni	
$\alpha_{500-400-300}$	54.811	E_{400}	561	σ_{angoli}	0.002 gon
$\alpha_{300-500-400}$	84.448	E_{400}	1001	σ_{distanze}	0.002 m



Esercizio



Soluzione esercizio tramite
foglio di calcolo EXCEL

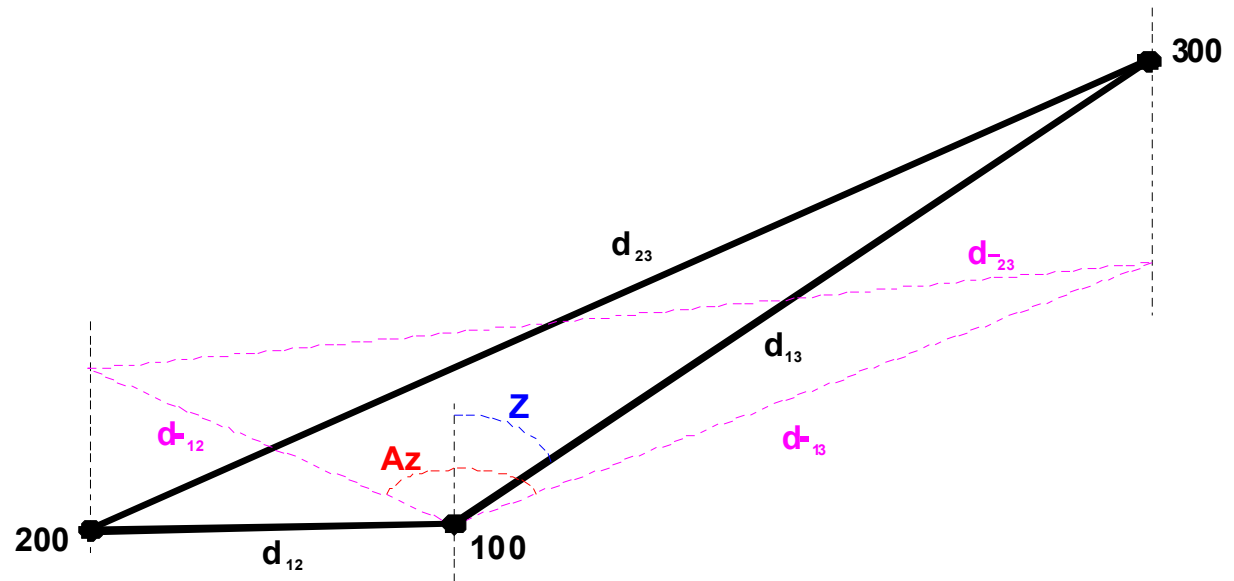


Esempio con equazioni non esuberanti

Proponiamo un esempio numerico risolto con metodi matriciali ma ad equazioni non esuberanti. La tipologia delle misure eseguite fa sì che il problema non sia risolvibile con semplici calcoli su triangoli, ma si debba operare con calcoli iterativi ed equazioni linearizzate.

Dati:

$$\begin{aligned}d_{23} &= 8.595 \\ Az &= 111^{\circ},4343 \\ Z &= 81^{\circ},7230\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}100 &= (0.000, 0.000, 0.000) \\ 200 &= (-2.534, 2.619, -0.894)\end{aligned}$$

Quesito:

Determinare la distanza d_{13} .



Esempio con equazioni non esuberanti

Calcoliamo alcune quantità note:

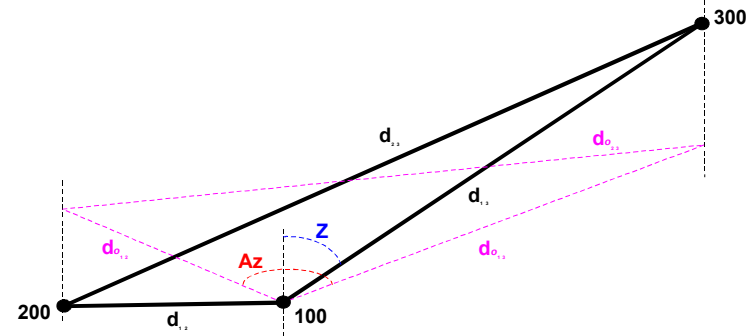
$$d_{12} = \sqrt{(X_{100} - X_{200})^2 + (Y_{100} - Y_{200})^2 + (Z_{100} - Z_{200})^2} = 3.752$$

