

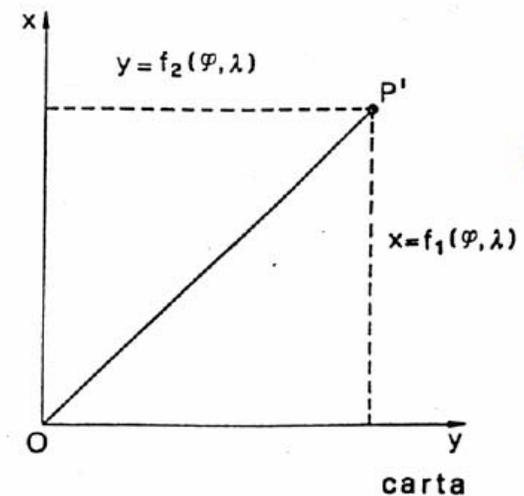
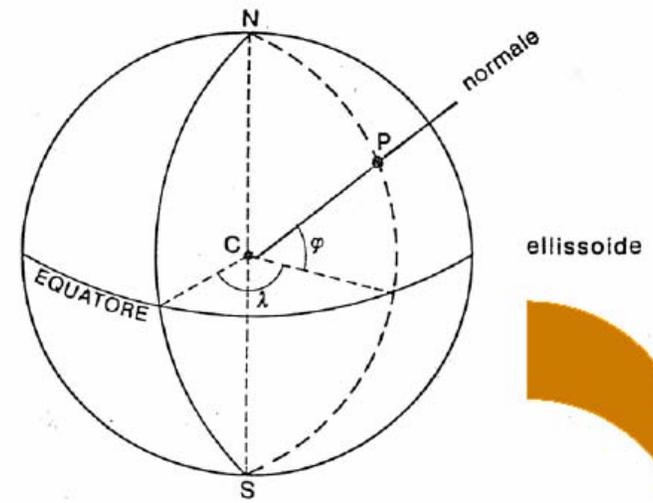
Sistemi cartografici

La scelta dell'ellissoide, della proiezione e di altre caratteristiche riguardanti i sistemi di coordinate, la rete di inquadramento, il taglio degli elementi cartografici e la loro eventuale correlazione in funzione della scala, dà luogo al sistema cartografico.

Definizione di sistema cartografico

E' definito dai 4 elementi seguenti:

1. Proiezione cartografica adottata
2. Sistema di coordinate cartografiche
3. Ellissoide di riferimento
4. Suddivisione dei fusi e nomenclatura delle mappe





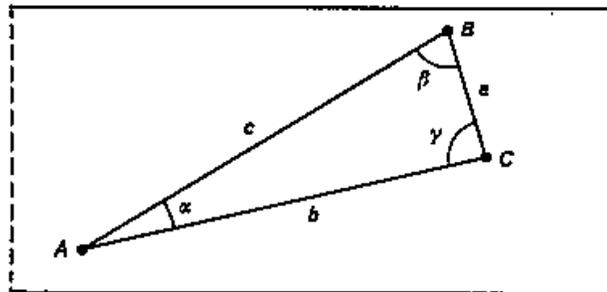
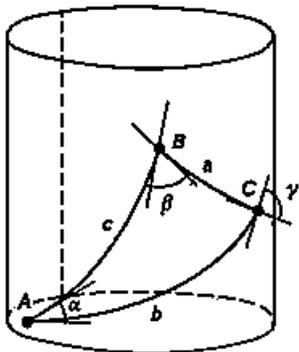
Rappresentazione dell'ellissoide sul piano

Si considerino tre punti A, B, C su di un cilindro e li si congiungano con archi di geodetica → triangolo geodetico sul cilindro.

α, β, γ → angoli formati nei vertici dalle tangenti alle geodetiche
 a, b, c → lunghezze dei lati

Se si sviluppa il cilindro il triangolo geodetico si trasforma in una figura piana e si ha che:

- Ogni arco di geodetica si trasforma in un segmento (*geodetica nel piano*) di retta di ugual lunghezza
- Gli angoli fra i segmenti di retta sono uguali agli angoli α, β, γ .



IL TRIANGOLO
GEODETICO
NON SI DEFORMA



Rappresentazione dell'ellissoide sul piano

Il cilindro è infatti una SUPERFICIE SVILUPPABILE.

L'ellissoide terrestre, così come la sfera, non sono superfici sviluppabili.



QUALSIASI RAPPRESENTAZIONE DELL'ELLISSOIDE
SUL PIANO E' DEFORMATA

Se c'è un unico modo di distendere un cilindro sul piano, vi sono infiniti modi di ottenere una rappresentazione piana dell'ellissoide.

Le rappresentazioni utili nella pratica dovranno avere deformazioni contenute entro determinati limiti e si dovrà tener conto del fatto che le deformazioni sulla carta varieranno da punto a punto.



Per caratterizzare le deformazioni bisogna riferirsi ad elementi infinitesimi e ricavare quelle di elementi finiti tramite integrazione.



Rappresentazione dell'ellissoide sul piano

La rappresentazione dell'ellissoide sul piano può essere:

NUMERICA → determinazione delle coordinate cartografiche, delle lunghezze dei linee, degli angoli fra linee, sempre considerando i valori numerici veri delle grandezze.

GRAFICA → si ricava la CARTA vera e propria quando si stabilisce una scala $1/n$ ed i vari elementi vengono riportati graficamente.

Inizialmente non considereremo l'aspetto grafico della rappresentazione

Per definire la deformazione in un punto della rappresentazione si potranno prendere in considerazione diversi moduli:

- Modulo di deformazione lineare
- Modulo di deformazione areale
- Deformazione angolare



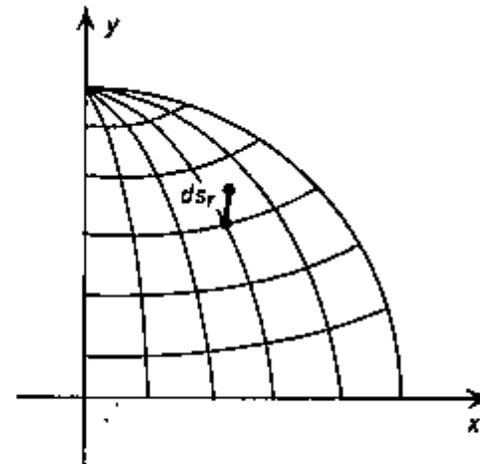
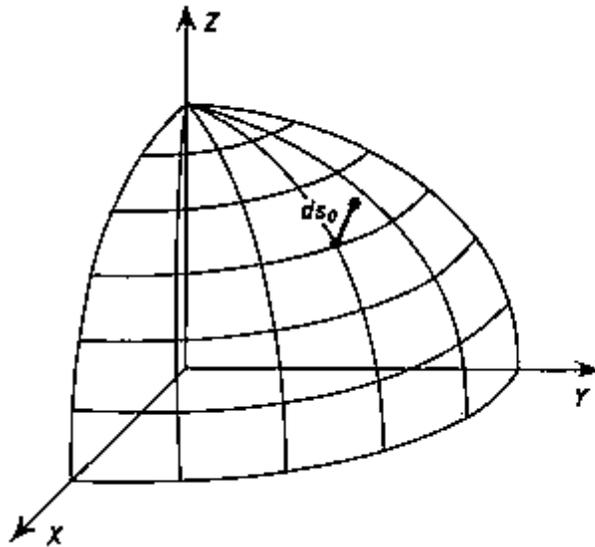
Moduli di deformazione

Se con ds_e si indica un archetto infinitesimo sull'ellissoide e con ds_r il corrispondente nella rappresentazione:

$$m = \frac{ds_r}{ds_e}$$

MODULO DI DEFORMAZIONE
LINEARE

Questo rapporto varia sempre da punto a punto della rappresentazione





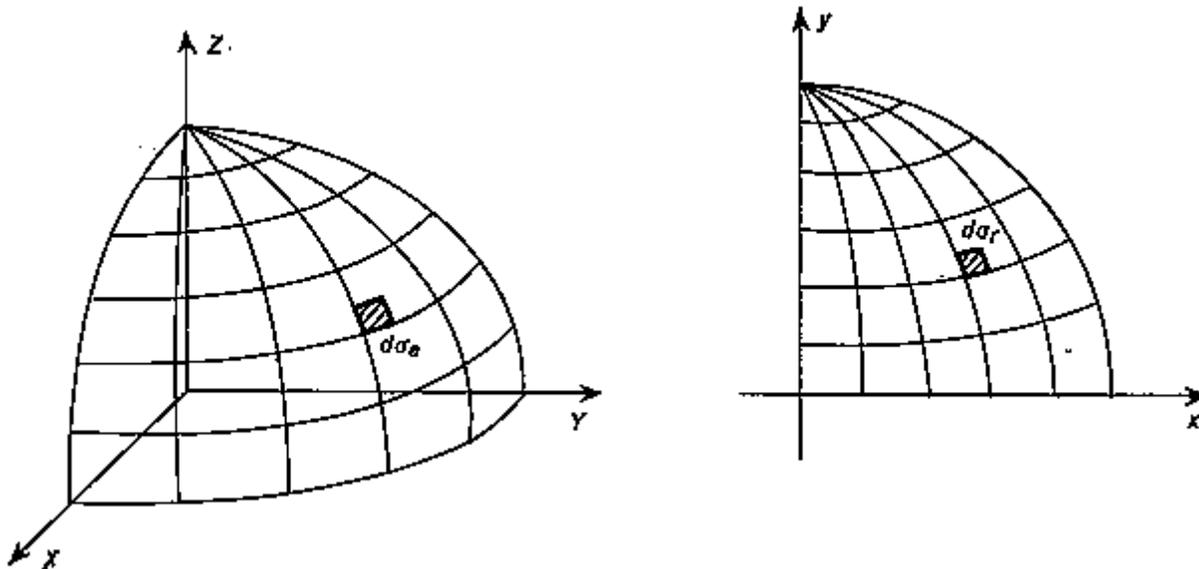
Moduli di deformazione

Se con $d\sigma_e$ si indica l'area racchiusa da un quadrilatero infinitesimo sull'ellissoide e con $d\sigma_r$ quella racchiusa dal corrispondente quadrilatero sulla rappresentazione:

$$m_a = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e}$$

MODULO DI DEFORMAZIONE
AREALE

Anche questo rapporto varia sempre da punto a punto della rappresentazione



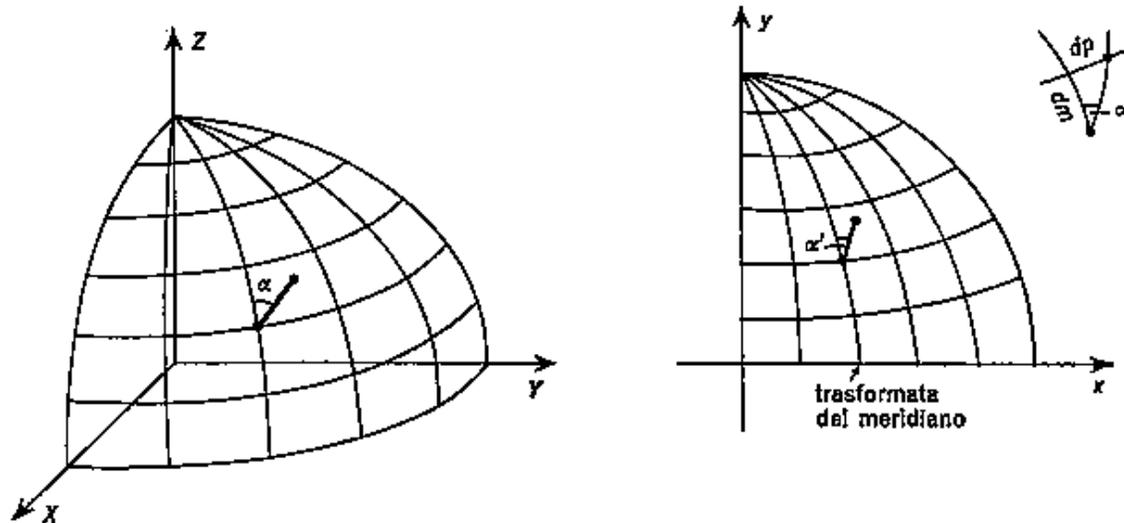
Moduli di deformazione

Si consideri un meridiano sull'ellissoide e la linea (*trasformata del meridiano*) che gli corrisponde nella rappresentazione; un elemento di linea sull'ellissoide forma un angolo α (*azimut*) con il meridiano, l'elemento corrispondente nella rappresentazione forma un angolo α' con la linea trasformata del meridiano.

$$\delta = \alpha' - \alpha$$

DEFORMAZIONE
ANGOLARE

Anche questo rapporto varia sempre da punto a punto della rappresentazione





Definire una rappresentazione

La rappresentazione dell'ellissoide sul piano è definita da due funzioni che stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra la posizione di un punto P sull'ellissoide (*coordinate geografiche* φ e λ) e la posizione del corrispondente punto P' sul piano della rappresentazione (*coordinate piane ortogonali* x e y):

$$x = x(\varphi, \lambda)$$

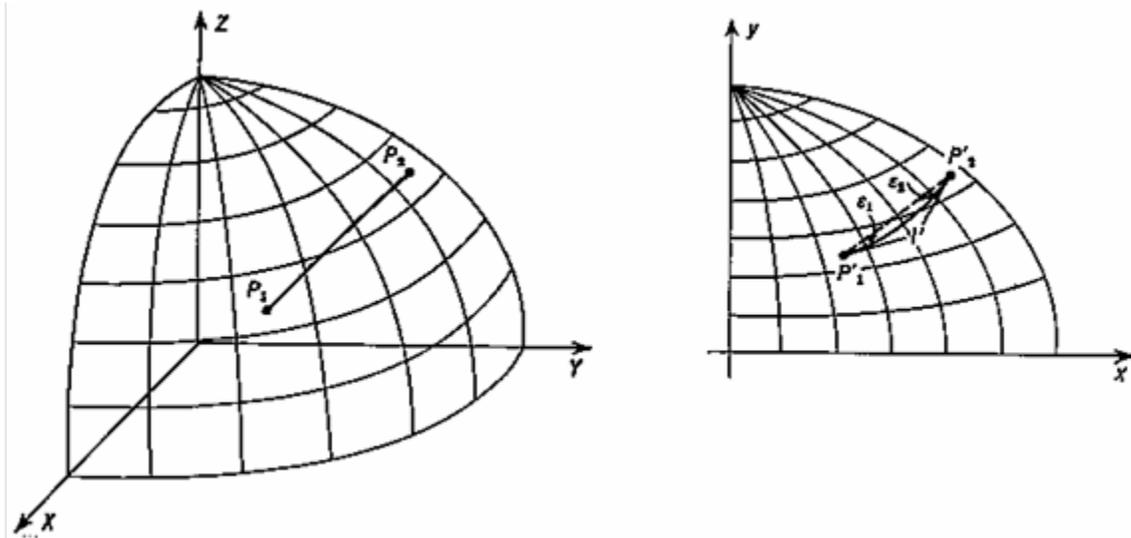
$$y = y(\varphi, \lambda)$$

Bisogna quindi:

- Definire le formule di corrispondenza e quelle inverse $\varphi = \varphi(x, y)$ e $\lambda = \lambda(x, y)$.
- Definire i moduli di deformazione e la deformazione angolare in funzione di φ , λ e x , y .
- Definire il reticolato geografico ovvero le trasformate dei meridiani e dei paralleli ed in particolare l'angolo γ che la tangente alla trasformata del meridiano in un punto forma con la parallela all'asse delle ordinate y .

Definire una rappresentazione

Un arco di geodetica P_1P_2 sull'ellissoide si trasforma in una linea sulla rappresentazione chiamata *trasformata della geodetica*, in generale costituita da un arco di curva che congiunge i punti P_1' e P_2' della rappresentazione.

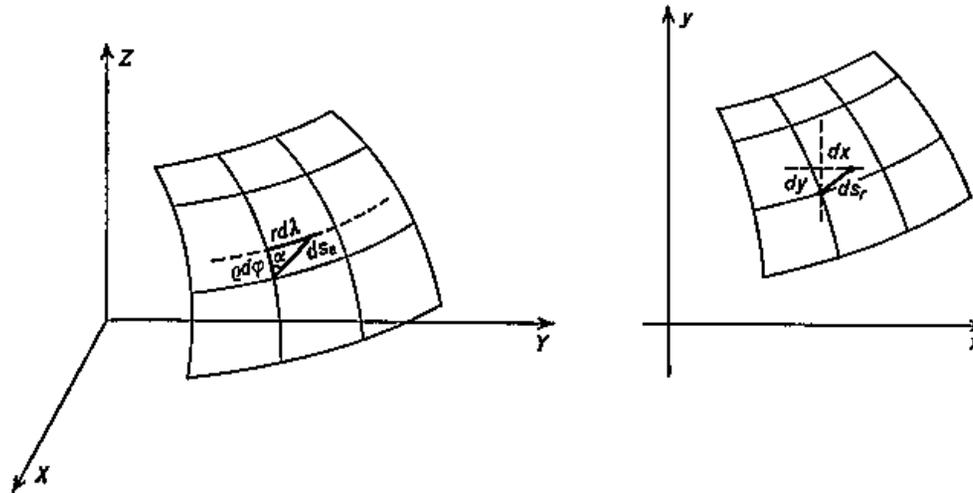


Andranno poi determinati:

- Gli angoli ε_1 e ε_2 che il segmento rettilineo che congiunge P_1' con P_2' forma con le tangenti alla trasformata
- Il rapporto l'/l fra la lunghezza della congiungente rettilinea i punti P_1' e P_2' e la lunghezza l dell'arco di geodetica.

Modulo di deformazione lineare

I moduli di deformazione in un punto della rappresentazione e la deformazione di un angolo si possono esprimere in funzione delle quattro derivate parziali delle equazioni $x = x(\varphi, \lambda)$ e $y = y(\varphi, \lambda)$ rispetto x e y .



Consideriamo il triangolo infinitesimo composto dai lati ds_e , $rd\lambda$ (*elemento di parallelo*) e $\rho d\varphi$ (*elemento di meridiano*). Sia α l'azimut di ds_e . Il triangolo si può considerare piano perchè infinitesimo. Si ha che:

$$ds_e^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2$$



Modulo di deformazione lineare

Trasformate le coordinate geografiche in piane si ottiene il triangolo infinitesimo ds_r , dx , dy :

$$ds_r^2 = dx^2 + dy^2$$

Differenziando le equazioni della carta:

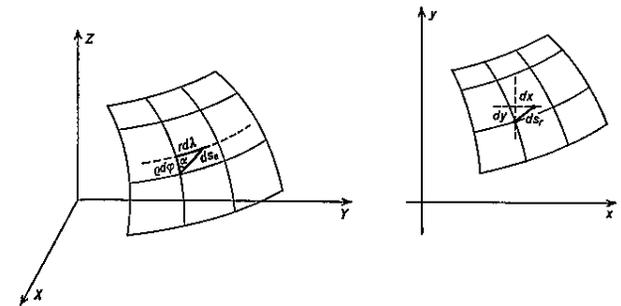
$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

Sostituendo nella relazione del triangolo:

$$ds_r^2 = e \cdot d\varphi^2 + 2 \cdot f \cdot d\varphi \cdot d\lambda + g \cdot d\lambda^2$$

con

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2, \quad f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$





Modulo di deformazione lineare

Dal triangolo infinitesimo si ha anche:

$$\rho \cdot d\varphi = ds_e \cdot \cos\alpha \quad r \cdot d\lambda = ds_e \cdot \sin\alpha$$

Sostituendo nell'equazione:

$$ds_r^2 = e \cdot d\varphi^2 + 2 \cdot f \cdot d\varphi \cdot d\lambda + g \cdot d\lambda^2$$

Si ha:

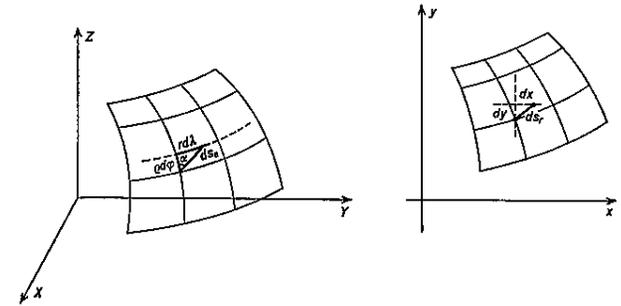
$$m^2 = \frac{ds_r^2}{ds_e^2} = \frac{e}{\rho^2} \cdot \cos^2\alpha + \frac{2f}{r \cdot \rho} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{g}{r^2} \cdot \sin^2\alpha$$

e posto

$$\frac{e}{\rho^2} = e^* \quad , \quad \frac{f}{r \cdot \rho} = f^* \quad , \quad \frac{g}{r^2} = g^*$$

si scrive più semplicemente :

$$m^2 = e^* \cdot \cos^2\alpha + 2f^* \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + g^* \cdot \sin^2\alpha$$



MODULO DI
DEFORMAZIONE
LINEARE

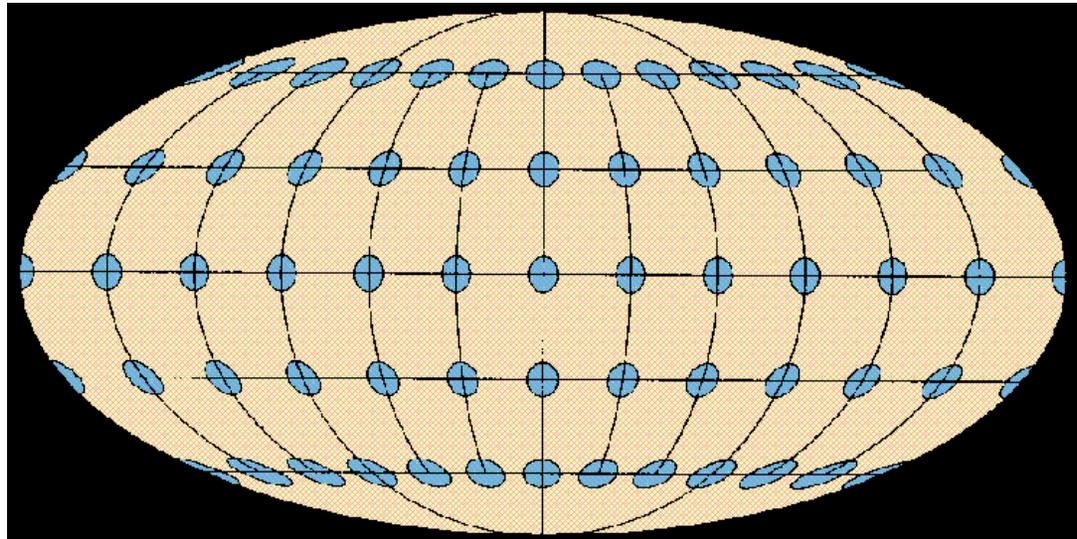
Modulo di deformazione lineare

$$m^2 = e^* \cdot \cos^2 \alpha + 2f^* \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosa} \alpha + g^* \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

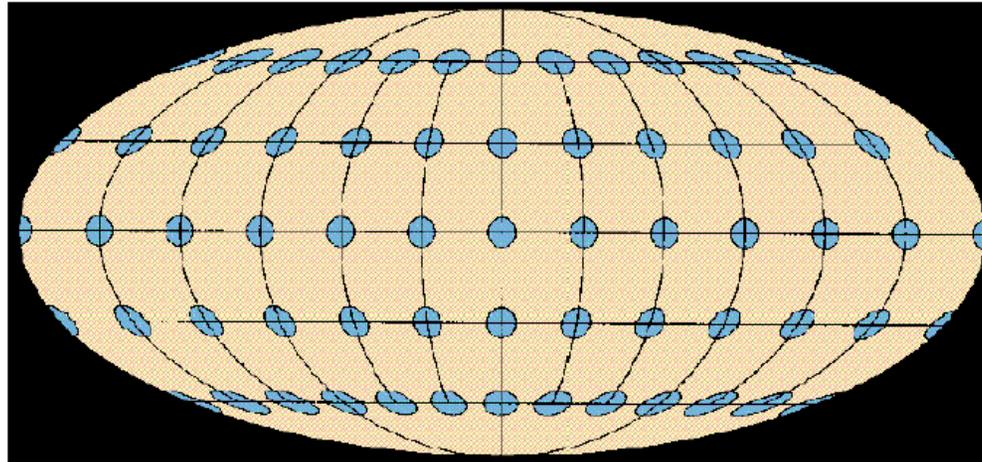
e^* e g^* rappresentano i quadrati dei moduli di deformazione rispettivamente secondo la direzione della trasformata del meridiano ($\alpha = 0$) e secondo la trasformata del parallelo ($\alpha = \pi/2$)

Se a partire da un punto si riportano nelle varie direzioni dei segmenti inversamente proporzionali ai moduli di deformazione, gli estremi di questi segmenti si trovano su un'ellisse.

ELLISSE DELLE
DEFORMAZIONI
O DI TISSOT



Ellissi di Tissot



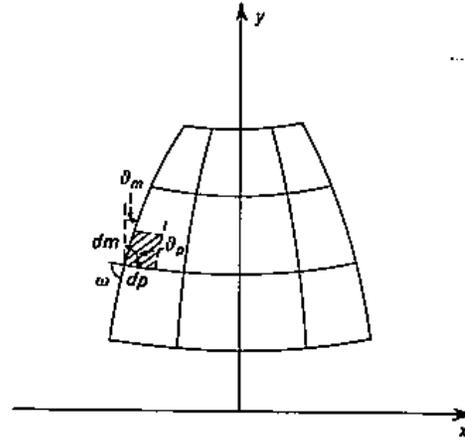
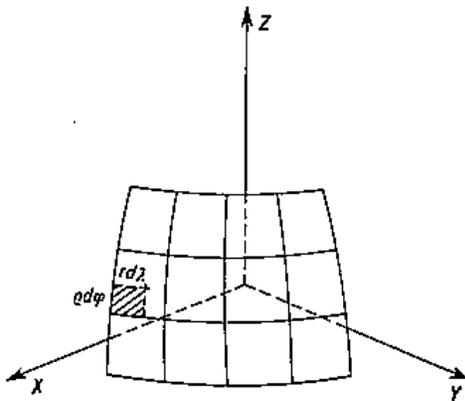
L'informazione fornita dalla ellisse di Tissot in un punto è la seguente:

- se l'area dell'ellisse equivale all'area della circonferenza originale, siamo in presenza di una carta equivalente;
- qualsiasi scostamento dalla forma circolare implica una distorsione di tipo angolare;
- se invece la circonferenza resta tale si ha una carta conforme.

! LE DUE PROPRIETA' (mantenimento delle aree e mantenimento degli angoli) SI ESCLUDONO A VICENDA !

Modulo di deformazione areale

Consideriamo un quadrilatero composto da due segmenti di meridiano e due di parallelo infinitamente vicini.



$$d\sigma_e = \rho \cdot d\varphi \cdot r \cdot d\lambda$$

Sulla rappresentazione agli elementi di meridiano e parallelo corrisponderanno degli elementi deformati, che inoltre non è detto siano ancora ortogonali fra loro ($\omega \rightarrow$ angolo fra dm e dp):

$$dm = \rho \cdot d\varphi \cdot \sqrt{e^*} \quad dp = r \cdot d\lambda \cdot \sqrt{g^*}$$

pertanto

$$d\sigma_r = \rho \cdot d\varphi \cdot \sqrt{e^*} \cdot r \cdot d\lambda \cdot \sqrt{g^*} \cdot \text{sen}\omega$$



Modulo di deformazione areale

Quindi:

$$m_a = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e} = \frac{\rho \cdot d\varphi \cdot r \cdot d\lambda \cdot \sqrt{e^*} \cdot \sqrt{g^*} \cdot \text{sen}\omega}{\rho \cdot r \cdot d\varphi \cdot d\lambda} = \sqrt{e^* \cdot g^*} \cdot \text{sen}\omega$$

E' necessario però esprimere $\sin\omega$ in funzione di e , f , g , ρ , r . Applichiamo il teorema del coseno al triangolo sulla rappresentazione.

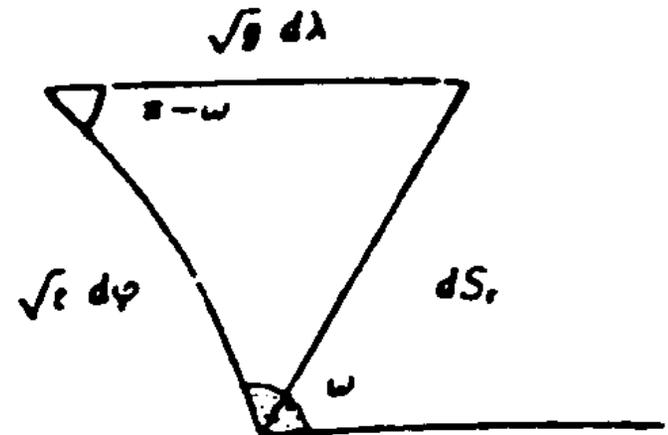
$$\begin{aligned} ds_r^2 &= (\sqrt{e} \cdot d\varphi)^2 + (\sqrt{g} \cdot d\lambda)^2 - 2 \cdot \sqrt{e} \cdot \sqrt{g} \cdot d\varphi \cdot d\lambda \cdot \cos(\pi - \omega) = \\ &= e \cdot d\varphi^2 + g \cdot d\lambda^2 + 2 \cdot \sqrt{e \cdot g} \cdot d\varphi \cdot d\lambda \cdot \cos\omega \end{aligned}$$

Confrontando con l'equazione trovata per il modulo di deformazione lineare:

$$ds_r^2 = e \cdot d\varphi^2 + 2 \cdot f \cdot d\varphi \cdot d\lambda + g \cdot d\lambda^2$$

Si ha che:

$$2f = 2 \cdot \sqrt{e \cdot g} \cdot \cos\omega \quad \rightarrow \quad \cos\omega = f / \sqrt{e \cdot g}$$





Modulo di deformazione areale

$$\cos\omega = f/\sqrt{e \cdot g}$$

$$\begin{aligned}d\sigma_r &= \rho \cdot d\varphi \cdot \sqrt{e^*} \cdot r \cdot d\lambda \cdot \sqrt{g^*} \cdot \text{sen}\omega = \sqrt{e} \cdot \sqrt{g} \cdot d\varphi \cdot d\lambda \cdot \sqrt{1 - \cos^2\omega} = \\ &= \sqrt{e} \cdot \sqrt{g} \cdot d\varphi \cdot d\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{f^2}{e \cdot g}} = \sqrt{e \cdot g - f^2} \cdot d\varphi \cdot d\lambda\end{aligned}$$

$$m_a = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e} = \frac{\sqrt{e \cdot g - f^2}}{\rho \cdot r}$$

$$m_a = \frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

MODULO DI
DEFORMAZIONE
AREALE

Deformazione angolare

Sia α l'azimut dell'elemento ds_e sull'ellissoide e sia α' l'angolo che il corrispondente elemento ds_r forma con la trasformata del meridiano; se con dp e dm si indicano le componenti di ds_r secondo le trasformate del parallelo e del meridiano si ha:

$$\tan \alpha' = \frac{dp}{dm} = \frac{r \cdot d\lambda \cdot \sqrt{g^*}}{\rho \cdot d\varphi \cdot \sqrt{e^*}} = \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi}$$

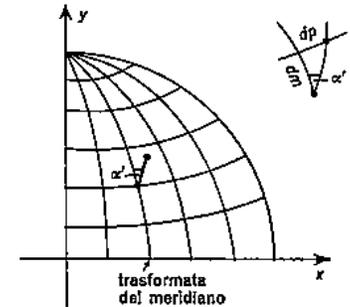
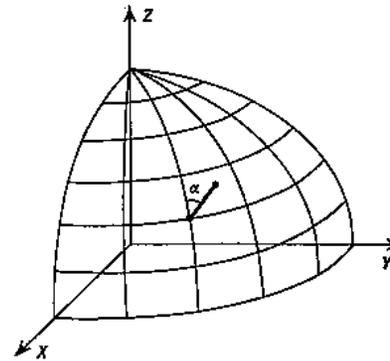
Dal triangolo infinitesimo:

$$\rho \cdot d\varphi = ds_e \cdot \cos \alpha$$

$$r \cdot d\lambda = ds_e \cdot \sin \alpha$$

E quindi:

$$\tan \alpha' = \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \tan \alpha \quad \rightarrow \quad \tan \delta = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \cdot \tan \alpha}$$



$$\tan \delta = \frac{\left(\frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} - 1 \right) \cdot \tan \alpha}{1 + \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \tan^2 \alpha}$$

DEFORMAZIONE
ANGOLARE



Tipi di rappresentazione

La rappresentazione piana dell'ellissoide comporta in ogni caso delle deformazioni !

Rappresentazioni particolari:

ISOGONE (o CONFORMI)

Il modulo di deformazione lineare, pur variando da punto a punto, non varia, in uno stesso punto, al variare della direzione dell'elemento considerato.



Figure infinitesime del piano simili alle corrispondenti sull'ellissoide



La deformazione angolare è nulla in ogni punto



$$\delta = 0$$

Questo tipo di carte può essere molto utile per la navigazione



Tipi di rappresentazione

EQUIVALENTI

In queste rappresentazioni si conserva costante il rapporto fra le aree di due quadrilateri infinitesimi corrispondenti.



$$m_a = 1$$

Le carte equivalenti sono utili per le mappe catastali, che riportano i confini delle proprietà fondiarie.

AFILATTICHE

Sono presenti tutti i tipi di deformazione, ma ognuno è mantenuto nei limiti più ristretti possibili.



$$m, m_a, \delta = \text{minimo}$$



Tipi di proiezione

- **Rappresentazioni per via geometrica**

- “Proiezioni” prospettiche

- “Proiezioni” per sviluppo

cilindriche
coniche

- **Rappresentazioni per via analitica**

si scrivono equazioni del tipo $X = X(\varphi, \lambda)$

X, Y = coordinate punti carta

φ, λ = coordinate punti su ellissoide

$Y = Y(\varphi, \lambda)$

NOTA: queste funzioni devono essere: **regolari**, **continue**, **derivabili** almeno al I ordine, **invertibili** e devono essere tali da limitare le deformazioni

Qualsiasi
rappresentazione
cartografica
presenta
deformazioni



Tipi di proiezione

Le superfici sviluppabili su cui eseguire la proiezione sono:

- PIANO → Proiezioni prospettiche
 - CONO
 - CILINDRO
- } → Proiezioni per sviluppo

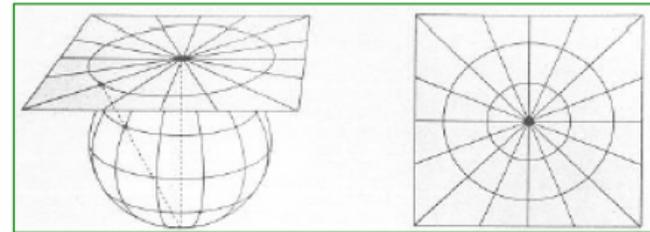
Per le proiezioni prospettiche, a seconda della posizione del punto di proiezione P si individuano proiezioni:

- Centrografiche (*P nel centro dell'ellissoide*)
- Stereografiche (*P diametralmente opposto al punto di tangenza tra l'ellissoide ed il piano di proiezione*)
- Scenografiche (*P esterno alla superficie terrestre*)
- Ortografiche (*P all'infinito*)

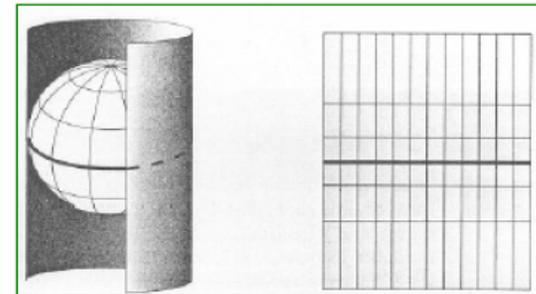
Tipi di proiezione

RAPPRESENTAZIONI PER VIA GEOMETRICA

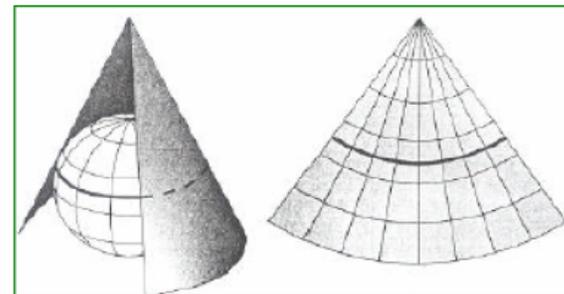
Proiezioni prospettiche



Proiezioni cilindriche



Proiezioni coniche

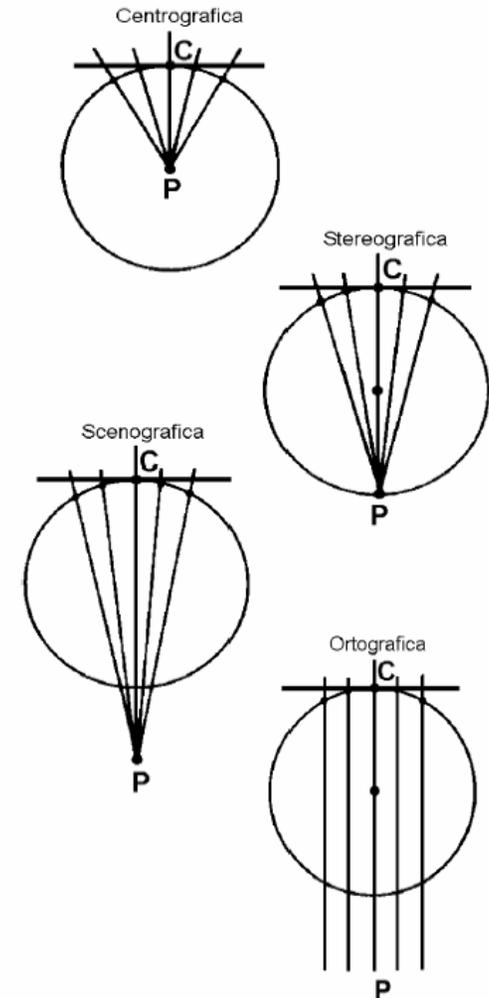


PROIEZIONI PROSPETTICHE PURE

Le proiezioni prospettiche si ottengono tramite la proiezione da un punto P dello spazio di una porzione della superficie di riferimento su di un piano (piano della carta) tangente all'ellissoide, o alla sfera locale, in un punto C .

A seconda della posizione del centro di proiezione P si avranno proiezioni:

- Centrografiche* \Rightarrow P nel centro dell'ellissoide \Rightarrow *afilattica*
- Stereografiche* \Rightarrow P diametralmente opposto al punto di tangenza tra l'ellissoide ed il piano di proiezione \Rightarrow *conforme*
- Scenografiche* \Rightarrow P sempre sulla direzione diametrale ma esterno alla superficie di riferimento \Rightarrow *afilattica*
- Ortografiche* \Rightarrow P sempre sulla direzione diametrale ma all'infinito \Rightarrow *afilattica*



Tipi di proiezione

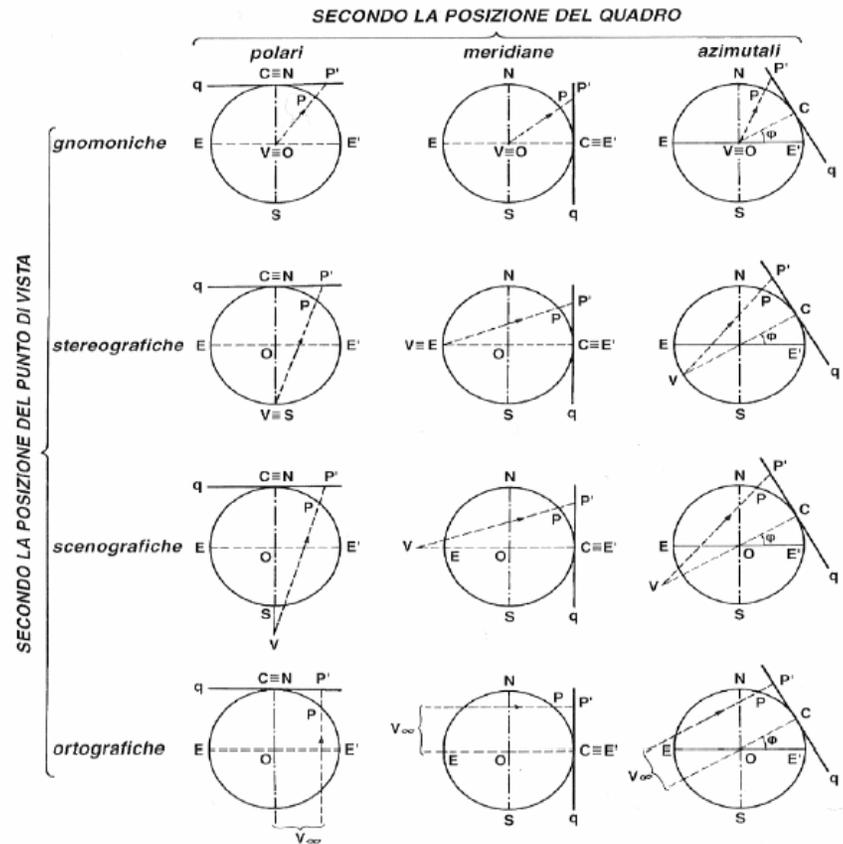
PROIEZIONI PROSPETTICHE PURE

A seconda della posizione del punto C di tangenza si avranno:

-*proiezioni polari* => piano tangente al polo

-*proiezioni meridiane* => piano tangente in un punto dell'equatore

-*proiezioni azimutali* => piano tangente in un punto qualunque della superficie della sfera

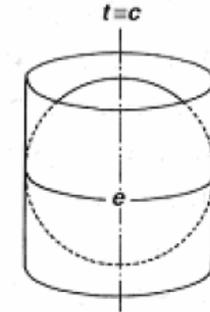


Tipi di proiezione

PROIEZIONI CILINDRICHE

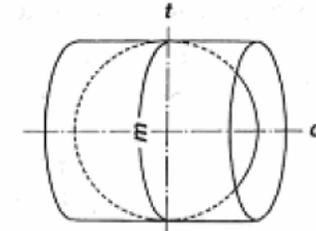
proiezione cilindrica diretta:

il cilindro è tangente all'equatore ed il centro di proiezione P è situato al centro dell'ellissoide



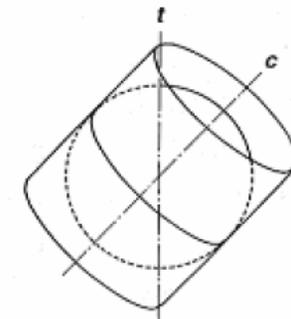
-proiezione cilindrica inversa:

cilindro è tangente lungo un meridiano ed il centro di proiezione P è situato al centro dell'ellissoide



-proiezione cilindrica obliqua:

l'asse del cilindro è comunque orientato rispetto all'asse minore dell'ellissoide (asse di rotazione)



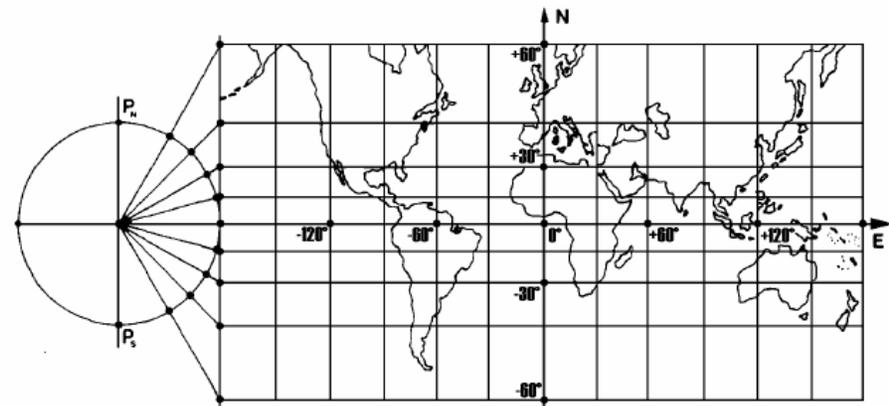
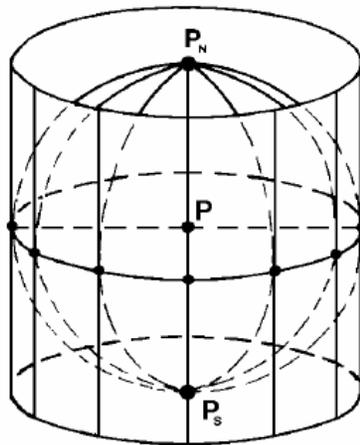
Tutte le proiezioni cilindriche sono afilattiche

PROIEZIONE CILINDRICA DIRETTA

La **proiezione cilindrica diretta** è equidistante soltanto lungo l'equatore

Nello sviluppo sul piano di una proiezione cilindrica diretta si può notare che le immagini sia dei meridiani sia dei paralleli costituiscono due fasci di rette parallele fra loro ortogonali.

Le distanze fra i meridiani risultano proporzionali alle differenze delle loro longitudini mentre la distanza fra i paralleli è funzione della latitudine e le deformazioni della carta crescono rapidamente con la latitudine.

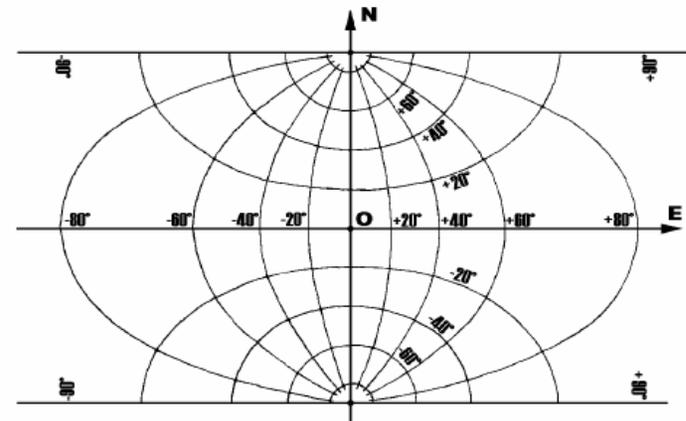
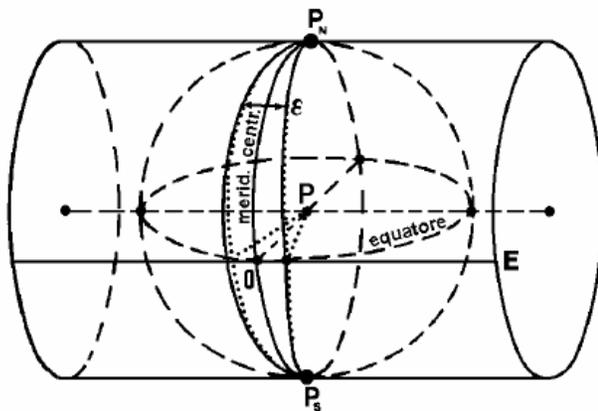


PROIEZIONE CILINDRICA INVERSA

La **proiezione cilindrica inversa** è equidistante soltanto lungo il meridiano di tangenza.