$$d_{o12} = \sqrt{(X_{100} - X_{200})^2 + (Y_{100} - Y_{200})^2} = 3.644$$

$$\cos(Az) = -0.17864543 \ 22$$

$$\cos(Z) = 0.28316679 \ 14$$

Le equazioni d'osservazione sono:



$$1) \ Z_{300} = d_{13} \cdot \cos(Z) = \sqrt{X_{300}^2 + Y_{300}^2 + Z_{300}^2} \cdot 0.28316679 \ 14$$

$$2) \ d_{23} = \sqrt{(X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 + (Z_{300} + 0.894)^2}$$

$$3) \ d_{o23}^2 = d_{o12}^2 + d_{o13}^2 - 2 \cdot d_{o12} \cdot d_{o13} \cdot \cos(Az)$$

$$(X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 = 13.279 + X_{300}^2 + Y_{300}^2 + 1.309114 \cdot \sqrt{X_{300}^2 + Y_{300}^2}$$



Esempio con equazioni non esuberanti

I legami funzionali fra misure ed incognite sono dunque:

$$f_1 = 0.28316679 \cdot 14 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2 + Z_{300}^2)^{0.5} - Z_{300} = 0$$

$$f_2 = [(X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 + (Z_{300} + 0.894)^2]^{0.5} - 8.595 = 0$$

$$f_3 = (X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 - 13.279 - X_{300}^2 - Y_{300}^2 - \\ - 1.309114 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2)^{0.5} = 0$$

Essendo i legami non lineari, linearizziamo le equazioni con lo sviluppo di Taylor arrestato ai termini di primo grado:

$$f(X_{300}, Y_{300}, Z_{300}, l) = f(X_{300}^0, Y_{300}^0, Z_{300}^0, l) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_{300}} \right) \bigg|_0 (X_{300} - X_{300}^0) + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial Y_{300}} \right) \bigg|_0 (Y_{300} - Y_{300}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial Z_{300}} \right) \bigg|_0 (Z_{300} - Z_{300}^0)$$



Esempio con equazioni non esuberanti

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_{300}} = 0.5 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2 + Z_{300}^2)^{-0.5} \cdot 2 \cdot X_{300}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Y_{300}} = 0.5 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2 + Z_{300}^2)^{-0.5} \cdot 2 \cdot Y_{300}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Z_{300}} = 0.5 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2 + Z_{300}^2)^{-0.5} \cdot 2 \cdot Z_{300} - \frac{1}{0.283166791}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X_{300}} = 0.5 \cdot [(X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 + (Z_{300} + 0.894)^2]^{-0.5} \cdot 2 \cdot (X_{300} + 2.534)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Y_{300}} = 0.5 \cdot [(X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 + (Z_{300} + 0.894)^2]^{-0.5} \cdot 2 \cdot (Y_{300} - 2.619)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Z_{300}} = 0.5 \cdot [(X_{300} + 2.534)^2 + (Y_{300} - 2.619)^2 + (Z_{300} + 0.894)^2]^{-0.5} \cdot 2 \cdot (Z_{300} + 0.894)$$



Esempio con equazioni non esuberanti

$$\frac{\partial f_3}{\partial X_{300}} = 2 \cdot (X_{300} + 2.534) - 2X_{300} - 1.309114 \cdot 0.5 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2)^{-0.5} \cdot 2X_{300}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial Y_{300}} = 2 \cdot (Y_{300} - 2.619) - 2Y_{300} - 1.309114 \cdot 0.5 \cdot (X_{300}^2 + Y_{300}^2)^{-0.5} \cdot 2Y_{300}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial Z_{300}} = 0$$

Posto $x_i = X_i - X_i^0$ eseguiamo il calcolo iterativo tramite il principio dei minimi quadrati.

[Foglio di calcolo EXCEL](#)

I risultati sono:

Punto 300 = (5.505, 3.681, 1.955)

distanza $d_{23} = 6.905$



Esempio con equazioni non esuberanti

Notiamo che in questo caso l'utilizzo dei minimi quadrati è superfluo, poichè le equazioni non sono esuberanti.

Era infatti possibile risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite semplicemente eseguendo l'operazione:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{T}$$

Inoltre, sempre a causa della non esuberanza delle equazioni, è influente l'introduzione di una matrice dei pesi nel processo ai minimi quadrati.

Infine, bisogna osservare che, essendo il numero delle osservazioni uguale a quello delle incognite, non è possibile fornire un'informazione sull'errore eventualmente commesso nelle misure → non c'è un controllo!

Fatte queste osservazioni, notiamo che l'utilizzo del principio dei minimi quadrati, nel caso in cui $n = r$, pur portando comunque al risultato corretto, non è formalmente consigliabile.