Nello sviluppo sul piano di una proiezione cilindrica inversa, relativamente al semiellissoide compreso fra le longitudini di $\pm 90^\circ$, è da notare in particolare che i meridiani di longitudine $\pm 90^\circ$ si scindono in due semirette parallele all'asse delle E.

I meridiani risultano fortemente deformati all'aumentare delle differenze di longitudine dal meridiano di tangenza, così come i paralleli all'aumentare della latitudine.



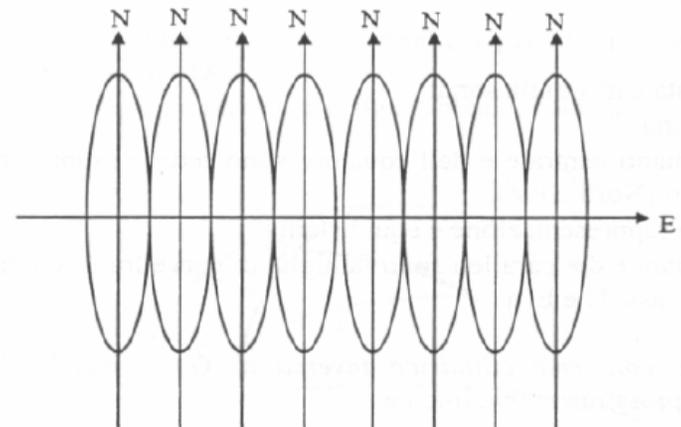
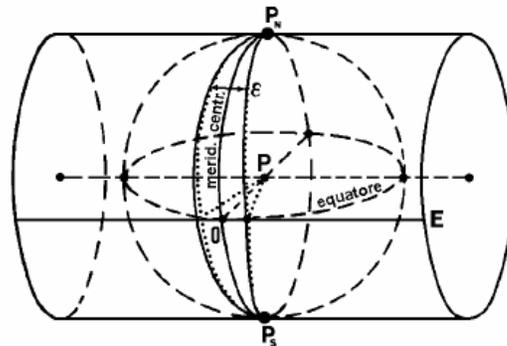
PROIEZIONE CILINDRICA INVERSA

Per ridurre le fortissime deformazioni è necessario limitare notevolmente il valore della differenza di longitudine tra il meridiano centrale e le zone da cartografare, per cui la rappresentazione viene fatta per fusi di una determinata ampiezza, per ognuno dei quali si assume un diverso meridiano di riferimento.

Per rappresentare tutta la terra si ricorre ad un sistema policilindrico formato da più fusi ottenuti ruotando l'ellissoide di una certa ampiezza

Ogni fuso quindi avrà un suo meridiano di tangenza, cioè l'asse N varierà da fuso a fuso, mentre l'asse E sarà sempre rappresentato dall'equatore.

Ogni fuso ha quindi un sistema di riferimento (N,E) indipendente.



PROIEZIONI CONICHE

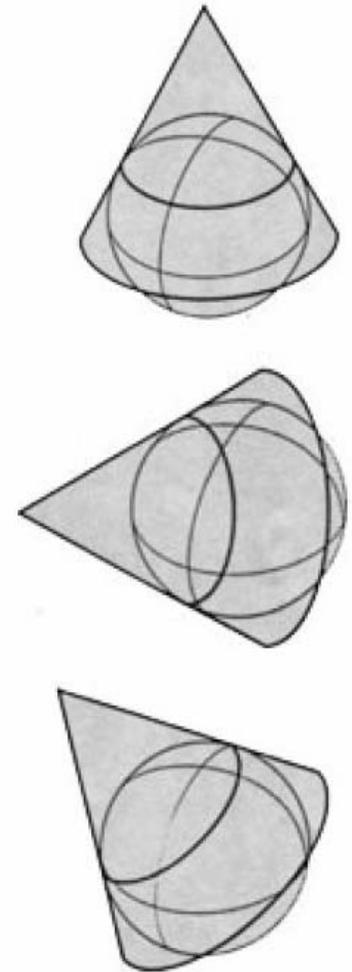
Le più note proiezioni coniche:

- Diretta*
- Inversa*
- Obliqua*

Le proiezioni coniche sono *afilattiche* e mantengono l'equidistanza solo sul parallelo di tangenza.

Per contenere la deformazione è necessario limitare in latitudine la fascia della Terra che si vuol restituire.

Per la rappresentazione di vasti territori si ricorre ad una proiezione policonica; cioè a proiezioni coniche ottenute con coni di apertura variabile.

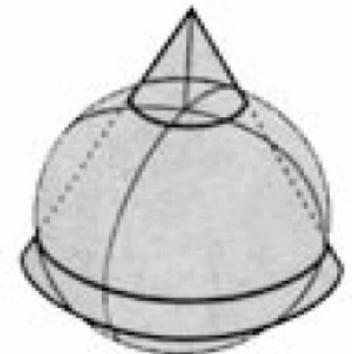
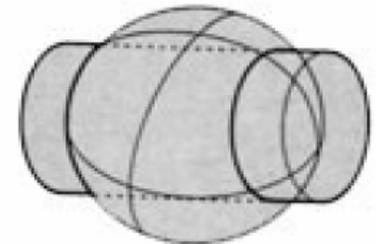
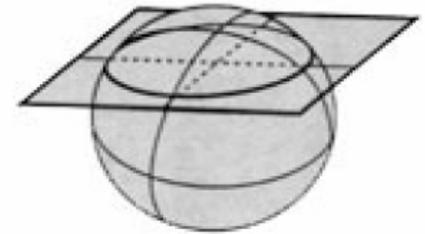


PROIEZIONI POLICENTRICHE – PROIEZIONE SU SUPERFICIE SECANTE

E' evidente come le deformazioni aumentino allontanandosi dalla zona di tangenza; per contenerle entro limiti accettabili è necessario limitare la zona della Terra da rappresentare in un intorno della zona di tangenza.

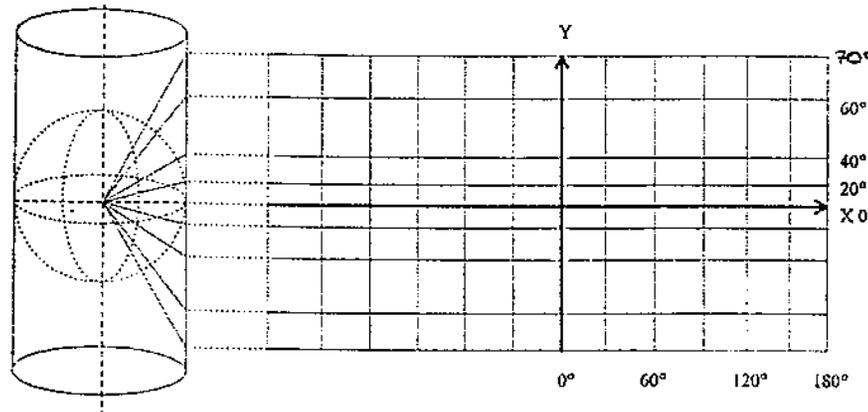
Per rappresentare zone molto ampie si ricorre alle *rappresentazioni policentriche*: si suddivide la zona da rappresentare in porzioni e per ognuna di queste si sceglie in modo opportuno la posizione della superficie di proiezione. Ciò porta però a tener conto dei problemi che nascono al riguardo della corrispondenza tra punti posti in prossimità dei confini di ogni porzione.

A parità di deformazioni, si può aumentare la zona della terra da cartografare ricorrendo all'artificio di rendere la *superficie di proiezione secante* anziché tangente.



Carta di Mercatore

La carta di Mercatore (1569) non si ottiene direttamente per proiezione geometrica, ma per iniziare si può considerare una proiezione cilindrica diretta centrale.



Nello sviluppo, paralleli e meridiani sono rappresentati da rette parallele agli assi X e Y. La distanza fra le rette che rappresentano lo sviluppo dei paralleli va crescendo verso i Poli con legge tangenziale → ingigantimento della scala andando dall'Equatore verso i Poli.

Considerando la sfera come superficie di riferimento le equazioni della carta sono:

$$\begin{cases} X = R \cdot \lambda \\ Y = R \cdot \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

Carta di Mercatore

Mercatore modificò la proiezione cilindrica al fine di contenere le deformazioni. Le equazioni della carta di Mercatore sono:

$$\begin{cases} X = a \cdot \lambda \\ Y = a \cdot \ln \left[\left(\frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{cases}$$

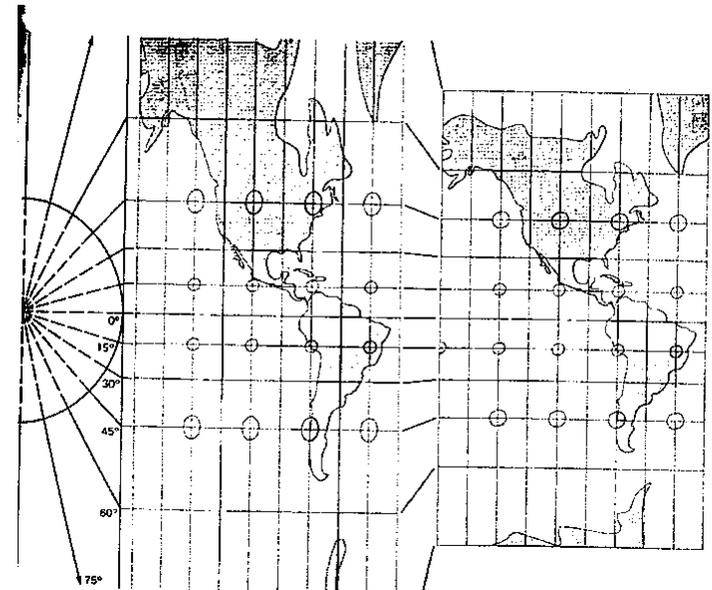
$a \rightarrow$ semiasse maggiore ellissoide

$e \rightarrow$ eccentricità dell'ellissoide

Nella carta di Mercatore la spaziatura fra i paralleli non aumenta così rapidamente come nella proiezione cilindrica centrale.

Nella figura vengono confrontate le ellissi di Tissot per le due rappresentazioni.

Nella carta di Mercatore le ellissi diventano cerchi perchè m è costante per ogni direzione uscente dal punto.





Carta di Mercatore

L'informazione fornita dall'ellissi di Tissot in un punto è la seguente:

- se l'area dell'ellisse equivale all'area della circonferenza originale, siamo in presenza di una carta equivalente;
- qualsiasi scostamento dalla forma circolare implica una distorsione di tipo angolare; se invece la circonferenza resta tale si ha una carta conforme.

! LE DUE PROPRIETA' (mantenimento delle aree e mantenimento degli angoli) SONO MUTUAMENTE ESCLUSIVE !

Calcolando m lungo un parallelo, si ottiene:

$$ds_r = a \cdot d\lambda \quad , \quad ds_e = r \cdot d\lambda \quad , \quad r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$m = \frac{ds_r}{ds_e} = \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad m = \frac{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varphi}$$

m è costante lungo un parallelo, ma varia fortemente al variare della latitudine !



Carta di Mercatore

!! NON E' CONVENIENTE USARE LA RAPPRESENTAZIONE DI MERCATORE PER ZONE TROPPO LONTANE DALL'EQUATORE !!

Caratteristiche fondamentali della carta di Mercatore sono:

- meridiani e paralleli si intersecano tutti ad angolo retto
- il fattore di scala è costante in un punto lungo qualunque direzione

→ RAPPRESENTAZIONE CONFORME

!! Le figure però si mantengono simili solo per aree limitate !!

Una linea retta interseca sulla carta tutti i meridiani con un angolo costante e rappresenta una direzione costante sulla terra

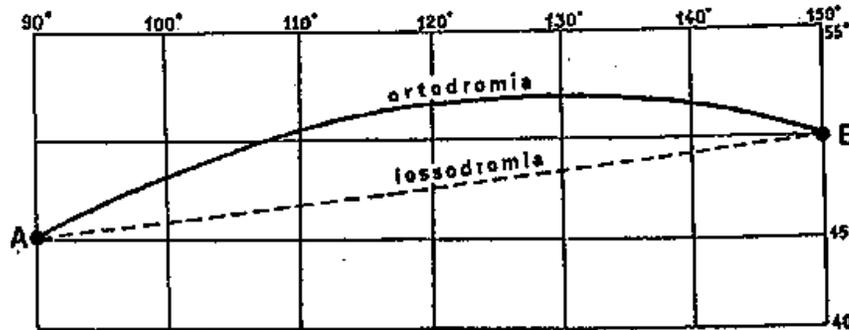
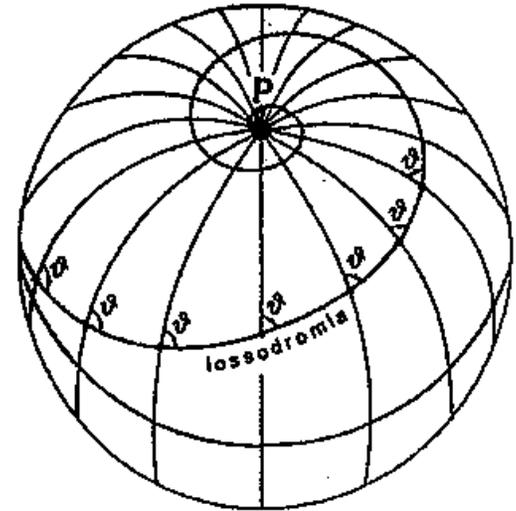


Carta di Mercatore particolarmente utile per la navigazione

Carta di Mercatore

LOSSODROMIA → linea di rotta costante (utile per la navigazione perchè è il percorso più facile da seguire).
La lossodromia non è però il percorso più breve.

ORTODROMIA → è il percorso più breve fra due punti e coincide con la geodetica. Le ortodromie rappresentano rotte ad azimuth variabile ed appaiono sulla proiezione di Mercatore come linee curve



Proiezione stereografica polare

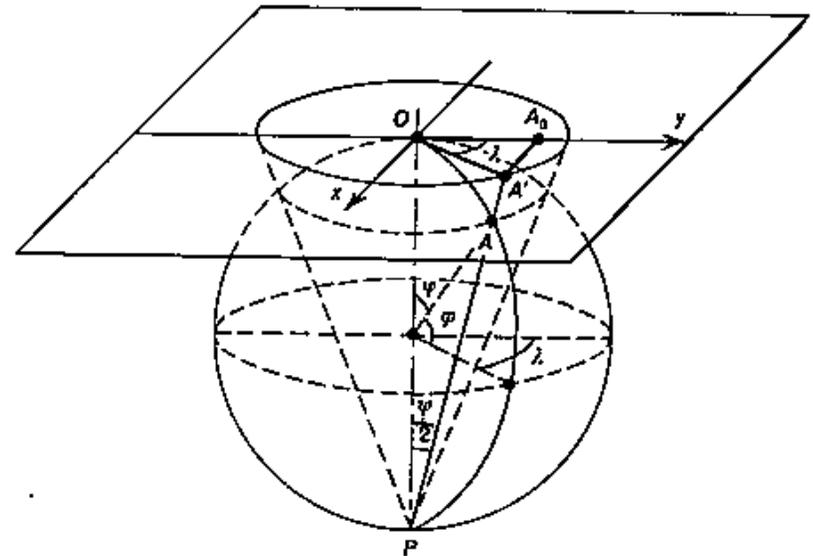
Nella rappresentazione stereografica polare i punti dell'ellissoide sono proiettati su un piano tangente ad un polo, con il centro di proiezione sull'altro polo. E' l'unica proiezione geometrica prospettica CONFORME.

Utilizzata per rappresentare la terra dalla latitudine di $\pm 80^\circ$ a $\pm 90^\circ$ (*carte delle calotte polari*) ad integrazione della cartografia trasversa di Mercatore (UTM), che vedremo in seguito.

Considerando come superficie di riferimento la sfera di raggio R, le equazioni della carta sono:

$$O\hat{P}A = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad OA' = 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} X = 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \lambda \\ Y = 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \operatorname{cos} \lambda \end{cases}$$





Proiezione stereografica polare

Facendo il rapporto delle due equazioni si elimina la coordinata φ e risulta:

$$Y = X \cdot \cot \lambda$$

Per $\lambda = \text{cost.}$ si ha l'equazione di una retta \rightarrow i meridiani sono rappresentati da rette uscenti dall'origine delle coordinate cartografiche.

Eliminando invece λ si ha:

$$X^2 + Y^2 = \left[2 \cdot R \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^2$$

Per $\varphi = \text{cost.}$ si ha l'equazione di un cerchio \rightarrow i paralleli si trasformano in circonferenze concentriche.

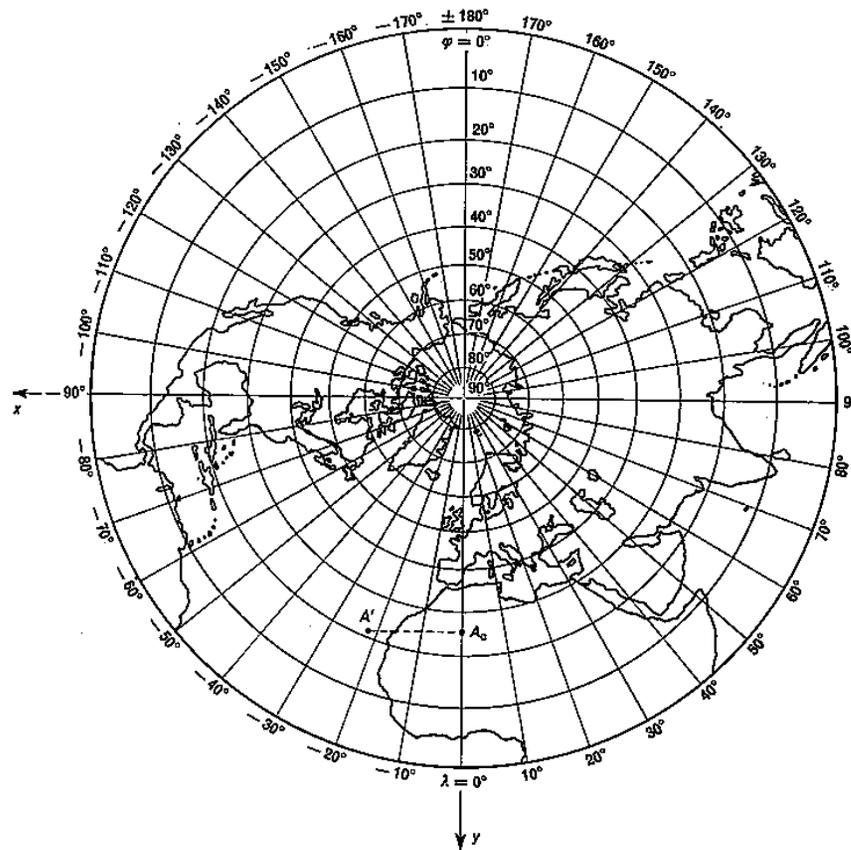
Inoltre si ha:

$$m = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$$

Proiezione stereografica polare

Paralleli e meridiani si intersecano ad angolo retto, e poichè il fattore di scala è uguale in tutte le direzioni in un punto, la proiezione è conforme.

In questa proiezione, inoltre, la ortodromia (*geodetica*) che collega due punti A e B sulla superficie terrestre si può considerare rettilinea.



Proiezione stereografica polare

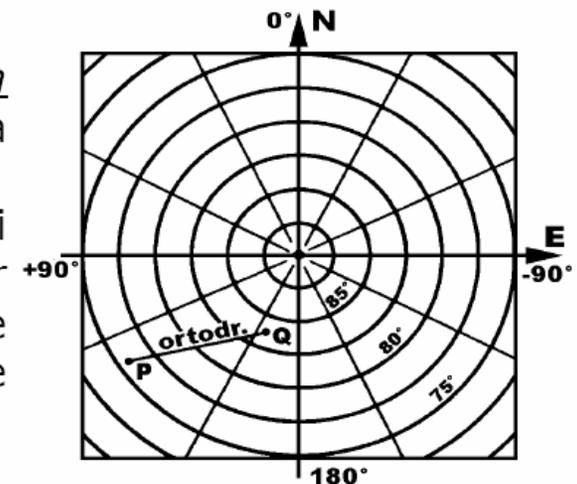
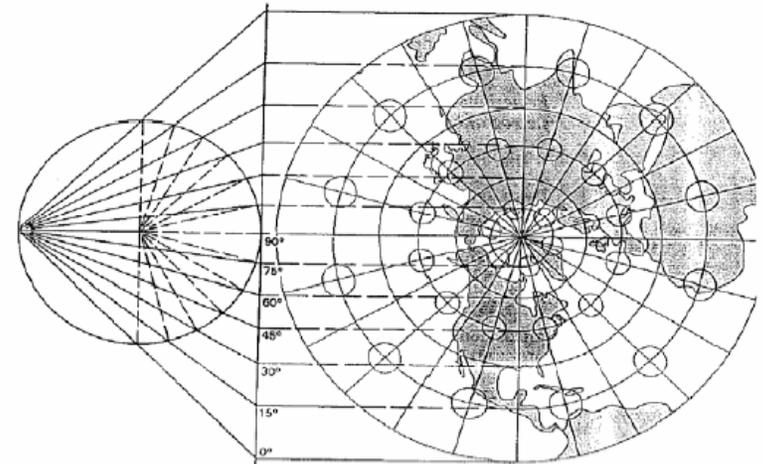
Il modulo di deformazione lineare vale:

$$m_l = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$$

ed aumenta al diminuire della latitudine.

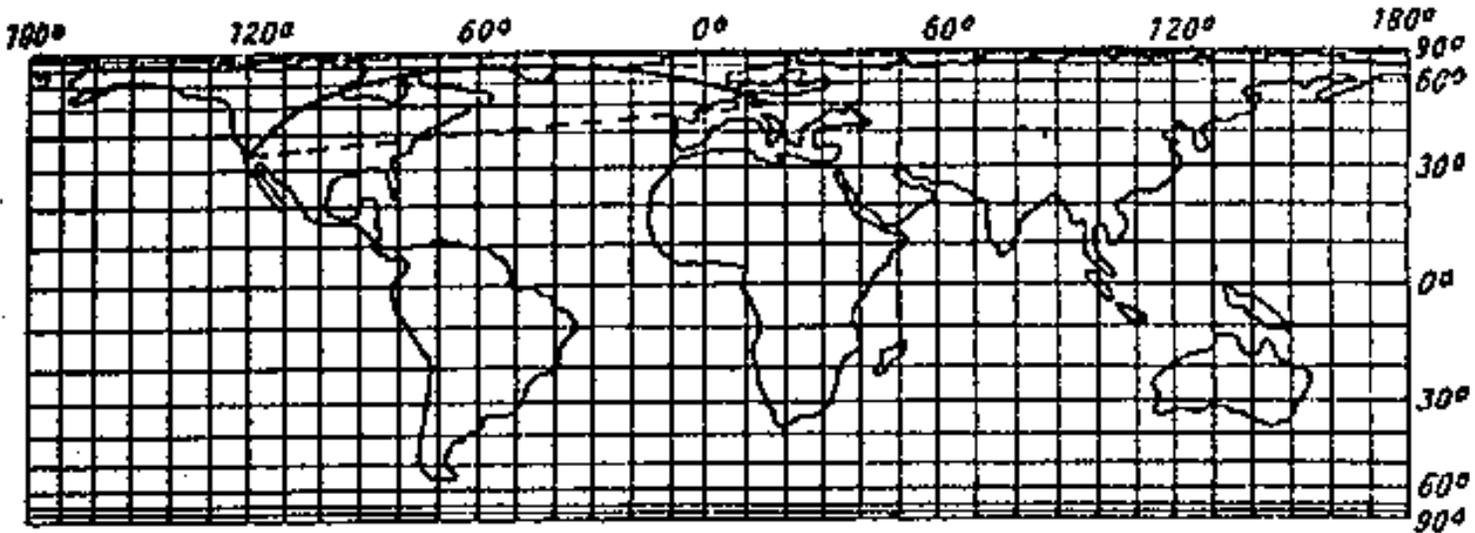
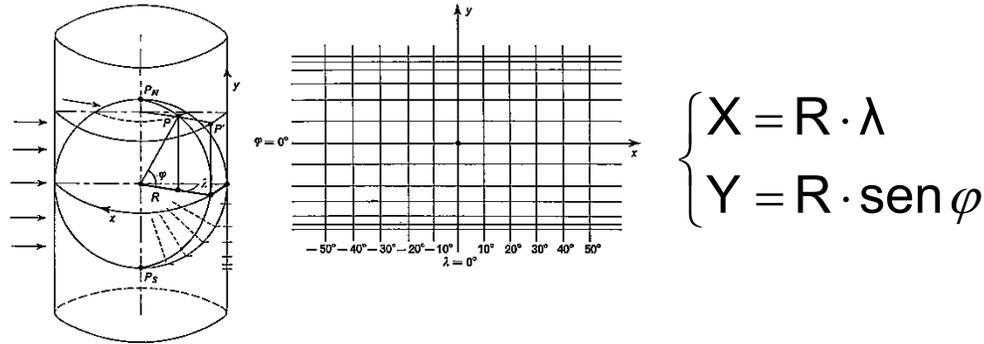
Paralleli e meridiani si intersecano ad angolo retto, e poiché il fattore di scala è uguale per tutte le direzioni uscenti da un punto, la proiezione è conforme.

In questa proiezione, inoltre, la ortodromia (geodetica) che collega due punti A e B sulla superficie terrestre si può considerare rettilinea. Unendo così i due punti sulla carta con una retta si possono misurare gli angoli di rotta da tenere per seguire il percorso minimo e sono gli angoli, sempre diversi, che la retta forma con i meridiani (viene utilizzata per la navigazione marittima ed aerea).



Proiezione cilindrica di Lambert

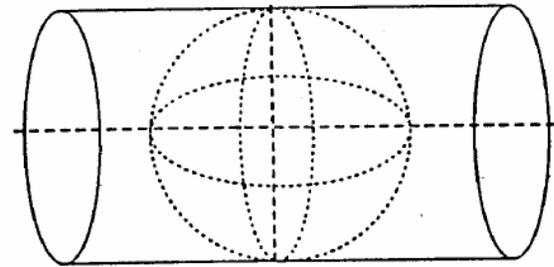
E' una delle rappresentazioni utilizzate per rappresentare l'intera superficie terrestre in modo equivalente, secondo un planisfero.



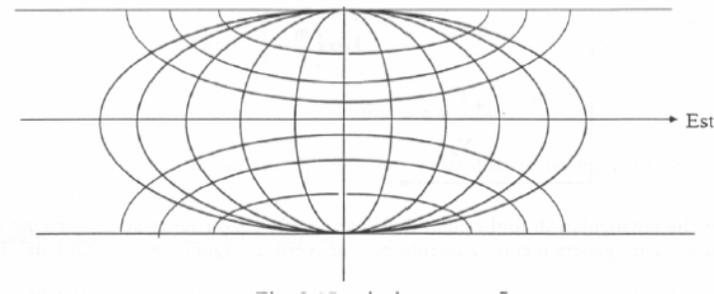
Proiezione Trasversa di Mercatore – Carta di Gauss (1820)

La rappresentazione di Gauss deriva da una proiezione cilindrica inversa, cioè l'asse del cilindro è ortogonale all'asse di rotazione terrestre.

La trasformata del meridiano centrale di tangenza e dell'equatore sono rette e coincidono con gli assi del sistema di riferimento.



Inoltre la trasformata del meridiano di tangenza è una linea standard.



Entrambe queste famiglie di curve sono tra loro ortogonali e simmetriche rispetto agli assi di riferimento.

Le trasformate dei paralleli sono curve approssimativamente paraboliche; quelle dei meridiani sono curve più complesse e sono via via più inclinate con l'aumentare di φ e λ .

Esaminando il reticolato geografico si nota come le deformazioni lineari e conseguentemente quelle superficiali crescano velocemente allontanandosi dal meridiano centrale: la dilatazione delle figure cresce rapidamente diventando intollerabile.



Proiezione Trasversa di Mercatore – Carta di Gauss (1820)

La rappresentazione di Gauss è **costruita analiticamente**.

Le equazioni della carta, che mettono in relazione un generico punto P dell'ellissoide, di coordinate ellissoidiche φ e λ , e il punto corrispondente P' di coordinate cartografiche N, E sono state ricavate da Gauss imponendo le seguenti condizioni:

1. il meridiano ellissoidico assunto come origine delle longitudini ($\lambda=0$) "meridiano di tangenza" deve trasformarsi nell'asse delle ordinate N;
2. l'equatore ellissoidico deve trasformarsi nell'asse delle ascisse E;
3. un arco di lunghezza l sul meridiano origine deve trasformarsi in un segmento di uguale lunghezza sull'asse delle ordinate N;
4. l'angolo α formato da due direzioni uscenti da un punto sull'ellissoide deve mantenersi uguale a quello delle corrispondenti direzioni riportate nella carta;
5. - il modulo di deformazione lineare, pur variando da punto a punto, deve essere uguale in tutte le direzioni uscenti da un punto.

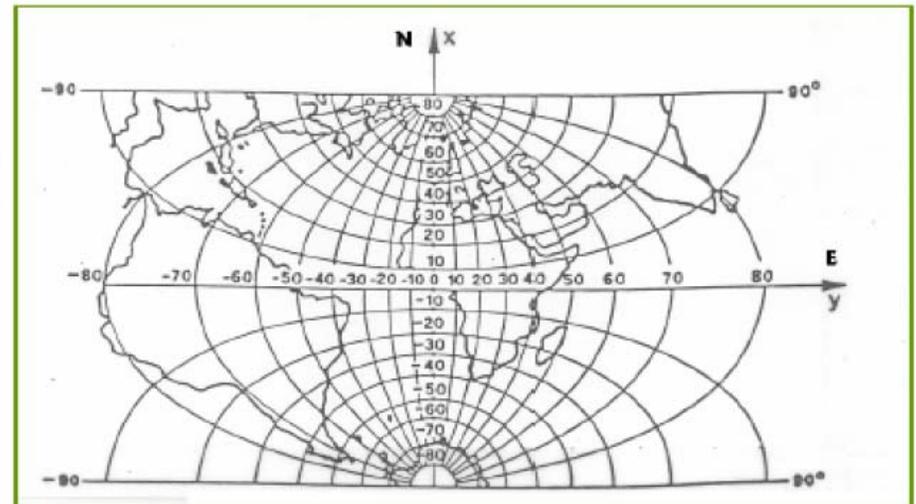
Proiezione Trasversa di Mercatore – Carta di Gauss (1820)

Quindi, le principali caratteristiche di questa carta sono:

- è una carta conforme: la deformazione angolare è nulla
- Il modulo di deformazione lineare dipende solo dalla posizione
- sul meridiano centrale la rappresentazione è equidistante (il meridiano centrale è una linea standard)
- le trasformate del meridiano centrale (o meridiano di tangenza) e dell'equatore sono rette e rappresentano gli assi Nord ($\lambda=0$) e Est ($\varphi=0$)

del sistema di riferimento della rappresentazione

-le trasformate dei meridiani e dei paralleli sono famiglie di curve fra loro perpendicolari e simmetriche rispetto agli assi N e E.





Rappresentazioni conformi

Si richiede che il modulo di deformazione sia indipendente dall'angolo α e quindi che m^2 deve essere costante rispetto ad α .

$$\frac{dm^2}{d\alpha} = 0 \quad m^2 = e^* \cdot \cos^2\alpha + 2f^* \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + g^* \cdot \sin^2\alpha$$

$$\begin{aligned} -2 \cdot e^* \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2 \cdot f^* \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot f^* \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot g^* \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha &= 0 \\ 2 \cdot f^* \cdot \cos(2\alpha) + (g^* - e^*) \cdot \sin(2\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Dovendo valere per ogni valore di α :

$$\begin{cases} e^* = g^* \\ f^* = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{g}{e} = \frac{r^2}{\rho^2}$$

Si ricava la prima condizione:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right]$$

Ricordando che:

$$\frac{e}{\rho^2} = e^*, \quad \frac{f}{r \cdot \rho} = f^*, \quad \frac{g}{r^2} = g^*$$

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$



Rappresentazioni conformi

La seconda condizione è invece:

$$f^* = 0 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

Si introduce, al posto della latitudine φ , una nuova coordinata u (*latitudine ridotta o conforme*) tale che $du = \rho \cdot d\varphi / r$.

L'introduzione di u consente di ottenere una forma più semplice delle condizioni di conformità in cui non compare più il rapporto ρ / r , che dipende dalla latitudine.

Per come è stata definita u si ha che:

$$ds_e^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + r^2 \cdot du^2 = r^2 \cdot (d\lambda^2 + du^2)$$

Inoltre, considerato che:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$



Rappresentazioni conformi

Le condizioni di conformità diventano:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right]$$



$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$



$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}\right)^2 \right] = 0$$



$$\frac{\partial y}{\partial u} = - \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$



Il segno “+” determinerebbe un m assurdo

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$



$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$



$$\frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} = - \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$$



$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = + \frac{\partial x}{\partial u}$$



Rappresentazioni conformi

Le equazioni differenziali delle rappresentazioni conformi sono dunque:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = +\frac{\partial x}{\partial u} \end{cases}$$

CONDIZIONI DI
CAUCHY-RIEMANN

Le rappresentazioni conformi sono dunque definite da un sistema di equazioni alle derivate parziali → Le soluzioni si possono trovare a meno di funzioni arbitrarie.



Infinite rappresentazioni conformi possibili

I vari tipi di carte si ottengono imponendo condizioni al contorno, ad esempio stabilendo quale valore deve assumere il modulo di deformazione lineare lungo la trasformata di una determinata linea.



Rappresentazioni conformi

Calcoliamo ora il modulo di deformazione per le rappresentazioni conformi.
Ricordando che:

$$\frac{e}{\rho^2} = \frac{g}{r^2} \quad , \quad f = 0$$

Si ha:

$$m^2 = \frac{e}{\rho^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{g}{r^2} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{e}{\rho^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{e}{\rho^2} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{e}{\rho^2} = \frac{g}{r^2}$$

E quindi:

$$m = \frac{\sqrt{e}}{\rho} = \frac{\sqrt{g}}{r}$$

che come ci si attendeva, è indipendente dall'azimut α .



Rappresentazioni equivalenti

Nelle rappresentazioni equivalenti il modulo di deformazione areale deve essere costante ed uguale a 1. Ricordando che:

$$m_a = \frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

Si ha:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \cdot r$$

Oppure:

$$\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = r^2$$

Si può dimostrare facilmente che non esistono delle funzioni che soddisfino contemporaneamente le equazioni di conformità e quelle di equivalenza.



Rappresentazione di GAUSS

Le equazioni differenziali trovate per le rappresentazioni conformi coincidono con le condizioni di monogeneità di Cauchy che dicono che le condizioni necessarie e sufficienti affinché la variabile complessa $y+ix$ sia funzione della variabile complessa $u+i\lambda$ sono definite da:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial \lambda} \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = +\frac{\partial x}{\partial u}$$

Tutte le rappresentazioni conformi hanno quindi equazioni che possono essere ricavate dalla relazione

$$y + i \cdot x = f (u + i \cdot \lambda)$$

con f funzione arbitraria.

Sviluppando questa relazione in funzione di Taylor, assumendo come incremento la quantità immaginaria $i\lambda$, con λ espressa in radianti:

$$y + ix = f(u) + f'(u)i\lambda + \frac{1}{2} f''(u)(i\lambda)^2 + \frac{1}{3!} f'''(u)(i\lambda)^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(u)(i\lambda)^4 + \frac{1}{5!} f^V(u)(i\lambda)^5 + \dots$$



Rappresentazione di GAUSS

$$y + ix = f(u) + f'(u)i\lambda + \frac{1}{2} f''(u)(i\lambda)^2 + \frac{1}{3!} f'''(u)(i\lambda)^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(u)(i\lambda)^4 + \frac{1}{5!} f^V(u)(i\lambda)^5 + \dots$$

Ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, si ha

$$y + ix = f(u) + f'(u)i\lambda - \frac{1}{2} f''(u)\lambda^2 - \frac{1}{3!} f'''(u)i\lambda^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(u)\lambda^4 + \frac{1}{5!} f^V(u)i\lambda^5 + \dots$$

ed uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene:

$$y = f(u) - \frac{1}{2} f''(u)\lambda^2 + \frac{1}{4!} f^{IV}(u)\lambda^4 - \dots$$

$$x = f'(u)\lambda - \frac{1}{3!} f'''(u)\lambda^3 + \frac{1}{5!} f^V(u)\lambda^5 - \dots$$

Tutte le rappresentazioni conformi si ottengono definendo nelle relazioni appena scritte la funzione $f(u)$ con le sue derivate.

Definire la $f(u)$ consiste nello stabilire a quale valore della y deve corrispondere il valore della latitudine per ogni punto del meridiano fondamentale ($\lambda=0$) \rightarrow come si deve trasformare tale meridiano.



Rappresentazione di GAUSS

Gauss ha stabilito di mantenere equidistante la rappresentazione lungo il meridiano centrale e quindi ha imposto:

$$y_{(\lambda=0)} = f(u) = \int_0^u r \, du = \int_0^\varphi \rho \, d\varphi$$

Possiamo quindi definire le derivate di $f(u)$:

$$f'(u) = \frac{d}{du} \int_0^u r \, du = r = \frac{a \cdot \cos \varphi}{W} = N \cdot \cos \varphi$$

$$f''(u) = \frac{dr}{du} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{du} = -\rho \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{r}{\rho} = -r \cdot \operatorname{sen} \varphi = -N \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{-a \operatorname{sen} \varphi W + a \cos \varphi \frac{2e^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2W}}{W^2} = -\frac{a \operatorname{sen} \varphi W^2 - ae^2 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi}{W^3} = \\ &= -\frac{a \operatorname{sen} \varphi - ae^2 \operatorname{sen}^3 \varphi - ae^2 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi}{W^3} = -\frac{a \operatorname{sen} \varphi - ae^2 \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{W^3} = \\ &= -\frac{a(1-e^2) \operatorname{sen} \varphi}{W^3} = -\rho \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{r}{\rho} \quad \text{per definizione e di latitudine ridotta} \quad \rightarrow \quad r \cdot du = \rho \cdot d\varphi$$



Rappresentazione di GAUSS

$$\begin{aligned} f'''(u) &= \frac{d}{du}(-r \cdot \operatorname{sen} \varphi) = \frac{d}{d\varphi}(-r \cdot \operatorname{sen} \varphi) \frac{d\varphi}{du} = \frac{r}{\rho} \frac{d}{d\varphi}(-r \cdot \operatorname{sen} \varphi) = \\ &= -\frac{r}{\rho} \left(\frac{dr}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi + r \cos \varphi \right) = -\frac{r}{\rho} (-\rho \operatorname{sen}^2 \varphi + r \cos \varphi) = \\ &= r \left(\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{r}{\rho} \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

Operando in modo analogo per le derivate successive e ponendo:

$$t = \tan \varphi \quad , \quad \eta^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos^2 \varphi$$

l_φ = lunghezza dell'arco di meridiano dall'equatore alla latitudine φ



Rappresentazione di GAUSS

Si ottengono le equazioni della carta per la rappresentazione di Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda N \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \\ \quad + \frac{1}{120} \lambda^5 N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \\ y = I_{\varphi} + \frac{1}{2} \lambda^2 N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{24} \lambda^4 N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \end{array} \right.$$

Limitando l'ampiezza del fuso a pochi gradi ($\pm 3^\circ$ rispetto il meridiano centrale) la serie converge rapidamente e si possono trascurare i termini maggiori di λ^5 .



Rappresentazione di GAUSS

Per effettuare la trasformazione inversa, da coordinate piane a coordinate geografiche riportiamo le formule di HIRVONEN.

$$\begin{cases} \lambda' = \arctg \frac{v \cdot \sin h \cdot \frac{y}{c}}{\cos \xi} \\ \Phi = \arctg [\tan \xi \cdot \cos(v \cdot \lambda')] \end{cases}$$

con

$$\lambda = \lambda' + \lambda_0$$

λ_0 = longitudine del meridiano centrale del fuso

$$\xi = \frac{N}{A_1} + B_2 \sin^2 \frac{N}{A_1} + B_4 \sin^4 \frac{N}{A_1} + B_6 \sin^6 \frac{N}{A_1}$$

$$B_2 = 0.1449300705$$

$$B_4 = 0.0002138508$$

$$B_6 = 0.0000004322$$

$$A_1 = 637654.50006 \text{ m / rad}$$

$$v = (1 + e'^2 \cos)$$



Modulo di deformazione lineare nella rappresentazione di Gauss

Poichè la rappresentazione di Gauss è conforme basta ricavare il modulo di deformazione lineare lungo un parallelo. Abbiamo ricavato che:

$$m^2 = \frac{e}{\rho^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{f}{r \cdot \rho} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha + \frac{g}{r^2} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

lungo un parallelo $\alpha = \pi/2$ e quindi:

$$m^2 = \frac{g}{r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$$

dove x e y sono date dalle equazioni della carta di Gauss trovate:

$$\begin{cases} x = \lambda N \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{1}{120} \lambda^5 N \cos^5 \varphi (\dots) \\ y = I_\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{24} \lambda^4 N \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi (\dots) \end{cases}$$



Modulo di deformazione lineare nella rappresentazione di Gauss

Calcolando le derivate e trascurando i termini in λ^4 e superiori ed i termini η^2 e η^4 si ottiene:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \lambda N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + \dots) = \lambda N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 &= \lambda^2 N^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right)^2 = \\ &= \lambda^2 N^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \left(1 + 0 + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right) = \\ &= \lambda^2 N^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi + \text{termini trascurabili} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \dots) = N \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots) \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots) \right)^2 = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi (1 + 0 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots)) = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \cos^2 \varphi \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \dots \right) = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi (1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \dots) = \end{aligned}$$



Modulo di deformazione lineare nella rappresentazione di Gauss

Quindi risulta:

$$m^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} N^2 \cos^2 \varphi (1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi) = 1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

$$m = (1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi + \text{termini trascurabili}$$

!!! La longitudine λ è misurata dal meridiano centrale del fuso e non dal meridiano di origine di Greenwich !!!

Ponendo:

$$\lambda = \frac{x}{N \cos \varphi}$$

Si ottiene:

$$m = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{N^2}$$



Modulo di deformazione lineare nella rappresentazione di Gauss

Per tener conto delle approssimazioni accumulate si adotta la formula:

$$m = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho \cdot N}$$

dove x è la distanza del punto, nel quale si vuole calcolare il modulo di deformazione lineare, dal meridiano centrale e ρ ed N sono i raggi principali di curvatura nello stesso punto.

Per avere il modulo di deformazione di un segmento di retta che congiunge sulla rappresentazione un punto P_1 di coordinate (x_1, y_1) ed un punto P_2 di coordinate (x_2, y_2) occorre procedere per integrazione.

L'espressione approssimata (valida per segmenti di retta non superiori ai 20km) del modulo di deformazione lineare per tale segmento è:

$$m_{1-2} = 1 + \frac{x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2}{6 \cdot \rho_m \cdot N_m}$$

dove ρ_m e N_m sono i raggi principali di curvatura nel punto medio.



Modulo di deformazione lineare nella rappresentazione di Gauss

Le espressioni del modulo di deformazione lineare precedenti non tengono però conto del fattore di contrazione, pari a 0.9996, introdotto nella rappresentazione di Gauss per poter ampliare la larghezza dei fusi. Le formule diventano quindi:

$$m = 0.9996 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi \right)$$

$$m = 0.9996 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho \cdot N \cdot (0.9996)^2} \right)$$

$$m_{1-2} = 0.9996 \cdot \left(1 + \frac{x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2}{6 \cdot \rho_m \cdot N_m \cdot (0.9996)^2} \right)$$

!! La coord. λ è riferita al meridiano centrale ed è espressa in *radianti* !!
!! La coordinata X (Est) deve essere depurata dalla falsa origine !!



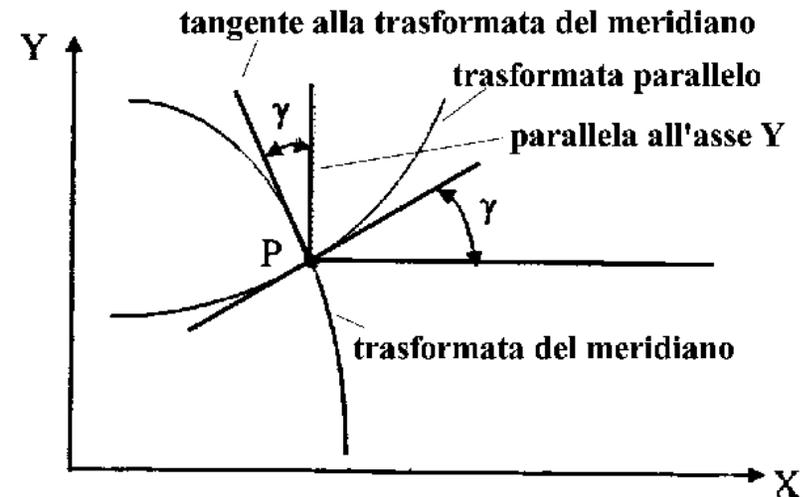
Convergenza del meridiano

In un qualunque punto P della superficie terrestre è possibile definire tre diverse direzioni “Nord”:

- Nord magnetico → individuabile con la bussola
- Nord geografico → coincidente con il meridiano per il punto
- Nord cartografico → direzione dell'asse Y del sistema di riferimento cartografico.

Sulla cartografia, nel punto P è possibile calcolare l'angolo γ formato fra la direzione del nord geografico (dato dalla trasformata del meridiano) e quello cartografico (direzione parallela all'asse Y, trasformata del meridiano centrale del fuso).

γ → **convergenza del meridiano**





Convergenza del meridiano

Tralasciando la determinazione analitica, le formule che permettono il calcolo della convergenza del meridiano sono, in funzione delle coordinate geografiche:

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right)$$

o in funzione delle coordinate piane:

$$\tan \gamma = \frac{x}{N} \tan \varphi \left(1 + \frac{x^2}{3N^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right)$$

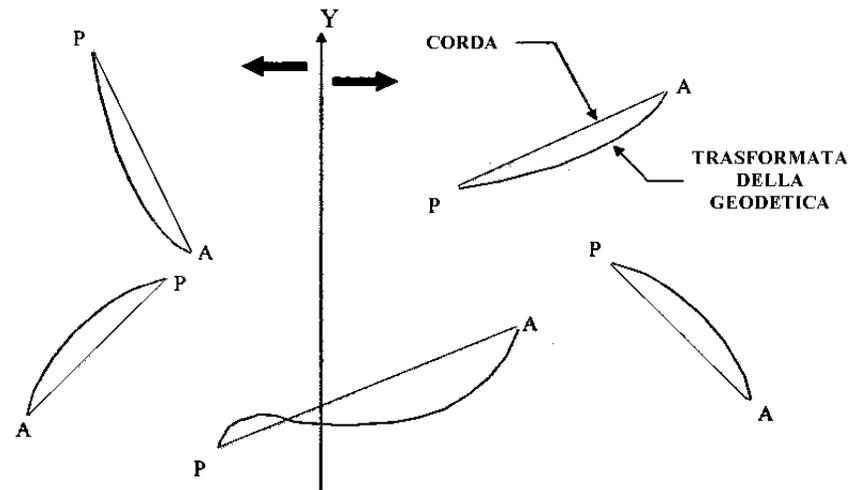
Trasformate delle geodetiche nel piano di Gauss

Fissati tre punti sul terreno P (stazione), A (avanti) e I (indietro) e misurato l'angolo azimutale $A-I = \alpha$, facendo stazione in P e collimando A ed I, il valore ottenuto, grazie ai teoremi della geodesia operativa, è del tutto equivalente all'angolo formato dalle tangenti alle geodetiche PA e PI.

Lo stesso angolo α sul piano della rappresentazione di Gauss dovrebbe essere misurato tra le tangenti alle trasformate delle geodetiche PA e PI. La trasformata di una geodetica tra due punti non è facilmente rappresentabile, mentre è immediato il tracciamento della corda fra i due punti. Qualitativamente il tracciamento può essere fatto con la

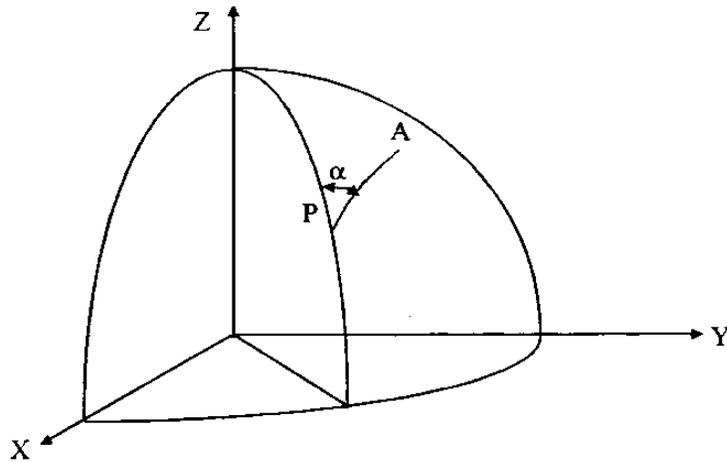
“ REGOLA DEL VENTO “

La trasformata della geodetica si ottiene pensando a come si gonfia una vela tesa fra i due estremi della geodetica, con il vento che spira dal meridiano centrale verso la periferia.



Trasformate delle geodetiche nel piano di Gauss

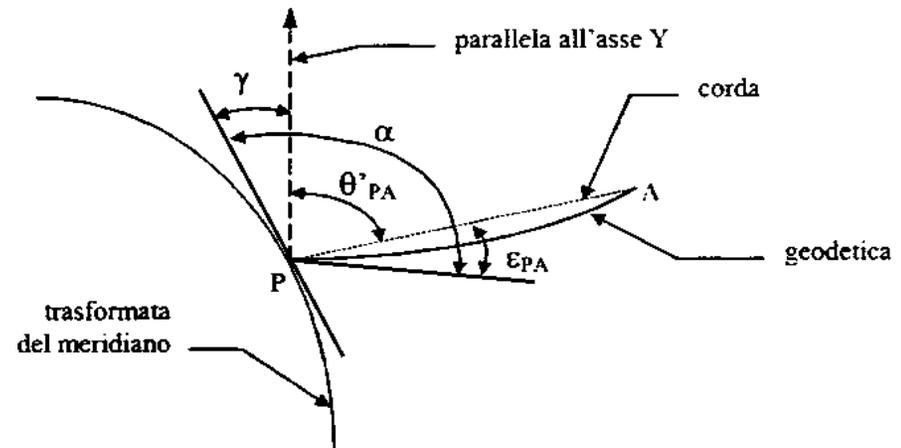
Se determiniamo lo scostamento angolare (**riduzione alla corda**) tra la tangente alla trasformata della geodetica e la relativa corda sarà possibile ridurre l'angolo misurato sul terreno tra geodetiche all'equivalente sulla cartografia misurato fra le corde ed operare quindi con figure a lati rettilinei.



Nel punto P si definisce l'azimut α di una geodetica PA sull'ellissoide, l'angolo compreso tra le tangenti al meridiano per P e alla geodetica stessa.

Sulla cartografia, note le coordinate Est e Nord dei punti P e A si calcola l'azimut:

$$\theta'_{PA} = \arctan \frac{E_A - E_P}{N_A - N_P}$$





Trasformate delle geodetiche nel piano di Gauss

Per poter collegare l'azimut misurato sulla carta θ'_{PA} con quello determinato sull'ellissoide α si deve considerare la convergenza del meridiano e la riduzione alla corda:

$$\alpha = \theta'_{PA} + \gamma - \varepsilon_{PA}$$

Segno ε_{PA} : “ - ” se ruotando in senso orario la direzione positiva dell'asse Y si incontra prima la corda e poi la trasformata, “ + ” viceversa.

Segno γ : “ + ” se il punto P si trova a destra dell'asse Y, “ - ” viceversa.

Si ha che:

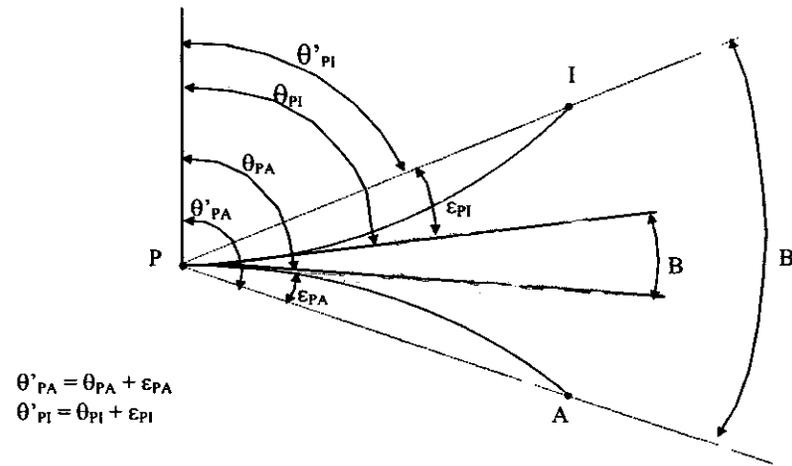
$$\varepsilon_{PA} = \frac{(Y_P - Y_A)(2X_P + X_A)}{(0.9996)^2 \cdot 6\rho_C N_C} \neq \varepsilon_{AP} = \frac{(Y_A - Y_P)(2X_A + X_P)}{(0.9996)^2 \cdot 6\rho_C N_C}$$

ρ_C e N_C sono i raggi principali di curvatura calcolati in un punto C che divide la geodetica PA in due parti di 1/3 e 2/3 a partire da P (per distanze di 300km si possono calcolare ad una latitudine media fra A e P). Il segno di ε_{ij} è dato dalla “regola del vento”. Le correzioni sono espresse in decimillesimi di grado.



Trasformate delle geodetiche nel piano di Gauss

Quindi, ad un angolo B fra due geodetiche, misurato con teodolite sul terreno, corrisponderà l'equivalente angolo B' , misurato sulla cartografia fra le corde:



$$B' = \theta'_{PA} - \theta'_{PI} = \theta_{PA} + \epsilon_{PA} - \theta_{PI} - \epsilon_{PI} = B + \epsilon_{PA} - \epsilon_{PI}$$

Considerando $\lambda \leq 3^\circ$ e $\rho_C = N_C = 6.3 \cdot 10^3 \text{km}$ queste correzioni valgono:

$\Delta X = \Delta Y$	200km	100km	10km
ϵ	100''	25''	0.25''

Nelle condizioni più sfavorevoli, per lati di 15km, il valore $B - B'$ è di circa 0.5''. Nel campo topografico, quindi, è possibile non tener conto di queste correzioni.



La cartografia

La cartografia consiste in definitiva in un disegno piano inserito in un sistema di riferimento. La rappresentazione deve consentire la lettura dei contenuti metrici e qualitativi disegnati.

Contenuti metrici → distanze, aree, angoli, quote, coordinate, ...

Contenuti qualitativi → tipologia strade, edificato, copertura naturale, ...

Il terreno è descritto secondo due categorie di informazioni:

PLANIMETRIA → Proiezione nel piano del disegno dei particolari naturali ed artificiali.

ALTIMETRIA → Distanza dei punti disegnati dal livello medio del mare, rappresentata da punti quotati o curve di livello.



La scala di una carta

$$\frac{1}{n} = \frac{\text{unità}}{\text{n}^\circ \text{ di riduzioni delle dimensioni reali}}$$

n piccolo \Rightarrow dimensioni reali poco ridotte \Rightarrow 1/n grande \Rightarrow GRANDE SCALA
n grande \Rightarrow dimensioni reali molto ridotte \Rightarrow 1/n piccolo \Rightarrow PICCOLA SCALA

Le carte si classificano secondo la scala in:

- PICCOLA SCALA 1:100.000 – 1:25.000
- MEDIA SCALA 1:10.000 – 1:5.000
- GRANDE SCALA 1:2.000 – 1:1.000
- GRANDISSIMA SCALA 1:500 – 1:200



Graficismo

Il graficismo in una carta definisce la precisione che si può attendere ed il livello di dettaglio rappresentabile.

Dimensioni del tratto grafico $\rightarrow \varepsilon = 0.2 \text{ mm}$

La dimensione del tratto grafico, costante nelle rappresentazioni a scala diversa, si ripercuote in modo diverso nelle varie carte secondo la scala.

Carta 1:25.000	\rightarrow	errore di graficismo = $\pm 5\text{m}$
Carta 1:10.000	\rightarrow	errore di graficismo = $\pm 2\text{m}$
Carta 1:5.000	\rightarrow	errore di graficismo = $\pm 1\text{m}$
Carta 1:2.000	\rightarrow	errore di graficismo = $\pm 0.4\text{m}$

In una carta possono essere riportati in grandezza vera, a meno della scala, solo quegli elementi che hanno dimensioni superiori al graficismo.

Ad esempio, la linea di marciapiede non comparirà in una carta 1:25.000, mentre potrebbe essere disegnata su di una carta a grande scala (1:2.000)



Graficismo

A volte gli oggetti di una carta devono essere rappresentati anche se la loro dimensione è inferiore al graficismo.



CARTE SIMBOLICHE

Nelle carte simboliche alcuni oggetti sono riportati sulla carta tramite dei simboli, che sono di dimensione standard e non rappresentano la grandezza reale dell'oggetto (es: strade nelle carte IGM 1:25.000).

Con l'avvento della distribuzione delle carte in formato digitale la limitazione data dal graficismo alla precisione delle carte sembra sparire, infatti è talvolta possibile ingrandire a piacimento l'immagine, mantenendo inalterato lo spessore delle linee.

**!! E' IMPORTANTE QUINDI TENERE SEMPRE PRESENTE
LA SCALA DELLA CARTA DI PARTENZA E QUINDI LA
PRECISIONE ASSOCIATA A QUELLA SCALA !!**



Il sistema cartografico nazionale

Cenni storici

1872 → istituito l'Istituto Topografico Militare

1882 → l'ITM diventa l'IGM (Istituto Geografico Militare) con i seguenti compiti:

- formazione di una rete geodetica nazionale
- rilevamento e rappresentazione della carta ufficiale dello stato in scala 1:100.000 (ellissoide di Bessel orientato a Roma Monte Mario con proiezione naturale policentrica di Sanson-Flamsteed)
- formazione di una rete di livellazione di alta precisione

1940 → la Commissione Geodetica Italiana decide di adottare l'ellissoide internazionale (Hayford) orientato a Roma Monte Mario come superficie di riferimento.

1941 → rete geodetica nazionale ricalcolata sul piano di Gauss dal Prof. Boaga, da cui il nome della proiezione Gauss-Boaga.

1948 → proiezione di Gauss adottata anche per la cartografia. Sul vecchio materiale cartografico viene sovrastampato il nuovo reticolo gaussiano.



Il sistema cartografico nazionale

1950 → l'Associazione Internazionale di Geodesia esegue una compensazione generale delle reti geodetiche europee. Nasce l'ED50 (ellissoide internazionale con orientamento medio europeo ed origine delle longitudini Greenwich). Accanto alle coordinate Gauss-Boaga sulla cartografia sono disponibili anche quelle UTM-ED50.

1960 → la legge n.68/60 definisce gli organi cartografici ufficiali dello Stato:

- **I.G.M.** (Istituto Geografico Militare)
- **I.I.M.** (Istituto Idrografico della Marina)
- **C.I.G.A.** (Centro di Informazioni Geotopografiche dell'Aeronautica)
- **Catasto** (ora Direzione Generale del Dipartimento del Territorio)
- **Servizio Geologico**

1970 → nascono le Regioni a statuto ordinario ed i programmi di cartografia tecnica a grande scala (C.T.R. – Carta Tecnica Regionale 1:5.000)



Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM ANTE 1940

Questo primo sistema cartografico prescelto dall'Italia è di tipo policentrico.

Si tratta di una carta ottenuta per via analitica e riduceva, nell'ambito di ciascun foglio della Carta d'Italia alla scala 1:100'000, ad un valore pressoché trascurabile le varie deformazioni lineari e angolari, conservando le aree e rendendo irrilevanti gli effetti della curvatura terrestre. Essa risulta quindi praticamente equivalente.

Il suo inquadramento geodetico era riferito all'ellissoide di Bessel, orientato a Genova e come meridiano origine venne preso il meridiano passante per Roma-Monte Mario.

Datum ante 1940

Ellissoide di Bessel (1841)

$$a = 6'377'397,155 \text{ m}$$

$$f = 1/299,152$$

Orientamento Genova IIM (1902)

$$\varphi = 44^{\circ}25'08,235''$$

$$\lambda = 0^{\circ}$$

$$\text{azimut M.Telegrafo } \alpha = 117^{\circ}31'08,91''$$

Meridiano Origine ante 1940

Roma - Monte Mario

Longitudine rispetto a Greenwich $\lambda =$

$$12^{\circ}27'08,40'' \text{ Est}$$

Meridiano Origine:

Meridiano a partire dal quale vengono contate, ad est positivamente ed ad ovest negativamente, le longitudini della Carta d'Italia

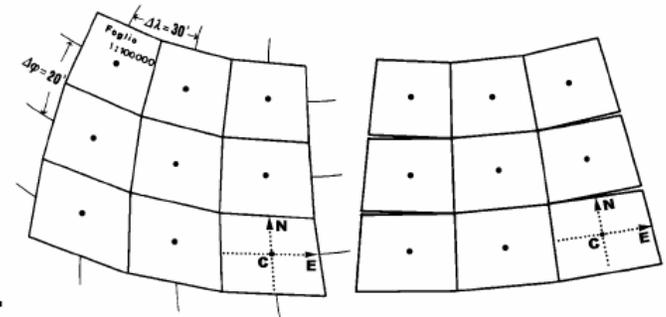
Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM ANTE 1940

La carta può ritenersi ottenuta con il seguente procedimento:

- si iscrive l'ellissoide in un poliedro le cui facce, a forma di trapezio isoscele, sono tangenti in punti distribuiti ad intervalli regolari di latitudine e longitudine;
- si proiettano i punti dell'ellissoide su tali facce dal suo centro (proiezione centrografica).

Ogni faccia rappresenta quindi una carta a sé stante con un proprio centro C (punto di tangenza) diverso da quello delle altre carte del sistema e per tale motivo la proiezione viene detta policentrica. L'asse N corrisponde al meridiano centrale e l'asse E al parallelo per C.



I pregi di questa proiezione derivano dal fatto che, limitando opportunamente gli intervalli di latitudine e di longitudine da cartografare, essa, oltre che equivalente, risulta anche praticamente equidistante e quindi anche praticamente conforme nell'ambito di ogni carta.

L'inconveniente principale consiste nel fatto che i sistemi di coordinate piane N ed E sono diversi da carta a carta; pertanto se si vuol calcolare la distanza fra due punti appartenenti a carte diverse, anche contigue, bisogna ricorrere alle loro coordinate geografiche.



Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM POST 1940

Sistema geodetico di riferimento :

Datum ROMA40

Datum ROMA40:

-Ellissoide internazionale (Hayford 1909 → $a=6'378'388$ m
 $f=1/297$)

-Orientamento Roma-Osservatorio Astronomico Monte Mario, definizione 1940

($\varphi=41^{\circ}55'25,51''$ $\lambda=0^{\circ}$ ($12^{\circ}27'08,40''$ Est da Greenwich -
azimut M.Soratte $\alpha = 6^{\circ}35'00,88''$)

Meridiano Origine post 1940 → Roma-Monte Mario

Rete di inquadramento:

Triangolazione dell'IGM; calcolo di compensazione del 1908-1919. Il calcolo del 1908-1919 è stato eseguito nel sistema geodetico di riferimento adottato all'epoca (ellissoide di Bessel orientato a Genova Osservatorio, definizione del 1902), e solo nel 1940 è stato adottato l'ellissoide internazionale orientato a Roma Monte Mario, ricalcolando tutti i vertici nel nuovo riferimento; la longitudine è contata dal meridiano di Roma (M.Mario); a seguito delle campagne di triangolazione IGM susseguitesi nel tempo, numerosi blocchi della rete sono stati rideterminati in base a nuove misure ed a nuovi calcoli di compensazione, producendo distorsioni locali nella rete.

Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM POST 1940

RETE DI INQUADRAMENTO NAZIONALE:



Rete geodetica italiana di 1° ordine

Rete trigonometrica



La nuova rete italiana di livellazione di alta precisione

Rete italiana altimetrica di alta precisione

Il sistema cartografico nazionale

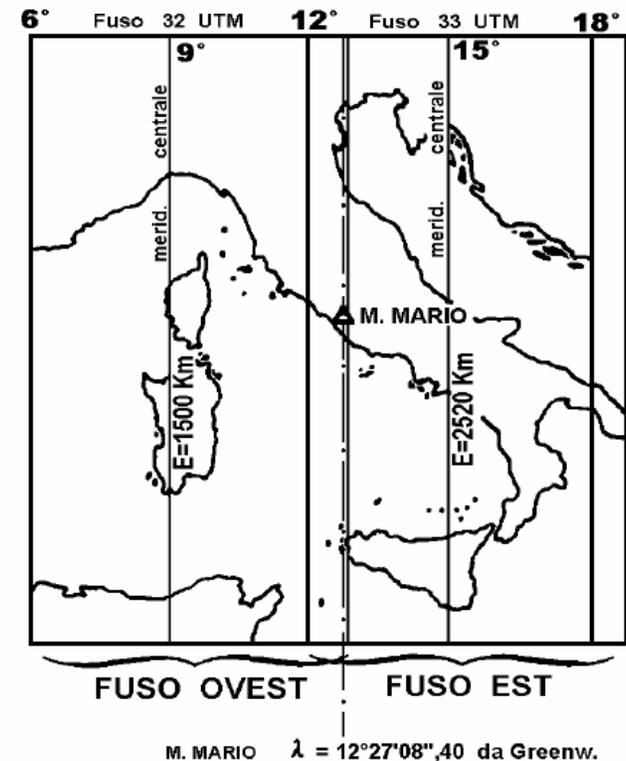
LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM POST 1940

La cartografia prodotta è stata impostata secondo i seguenti criteri:

a) La rappresentazione cartografica del territorio nazionale è stata suddivisa in due fusi di ampiezza pari a 6° in longitudine, detti *fuso ovest* o primo fuso e *fuso est* o secondo fuso (corrispondono con i fusi 32 e 33 dell'UTM, ciò ha facilitato l'inserimento della nostra cartografia in tale sistema mondiale) i cui meridiani centrali corrispondono rispettivamente alle longitudini di 9° est di Greenwich ($-3^\circ 27' 08.4''$ Monte Mario) e 15° est di Greenwich ($2^\circ 32' 51.6''$ Monte Mario).

b) l'origine delle longitudini si è conservata sul meridiano di M. Mario (Roma) la cui longitudine da Greenwich è stata fissata in $12^\circ 27' 08,40''$;

c) Il taglio è rimasto identico a quello in vigore precedentemente (taglio geografico) cioè secondo meridiani e paralleli intervallati rispettivamente di $30'$ in longitudine e $20'$ in latitudine (\rightarrow fogli 1:100'000)



Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM POST 1940

Per conservare lo stesso taglio della precedente rappresentazione (faceva riferimento al meridiano per Monte Mario a Roma, posto alla longitudine di $12^{\circ}27'08.40''$ est da Greenwich) è stato preso come meridiano di separazione tra i due fusi quello con longitudine di $11^{\circ}57'08.40''$ EG:

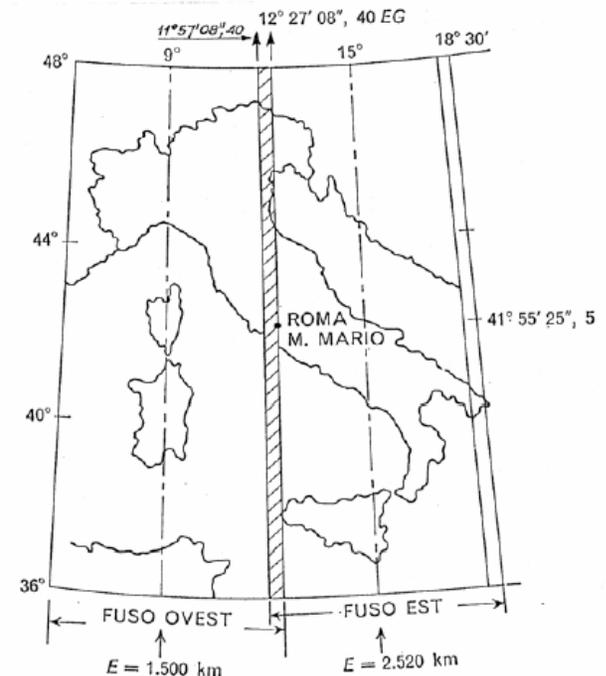
Fuso 1 o ovest: fra 6° e $12^{\circ}27'08.40''$ EG(M.Mario)

Fuso 2 o est: fra $11^{\circ}57'08.4''$ e $18^{\circ}30'$ con una sovrapposizione di $0^{\circ}30'$

La zona di sovrapposizione tra il fuso 1 e il fuso 2 è di $30'$ => ampiezza in longitudine di un foglio della precedente cartografia.

Estensione del fuso 2 di $30'$ verso est => per comprendere anche tutta la penisola salentina altrimenti esclusa in parte.

Nella zona di sovrapposizione è stata costruita la cartografia per entrambi i fusi.



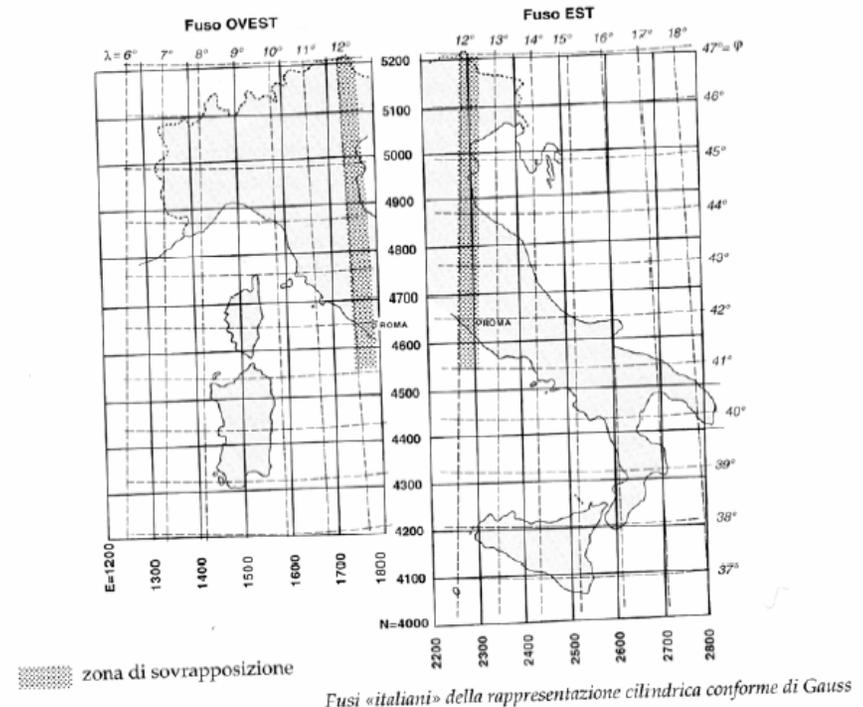
LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM POST 1940

In particolare:

- **L'ampiezza del primo fuso** è stata incrementata per creare una zona di sovrapposizione con il secondo fuso e ridurre in parte l'inconveniente derivante dal passaggio fra i sistemi di coordinate dei due fusi (nelle zone cartografate ricadenti nella zona di sovrapposizione vengono inseriti sulle carte entrambi i reticolati).

- **L'ampiezza del secondo fuso** è stata anch'essa incrementata di 30' per includervi la penisola salentina (che nel sistema UTM cade nel fuso 34).

- Ai meridiani centrali dei due fusi (asse N) sono state attribuite rispettivamente le coordinate E di 1'500 km e 2'520 km (anziché 500 km come nell'UTM) dette **false origini**.



Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – DATUM POST 1940

Significato delle false origini

- Rendere positiva all'interno del fuso la coordinata EST:

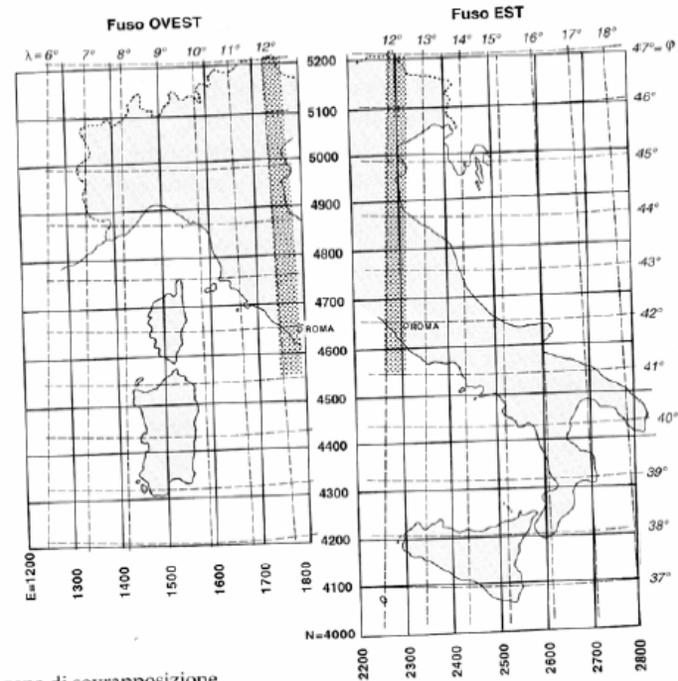
500 km è il valore effettivamente utile per rendere positive le E in qualunque fuso

- Pensiamo idealmente di spezzare ciascun valore convenzionale nelle due parti 1-500 e 2-520:

Il "1" e il "2" che precedono il 500 nei valori convenzionali sono *indici di fuso*:

"1" indica il primo fuso o fuso ovest

"2" indica il secondo fuso o fuso est



zona di sovrapposizione

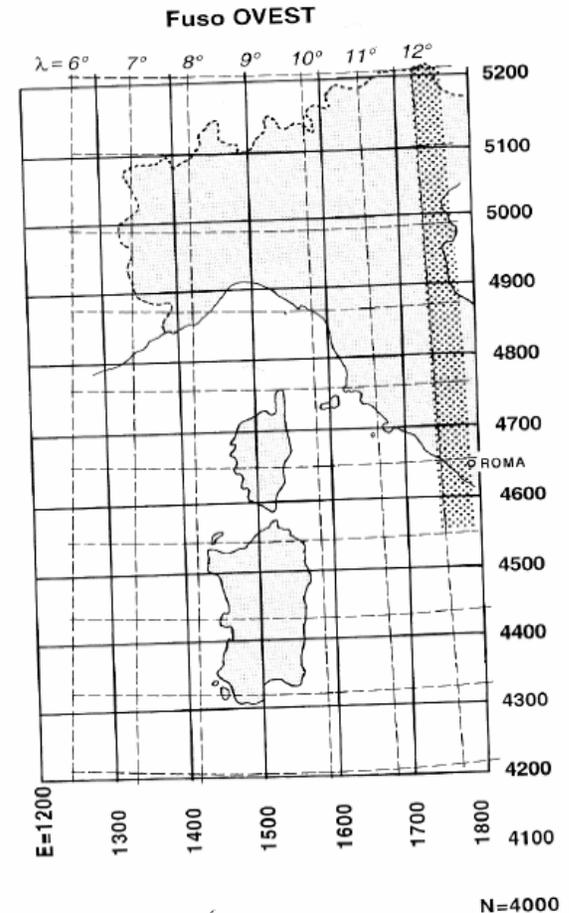
Fusi «italiani» della rappresentazione cilindrica conforme di Gauss

Il sistema cartografico nazionale

Dato che per il territorio nazionale 1° in longitudine non supera i 100 km:

Nel I fuso o fuso OVEST:

- i punti ad ovest del meridiano centrale hanno le E maggiori di 1'000 km e minori o uguali a 1500 km
- I punti ad est del meridiano centrale hanno le E maggiori di 1'500 km e minori di 2'000 km, compresi i punti della zona di sovrapposizione

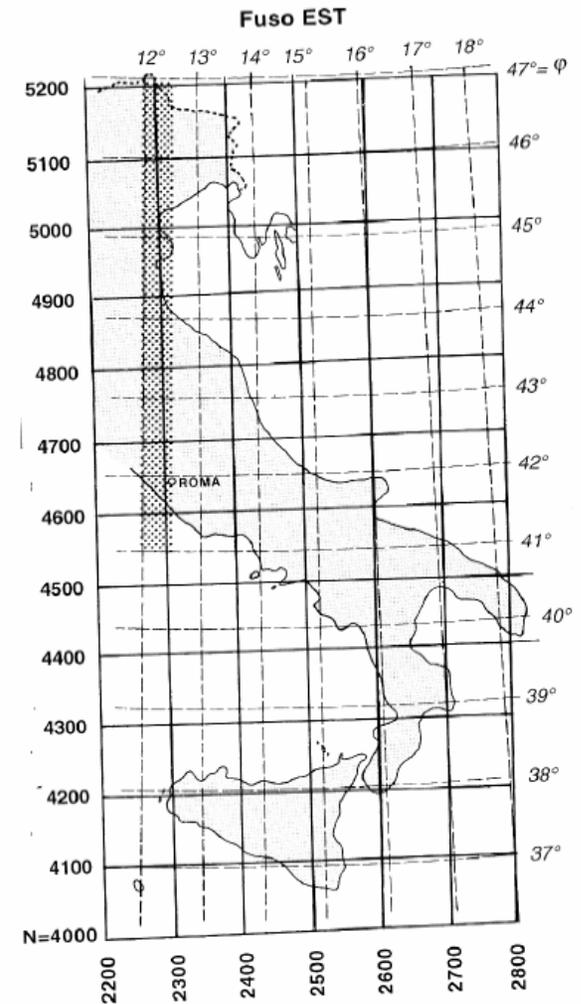


Il sistema cartografico nazionale

Nel II fuso o fuso EST:

- I punti ad ovest del meridiano centrale hanno la E maggiore di 2'000 km e minore o uguale a 2'520 km
- I punti ad est del meridiano centrale hanno la E maggiore di 2'520 km e minore di 3'000 km compresi i punti che appartengono alla zona di incremento di 30' verso est.

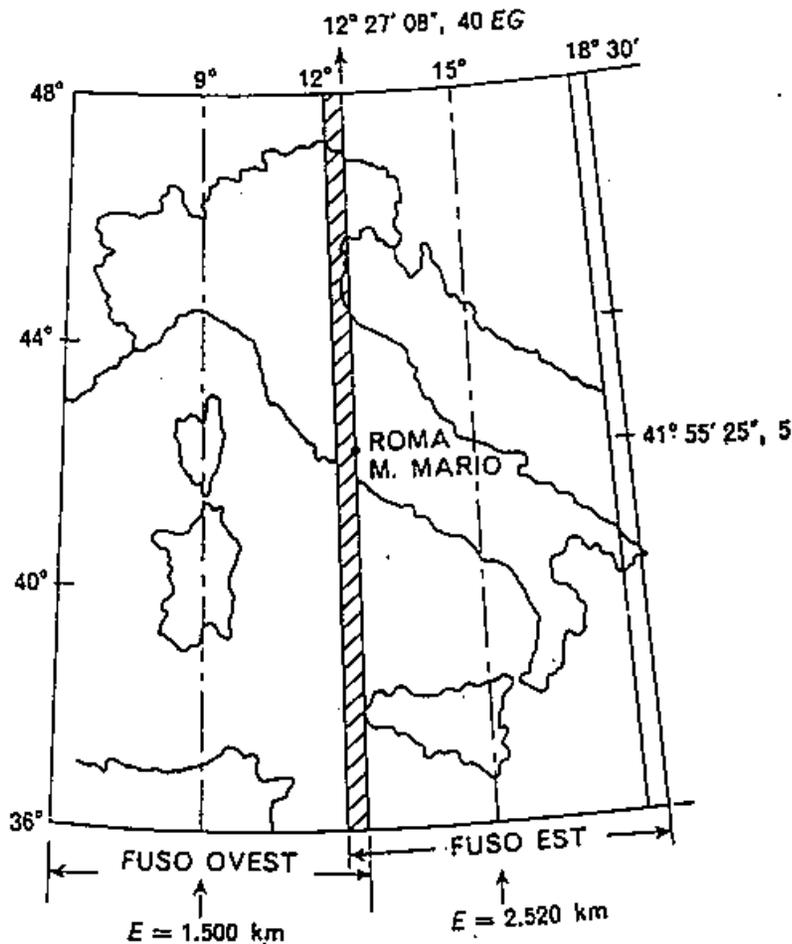
In tal modo la prima cifra esprime inequivocabilmente l'appartenenza del punto al primo fuso (1°) o al secondo fuso (2°) e la cifra delle centinaia e delle decine evita possibili errori grossolani dovuti a scambi delle coordinate E per ogni punto della zona di sovrapposizione, considerato nel primo e nel secondo fuso.





Il sistema cartografico nazionale

Cartografia ufficiale italiana GAUSS - BOAGA



- Disegnata nella rappresentazione conforme di Gauss.
- Utilizzati due fusi di 6° → due cilindri tangenti a due meridiani centrali.

Fuso OVEST

meridiano centrale 9°
estensione da 6° a 12.30°
falsa origine Est: 1.500km
(prima cifra coordinate Est: "1")

Fuso EST

meridiano centrale 15°
estensione da 12° a 18.30°
falsa origine Est: 2.520km
(prima cifra coordinate Est: "2")



Il sistema cartografico nazionale

Alcune curiosità

Lo sviluppo del fuso lungo il parallelo per una latitudine di 45° è di circa 474km

La prima cifra della coordinata Est indica il fuso di appartenenza:

“1” → primo fuso o fuso Ovest

“2” → secondo fuso o fuso Est

I 20km aggiunti alla falsa origine del secondo fuso servono ad evitare confusione nelle coordinate della fascia di sovrapposizione dei due fusi

La scelta dell'ampiezza di $6^\circ 30'$ (ampliata rispetto all'ampiezza standard UTM) è stata fatta sia per collegare, nella fascia di sovrapposizione, le informazioni date nei due fusi, sia per comprendere in due fusi tutto il territorio nazionale.

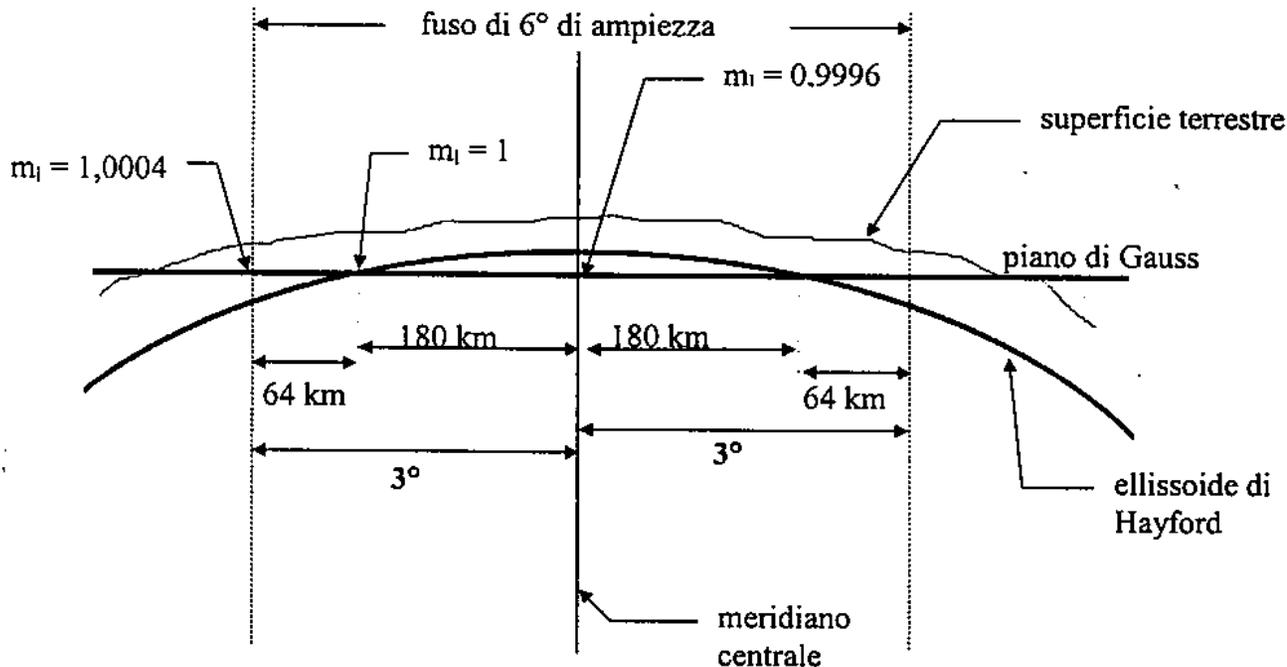
Il sistema cartografico nazionale

In un fuso di 6° , nella proiezione su cilindro tangente ad un meridiano, la deformazione lineare ai bordi del fuso stesso supererebbe l'errore di graficismo ($0.2 \text{ mm su carta } 1:25.000 \equiv 1 \text{ m}$).

Si applica un fattore di contrazione pari a **0.9996** a tutto il piano della rappresentazione → si considera un cilindro secante e non tangente.



CARTA EQUIDISTANTE IN OGNI ELEMENTO

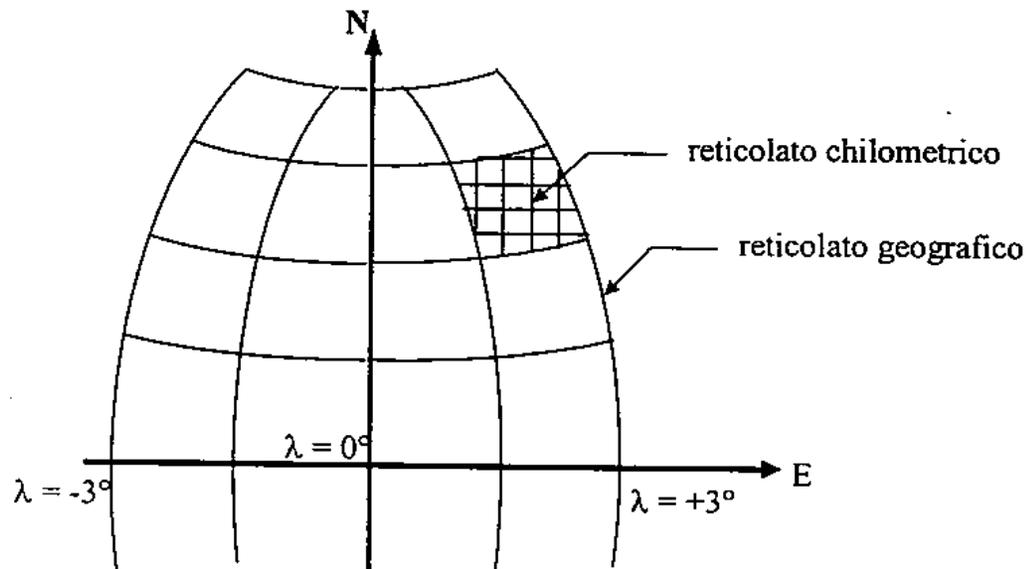


Il sistema cartografico nazionale

Il taglio dei fogli di tutta la cartografia ufficiale è rimasto quello geografico originario, secondo le trasformate di meridiani e di paralleli.

Il reticolato chilometrico delle coordinate cartografiche risulta costituito quindi da linee non parallele ai bordi della carta.

Il taglio ha come origine il meridiano di Roma Monte Mario, al quale è stato attribuito il valore di longitudine di $12^{\circ} 27' 08.40''$ Est di Greenwich.



Il sistema cartografico nazionale

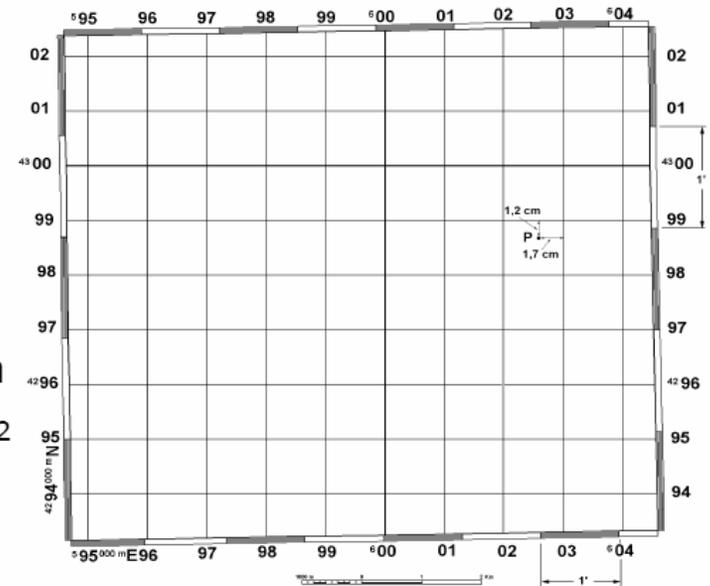
-Il reticolato chilometrico consente di ricavare le coordinate N ed E di ogni punto misurando semplicemente l'ascissa e l'ordinata all'interno del quadrato in cui si trova e sommando, o sottraendo, detti valori (dopo averli moltiplicati per la scala della carta) alle coordinate chilometriche del reticolato.

-Il vantaggio di tale reticolato sta nel fatto che le operazioni ora dette non risentono delle deformazioni irregolari che i fogli subiscono dopo la stampa in quanto, all'interno di una sola maglia, le variazioni di grandezza possono considerarsi trascurabili.

-La distanza D tra due punti P_1 e P_2 della carta può calcolarsi dalle loro coordinate N_1, E_1, N_2, E_2 così dedotte, con vantaggio per la precisione, specialmente se i due punti sono molto distanti o appartengono a due fogli distinti.

-Naturalmente la distanza così ottenuta non rappresenta la distanza effettiva sul terreno; per ottenerla si dovrà dividere tale valore per il modulo di deformazione lineare tra i due punti (modulo di deformazione lineare per elementi finiti).

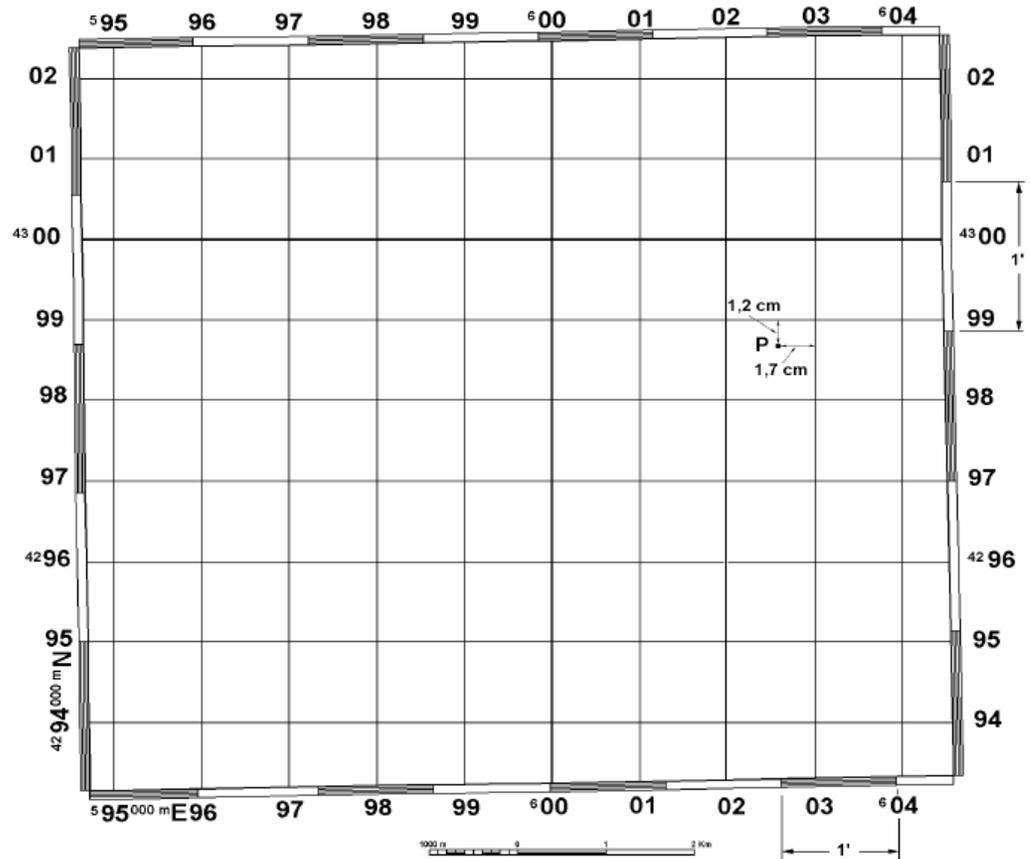
Il risultato è sempre e comunque dipendente dalla precisione della carta.





Il sistema cartografico nazionale

tavoletta in scala
1:25'000 della
cartografia italiana



Nell'esempio, essendo la tavoletta in scala 1:25'000, si avrà:

$$N = 4'299'000 - 1,2 * 250 = 4'298'700 \text{ m};$$

$$E = 603'000 - 1,7 * 250 = 602'575 \text{ m}.$$



Il sistema cartografico nazionale

1950 → Dopo l'ultima guerra mondiale si decise di inquadrare la cartografia nazionale prima in un sistema europeo e poi in uno mondiale.

L'Associazione Internazionale di Geodesia ricalcola le reti geodetiche fondamentali (I ordine) dei vari stati collegandole con osservazioni alle reti degli stati limitrofi.

Questi nuovi calcoli vennero riferiti ad un unico ellissoide, quello di Hayford, orientato a Postdam, nei pressi di Bonn.

Nasce l'**ED50** => European Datum 1950 (ellissoide internazionale con orientamento medio europeo ed origine delle longitudini Greenwich).

Sistema geodetico di riferimento:

ED50

European Datum 1950 :

-Ellissoide internazionale (Hayford 1909→

$a=6'378'388$ m $f=1/297$

-Orientamento medio europeo

Meridiano Origine → Greenwich

rete di inquadramento:

Selezione delle reti del I° ordine europee; il calcolo di compensazione è stato eseguito dallo U.S.Coast and Geodetic Survey nel 1950.

Il sistema cartografico nazionale

**Rappresentazione
cartografica:**

UTM



Rappresentazione di Gauss (chiamata Universal Transverse Mercator); il territorio nazionale è praticamente compreso in due fusi di 6° di ampiezza, con meridiani centrali a 9° e 15° di longitudine est da Greenwich (fusi 32 e 33). Si utilizza un fattore di contrazione $m=0.9996$ ed una falsa origine, per le coordinate Est, di 500'000 m per ciascun fuso.

Uno stesso punto ha coordinate differenti nel sistema UTM/ED50 e nel sistema nazionale. Tale scostamento è dovuto principalmente al diverso Datum geodetico ed ai differenti calcoli di compensazione che hanno dato origine ai valori delle coordinate. Per quanto detto, il passaggio dalla coordinate UTM/ED50 alle Gauss-Boaga o viceversa non è eseguibile con procedimenti analitici rigorosi, ma solo con formule di corrispondenza di tipo empirico, con parametri stimati ai minimi quadrati, valide in zone di estensione limitata. Espressioni di questo tipo sono state ricavate dall'IGM che fornisce i dati.



Il sistema cartografico nazionale

Dopo il 1950 la proiezione conforme di Gauss fu adottata internazionalmente.

Questa proiezione ed il sistema di divisione e numerazione dei fogli cartografici (che segue il taglio geografico), *UTM* (Universal Transverse Mercator), è adottato per la cartografia di base compresa tra -80° e $+80^\circ$ di latitudine mentre per le calotte polari è stata adottata la proiezione stereografica polare (UPS => Universal Polar Stereographic).

Sulla cartografia è possibile leggere sia le coordinate Gauss-Boaga sia quelle UTM/ED50.

L'avvio delle modifiche richieste per l'adozione nella cartografia italiana del sistema di riferimento europeo, ha avuto inizio fin dal 1951 ed ha comportato, dapprima, il riporto del reticolato ED50 sull'edizione militare della stessa cartografia, mentre sull'edizione civile restava indicato soltanto il sistema nazionale Gauss-Boaga, ed inseguito, l'allestimento di un'unica edizione nel riferimento unificato ED50, da utilizzare sia per gli usi civili sia per quelli militari.

Infatti è stato possibile recuperare i fogli già disegnati nel precedente riferimento inserendo su questi una quadrettatura chilometrica indicante $E_{(UTM)}$, $N_{(UTM)}$ con simbologia distinta dalla quadrettatura (E,N) della carta nazionale Gauss-Boaga grazie al fatto che gli scarti tra i due sistemi UTM-Gauss sono esigui e circa costanti all'interno di un foglio 1:100'000.

Sulla cartografia ufficiale italiana si trova **un duplice e ben distinto reticolato che consente di identificare sia il sistema nazionale sia il sistema internazionale europeo** (UTM/ED50). Il primo, che identifica il sistema nazionale, è definito dalla rappresentazione Gauss-Boaga e viene indicato al **margine della cornice** di ciascuna carta col segno \bullet per la designazione del reticolato del fuso Ovest e con il segno $\text{—} \blacktriangleleft$ per la designazione del reticolato del fuso Est; il secondo, relativo al sistema UTM, è denotato con una sovrimpressione contraddistinta dalla dicitura **reticolato chilometrico nella proiezione conforme UTM/ED50**. Il reticolato disegnato sulle carte è quello UTM/ED50.



Il sistema cartografico nazionale

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA – CARTOGRAFIA IGM

A partire dal 1986 l'IGM ha articolato la sua produzione cartografica in "serie" corrispondenti alle varie scale e contraddistinte da una copertina colorata che le caratterizza:

Scala	1:25'000	serie	25	azzurro
Scala	1:50'000	serie	50	arancio
Scala	1:100'000	serie	100	seppia
Scala	1:250'000	serie	250	grigio
Scala	1:500'000	serie	500	viola
Scala	1:1'000'000	serie	1000	rosso

Nell'ambito di ciascuna serie possono esservi tipologie cartografiche diverse. Alcune di queste tipologie sono state contraddistinte da una lettera:

- "L" per la cartografia con limiti amministrativi evidenziati in viola
- "G" per la cartografia contenente informazioni aeronautiche
- "S" per la cartografia elaborata da immagini da satellite
- "V" per la cartografia vecchio taglio, in corso di sostituzione

Per richiedere la cartografia è necessario citare: la serie, il numero distintivo, il titolo, il tipo di edizione.

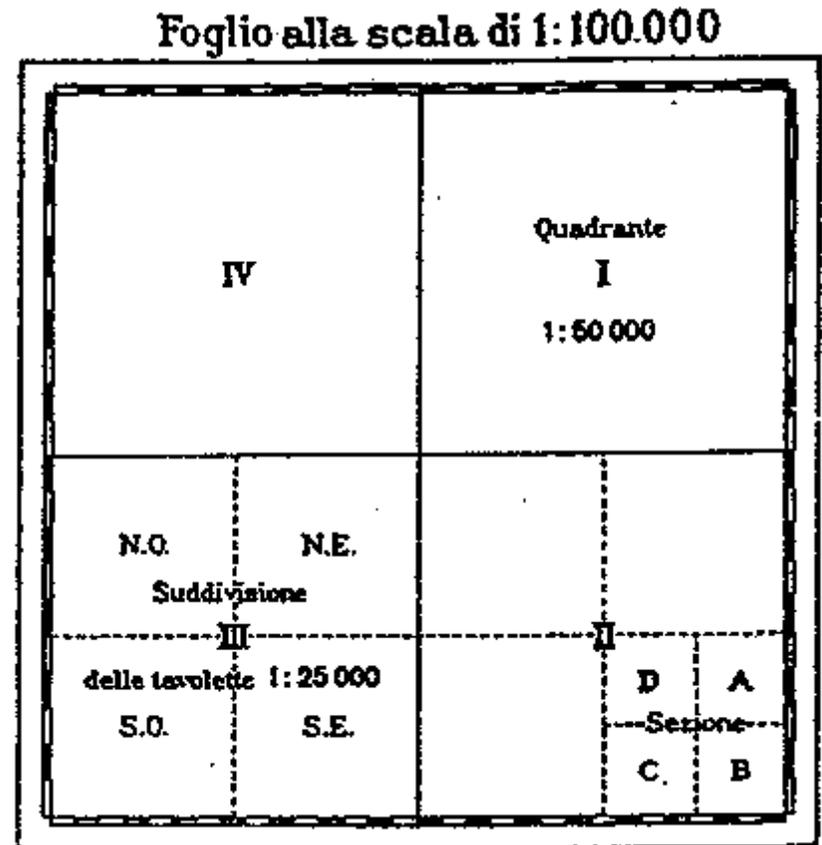
Il sistema cartografico nazionale

Nella cartografia ufficiale italiana si possono distinguere carte appartenenti a due famiglie di serie distinte, una già interamente pubblicata ed una ancora in fase di produzione.

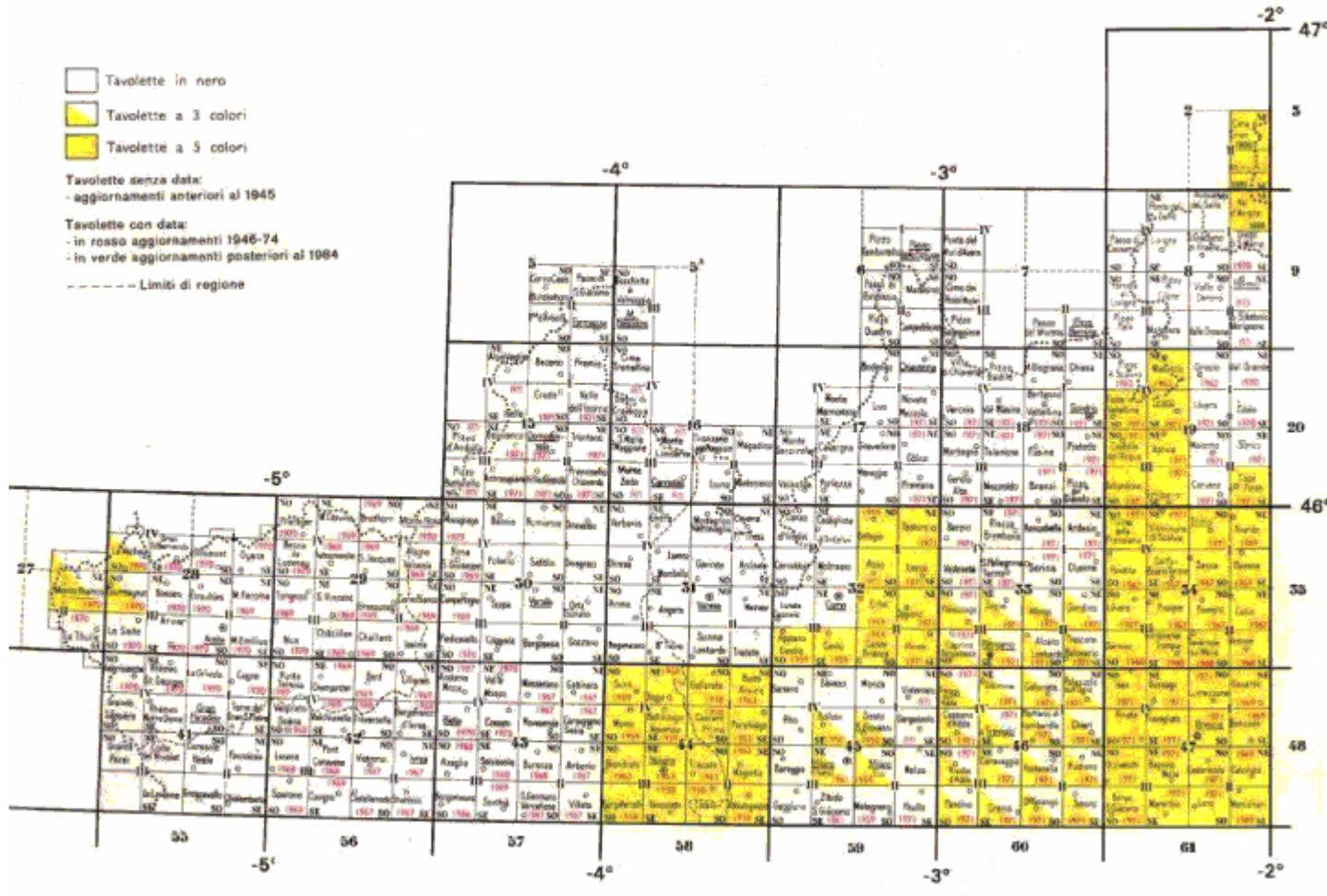
La prima famiglia ha come elemento base la **tavoletta** al 25.000 che ricopre un territorio pari a 7'30" x 5' corrispondenti a circa 10km x 10km. (3545 tavolette)

Dalla tavoletta, ricavata da rilievi per lo più fotogrammetrici, sono state ricavate per riduzione grafica i **quadranti** al 50.000 (15' x 10') ed i **fogli** (278 elementi) al 100.000 (30' x 20').

Questa prima serie è inquadrata nella rappresentazione conforme di Gauss-Boaga ed ha come sistema di riferimento geodetico quello nazionale (Roma40)



Il sistema cartografico nazionale



Il sistema cartografico nazionale

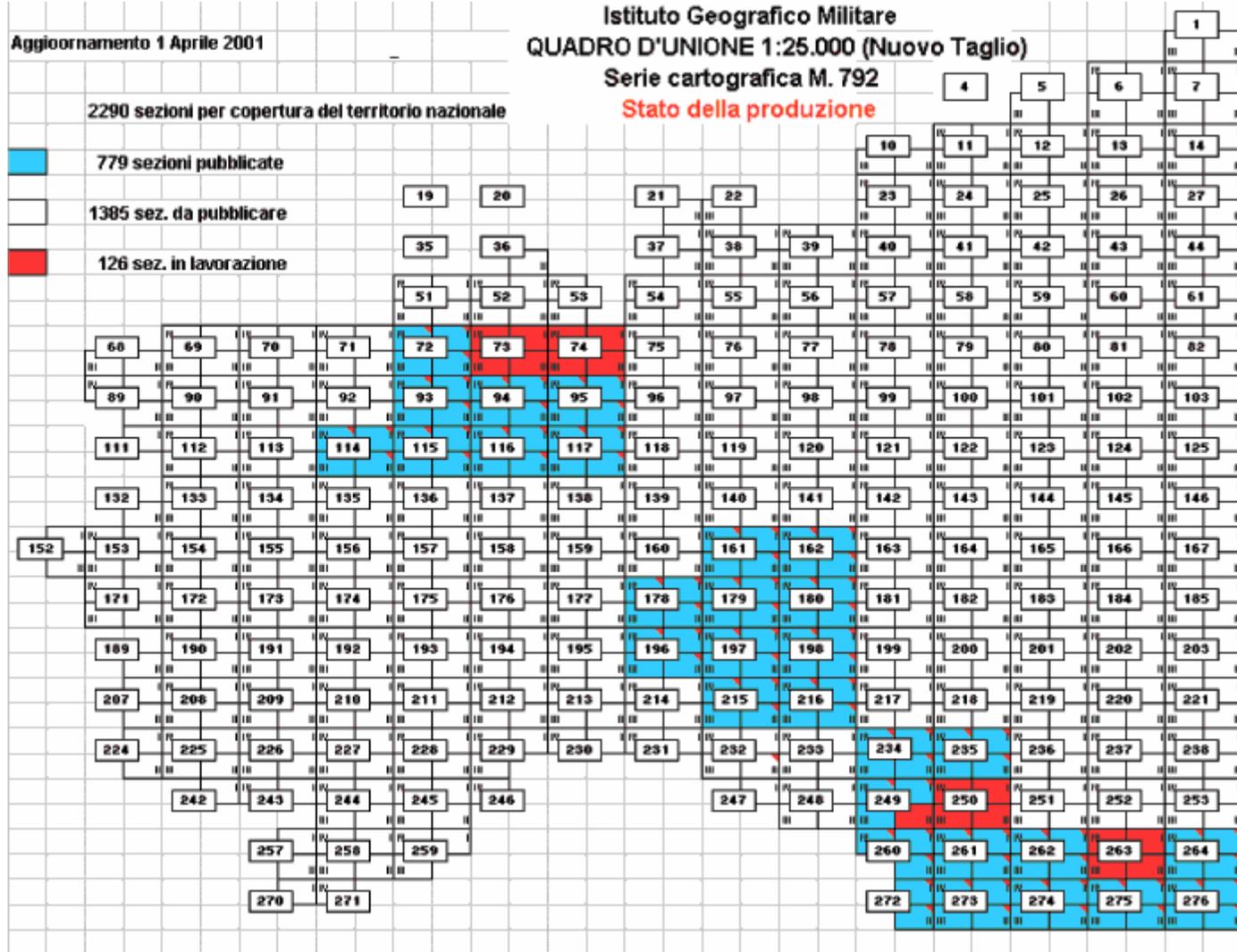
La seconda famiglia è composta da 2298 elementi al 25.000, denominati **sezioni**, che hanno dimensioni di 10' in longitudine e di 6' in latitudine. Queste carte, derivanti da elaborazione numerica o analogica di rilievi aerofotogrammetrici e successivo disegno con metodologie automatiche o manuali, sono inquadrature nel sistema UTM ed hanno come riferimento geodetico quello medio europeo (ED50).



A questa famiglia appartiene la serie 50 composta da 636 elementi al 50.000, denominati **fogli**, che hanno le dimensioni di 20' in longitudine e 12' in latitudine. I fogli sono derivati dai rilievi realizzati per la serie 25

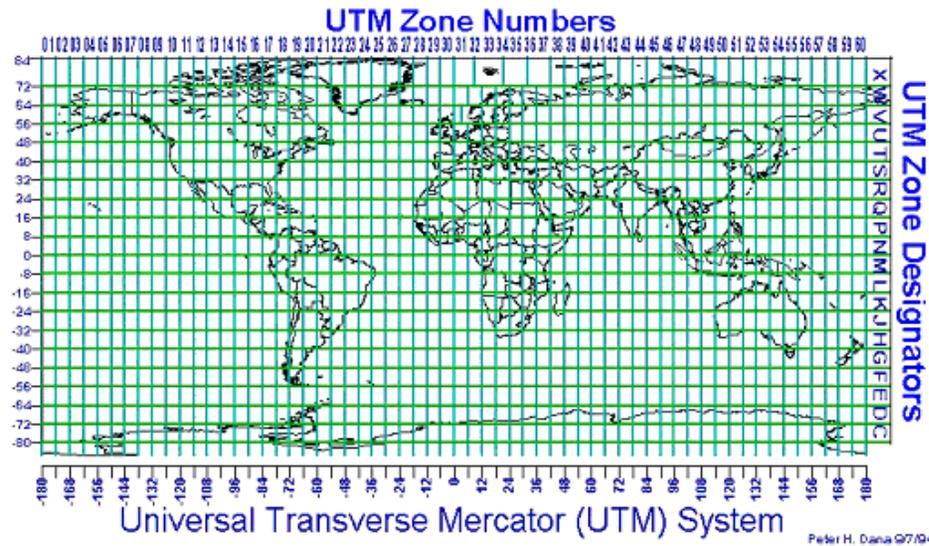
IN OGNI CASO LE CARTE RIPORTANO I RIFERIMENTI PER LAVORARE
A SCELTA IN CIASCUNO DEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO
CARTOGRAFICI: UTM E GAUSS BOAGA

Il sistema cartografico nazionale



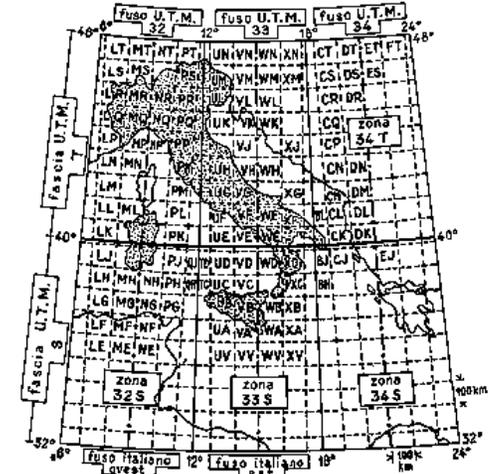
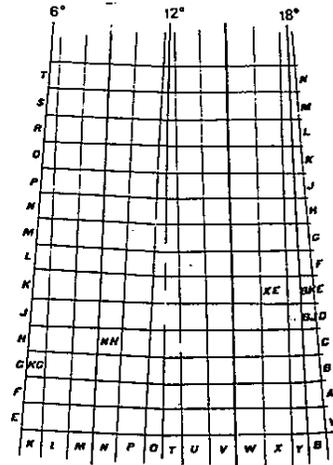
Sistema universale UTM

Dopo la seconda guerra mondiale venne introdotto un sistema di proiezione trasverso di Mercatore standard, detto UTM. Si utilizza il fattore di contrazione pari a 0.996 e la falsa origine comune per tutti i fusi di 500km. La terra è stata suddivisa in 60 fusi di 6° di longitudine numerati in senso orario a partire dall'antimeridiano di Greenwich.



Visto che le sole coordinate cartografiche non erano in grado di individuare in modo univoco un punto sulla superficie terrestre, poichè si ripetevano in ogni fuso, si sono introdotte ulteriori suddivisioni dei fusi: 20 fasce di 8° di latitudine suddivise a loro volta in quadrati di 100km di lato, individuati da una coppia di lettere.

Sistema universale UTM



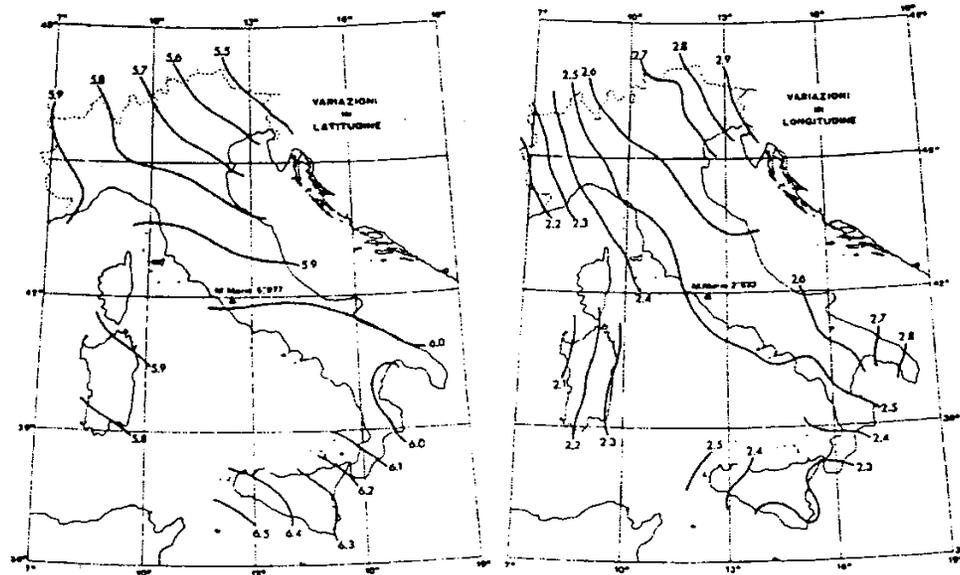
Qualunque punto sulla superficie della terra è univocamente individuabile da una denominazione UTM:

es: **32TPN43206515**

fuso	2 cifre	32
fascia	1 lettera	T
quadrato	2 lettere	PN
Est	4 cifre omettendo le cifre delle centinaia di chilometri e limitando la risoluzione al decametro	4320
Ovest	4 cifre	6515

UTM – Gauss Boaga

Per convertire le coordinate dal sistema nazionale Gauss-Boaga al sistema UTM non ci sono formule analitiche rigorose, ma solo tabelle e grafici empirici, che possono garantire l'approssimazione del metro.



Ciò è dovuto al fatto che i due sistemi di coordinate sono sì riferiti a due ellissoidi la cui rototraslazione è conosciuta analiticamente con precisione, ma derivano anche da due diverse compensazioni delle reti di primo ordine a cui si riferiscono.



UTM – Gauss Boaga

Ad esempio, le coordinate di Roma Monte Mario nei due sistemi di riferimento, ED50 e ROMA40 sono:

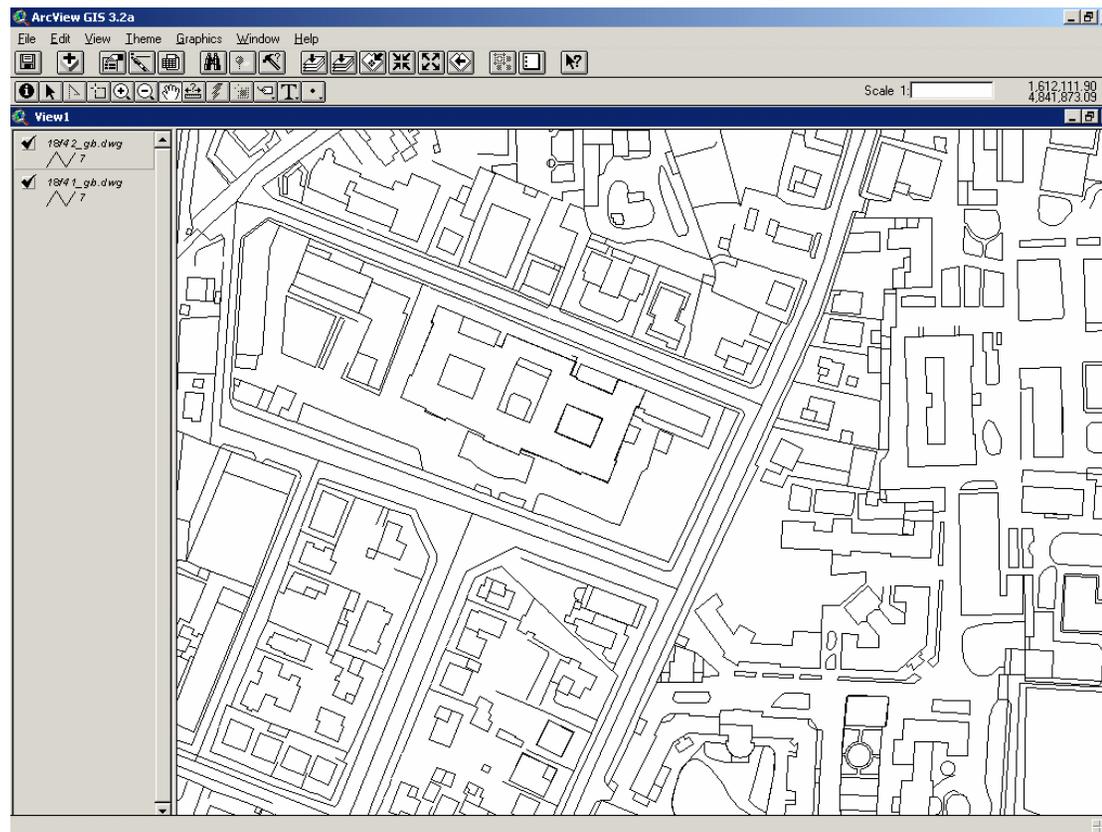
orientamento ellissoide	longitudine λ	latitudine φ
Roma M.te Mario (ROMA40)	12° 27'08".40	41°55'25".51
Postdam (ED50)	12°27'10".93	41°55'31".49

L'IGM produce poi tutta una serie di carte in formato digitale raster e vettoriale, a cui faremo breve cenno in seguito.



C.T.R. - Carte Tecniche Regionali

Dal 1971, in seguito alla creazione delle Regioni a statuto ordinario, molte altre Regioni hanno dato inizio alla costruzione della Carta Tecnica Regionale 1:2.000, 1:5.000 o 1:10.000. Queste carte a media e grande scala risolvono i problemi connessi con la progettazione urbanistica, stradale, delle fognature,...





Esercizio 1 - cartografia

Calcolare il modulo di deformazione lineare nel punto IGM95 105703 – Cascina

ROMA40 $43^{\circ} 40' 27.172''$
 $-01^{\circ} 53' 06.188''$
 15.66 m.s.l.m.

Gauss Boaga 4836971.12 m
 1626347.47 m

WGS84 $43^{\circ} 40' 29.524''$
 $10^{\circ} 34' 01.239''$
 62.04 q_{ell}

UTM WGS84 4836955.15 m
 626318.48 m

i parametri geometrici degli ellipsoidi sono:

Hayford $\rightarrow a = 6378388$ m

$\alpha = 1/297$

WGS84 $\rightarrow a = 6378137$ m

$\alpha = 1/298.257223563$

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 2\alpha - \alpha^2 = \begin{cases} \text{Hayford} & 0.00672267\ 022 \\ \text{WGS84} & 0.00669437\ 999 \end{cases}$$



Esercizio 1 - cartografia

calcoliamo i raggi principali di curvatura:

$$\varphi = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = \begin{cases} \text{ROMA40} & 43.6742144 \ 4^{\circ} \\ \text{WGS84} & 43.6748677 \ 8^{\circ} \end{cases}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \begin{cases} \text{ROMA40} & 0.99839579 \ 7 \\ \text{WGS84} & 0.99840251 \ 5 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3} = \begin{cases} \text{ROMA40} & 6366096.61 \ 2 \text{ m} \\ \text{WGS84} & 6365898.90 \ 1 \text{ m} \end{cases}$$

$$N = \frac{a}{W} = \begin{cases} \text{ROMA40} & 6388636.67 \text{ m} \\ \text{WGS84} & 6388342.28 \ 1 \text{ m} \end{cases}$$

$$R = \sqrt{\rho N} = \begin{cases} \text{ROMA40} & 6377356.68 \ 3 \text{ m} \\ \text{WGS84} & 6377110.71 \ 8 \text{ m} \end{cases}$$



Esercizio 1 - cartografia

calcoliamo infine il modulo di deformazione lineare in duplice modo: tramite le coordinate geografiche e quelle piane del punto.

$$\lambda_{\text{depurata}}^{\text{ROMA40}} = -01^{\circ}53'06.188'' + 12^{\circ}27'08.4'' - 9^{\circ} = 1^{\circ}34'02.212'' = 1.56728111 \text{ } 1^{\circ} = 0.02735421 \text{ } 569^{\text{r}}$$

$$\lambda_{\text{depurata}}^{\text{WGS84}} = 10^{\circ}34'01.239'' - 9^{\circ} = 1^{\circ}34'01.239'' = 1.56701083 \text{ } 3^{\circ} = 0.02734949 \text{ } 845^{\text{r}}$$

$$m_l = 0.9996 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \right) = \begin{cases} \text{ROMA40} & 0.999796 \\ \text{WGS84} & 0.999796 \end{cases}$$

$$X_{\text{depurata}}^{\text{GaussBoaga}} = 1626347.47 - 1500000 = 126347.47\text{m}$$

$$X_{\text{depurata}}^{\text{UTM}} = 626318.48 - 500000 = 126318.48\text{m}$$

$$m_l = 0.9996 \left(1 + \frac{X^2}{2\rho \cdot N \cdot 0.9996^2} \right) = \begin{cases} \text{GaussBoaga} & 0.999796 \\ \text{UTM} & 0.999796 \end{cases}$$

m_l è valido per un intorno del punto di 10km.



Esercizio 2 - cartografia

Calcolare il modulo di deformazione lineare del segmento di retta che unisce i due punti IGM95 105703 (Cascina) e 111901 (Tirrenia).

	Cascina (105703)	Tirrenia (111901)
ROMA40	43° 40' 27.172'' -01° 53' 06.188'' 15.66 m.s.l.m	43° 37' 29.776'' -02° 09' 21.550'' 39.20 m.s.l.m.
GaussBoaga	4836971.12 m 1626347.47 m	4831121.18 m 1604591.23 m

$$\varphi = \#^{\circ} + \#'/60 + \#''/3600 = \begin{cases} \text{Cascina} & 43.67421444^{\circ} \\ \text{Tirrenia} & 43.62493778^{\circ} \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{media}} = (\varphi_C + \varphi_T)/2 = 43.64957610^{\circ}$$



Esercizio 2 - cartografia

$$W_m = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m} = 0.99839724 \ 32$$

$$\rho_m = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W_m^3} = 6366068.94 \ 9\text{m}$$

$$N_m = \frac{a}{W_m} = 6388627.41 \ 6\text{m}$$

$$R_m = \sqrt{\rho_m N_m} = 6377338.20 \ 8\text{m}$$

$$X_{\text{depurata}}^C = 1626347.47 - 1500000 = 126347.47\text{m}$$

$$X_{\text{depurata}}^T = 1604591.23 - 1500000 = 104591.23\text{m}$$

$$m_i = 0.9996 \cdot \left(1 + \frac{X_C^2 + X_C X_T + X_T^2}{6 \rho_m N_m \cdot 0.9996^2} \right) = 0.999764$$

$$d_c = \sqrt{\Delta_{\text{nord}}^2 + \Delta_{\text{est}}^2} = \sqrt{(X_C - X_T)^2 + (Y_C - Y_T)^2} = 22528.999\text{m}$$

Distanza
cartografica

$$d_g = \frac{d_c}{m_i} = 22534.317\text{m}$$

Distanza ridotta alla superficie di riferimento

DATUM

In Italia, la rete geodetica che realizza il datum WGS84 è la rete IGM95, determinata dall'Istituto Geografico Militare con misure GPS eseguite verso la metà degli anni `90.

Tale rete costituisce un raffittimento della rete europea EUREF (European Reference Frame), che a sua volta è parte della rete mondiale IGS (International GPS Service).

Esistono poi, a livello locale, reti realizzate da vari Enti (Regioni, Catasto, Province, ecc.) che raffittiscono ulteriormente la rete IGM95.

Con questi progressivi raffittimenti, il sistema WGS84 viene materializzato sul territorio e diviene accessibile agli utenti.

DATUM

La realizzazione italiana del WGS84, cioè la rete IGM95-ETRS89, è completa su tutto il territorio nazionale, è omogenea, ha distribuzione uniforme, è facilmente accessibile, ha coordinate WGS84 definitive e definitivi parametri di passaggio al sistema nazionale.

E' composta da circa 1200 vertici

L'interdistanza media fra i vertici è di circa 20 km.

Precisione dei vertici è pari a circa 5-10 cm.



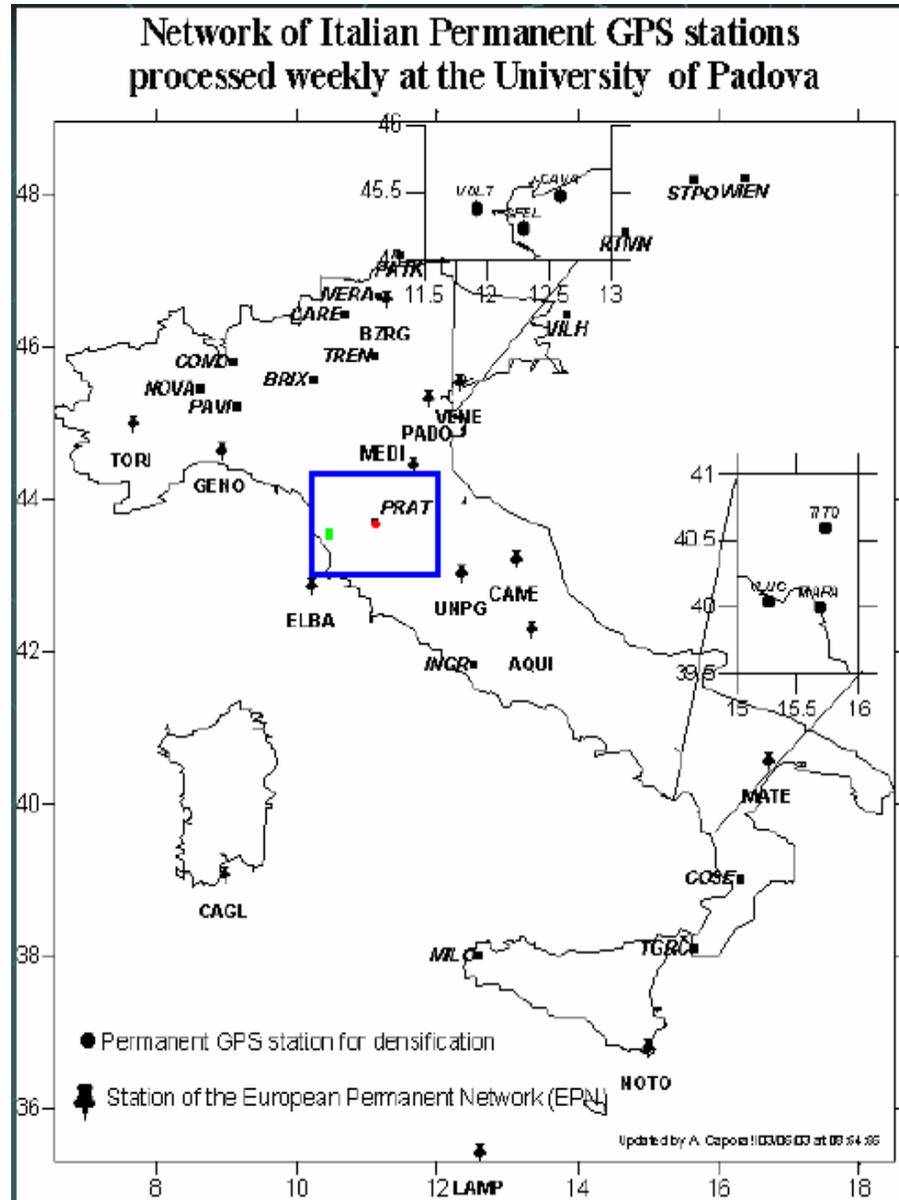
Fig.11 - La rete IGM95

DATUM



Fig.9 - Stazioni GPS nel sistema EUREF

DATUM



DATUM

In realtà WGS-84 è una indicazione generica sotto la quale si trova una realtà molto più complessa.

- Esiste il datum WGS-84 vero e proprio, definito e mantenuto dalla NIMA (National Imagery and Mapping Agency) – ex DMA (Defence Mapping Agency).
- Esiste il datum ITRS (International Terrain Reference System) gestito da IERS (International Earth Rotation Service).
- Esiste il datum ETRS (European Terrain Reference System) gestito dalla commissione EUREF (European Reference Frame) della IAG (International Association of Geodesy) solidale al moto della placca media Europea (ovvero centro Europa).

DATUM

I datum devono essere materializzati, assegnando opportunamente le coordinate a una data rete di punti.

Si parla, invece che di reference system, di reference frame. Esistono ad esempio gli ITRF, ETRF, ecc.

Le realizzazioni vengono aggiornate frequentemente.

Ogni realizzazione consta di:

- le coordinate dei vertici della rete di riferimento ad un certo istante
- i parametri della trasformazione che pone in relazione una certa realizzazione con quella originaria

Motivi per le frequenti definizioni

- raffinamento misure
- modifica delle reti che materializzano i datum
- movimenti dei continenti

DATUM

Sulla frequenza delle ri-definizioni.

Esistono ITRF88, ITRF97 e infine l'ultimo disponibile ITRF2000.

Si sta lavorando alla realizzazione dell'ITRF2005.

Alcune realizzazioni recenti di ITRS si chiamano IGSyyyy. La realizzazione IGS2000(v2) viene anche chiamata IGb00.

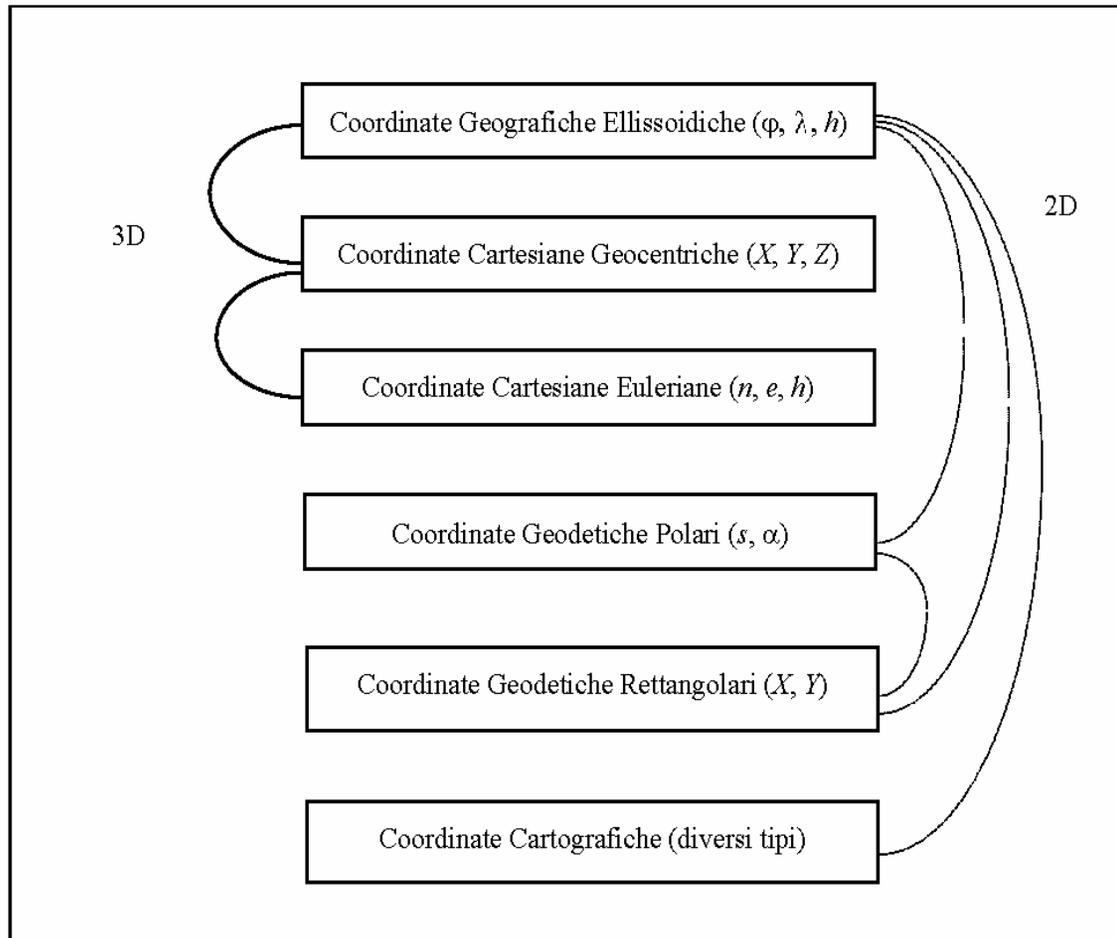
Per come vengono calcolate, le IGSyyyy non coincidono con le ITRFyy, anche se vi è uno stretto rapporto.

Per le misure GPS, è stato scelto in Italia il datum ETRS, nella sua realizzazione ETRF89.

Dunque la rete IGM95 è stata legata a vertici ETRF89 presenti sul territorio europeo.

La rete IGM95 rappresenta dunque un raffittimento sul territorio italiano di ETRF89.

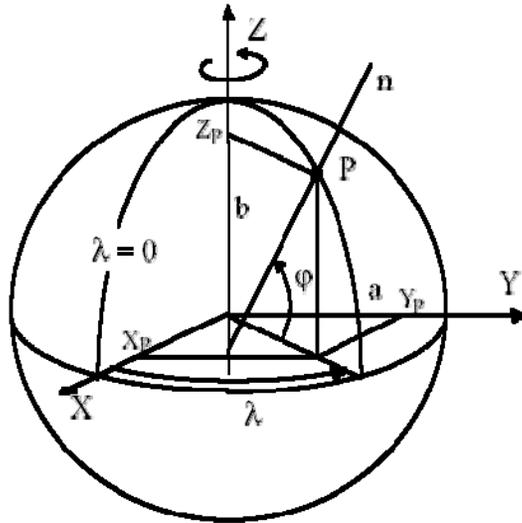
SISTEMI DI COORDINATE e TRASFORMAZIONI



Riepilogo delle principali trasformazioni di coordinate eseguibili nell'ambito di un Datum

SISTEMI GENERALI

Trasformazione da coordinate geografiche a coordinate geocentriche cartesiane



Le equazioni parametriche dell'ellissoide forniscono le coordinate cartesiane di un punto P appartenente alla superficie ellissoidica, in funzione delle sue coordinate geografiche (φ, λ) :

$$X = N \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = N \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = N(1 - e^2) \sin \varphi$$

Per un generico punto P situato a una quota ellissoidica h rispetto alla superficie ellissoidica le coordinate valgono:

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

Trasformazione da coordinate geocentriche cartesiane a coordinate geografiche

Questa trasformazione non si ottiene in modo immediato in quanto non sono esplicitabili direttamente le relazioni di φ e di h .

CALCOLO IN FORMA ITERATIVA

Il valore di λ è deducibile dalle equazioni parametriche in

$$\left. \begin{aligned} X &= (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \end{aligned} \right\} \longrightarrow \lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

Dalle stesse equazioni il raggio del parallelo risulta:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N+h) \cdot \cos \varphi$$

Dividendo l'equazione parametrica in Z per r:

$$\frac{Z}{r} = \frac{[N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin \varphi}{(N+h) \cdot \cos \varphi} = \frac{(N+h) - e^2 \cdot N}{N+h} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \left(1 - \frac{e^2 \cdot N}{N+h} \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

TRASFORMAZIONI TRA SISTEMI DI COORDINATE GENERALI

Trascurando in I approssimazione il valore piccolo: $\left[1 - \frac{e^2 N}{(N+h)} \right]$

si ottiene il valore di φ in I approssimazione: $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z}{r}$

mediante il quale si calcolano i valori in I approssimazione del raggio di curvatura:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

dall'espressione della X si ricava un valore approssimato di h :

$$h = \frac{X}{\cos \varphi \cos \lambda} - N$$

che inserito nella formula rigorosa di φ porta a determinare il valore in II approssimazione di φ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z}{r \left[1 - \frac{e^2 N}{(N+h)} \right]}$$

TRASFORMAZIONI TRA SISTEMI DI COORDINATE GENERALI

Il valore così ottenuto permette un ricalcolo iterativo di N , h e nuovamente φ .

Le iterazioni terminano quando, posto un intervallo di convergenza ε , accade che:

$$\left| \varphi_n - \varphi_{n-1} \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| h_n - h_{n-1} \right| < \varepsilon_h$$

SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA

Si riporta qui una soluzione dovuta a Bowring che ha il vantaggio di essere in forma chiusa:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Z + e^2 b \sin^3 \theta}{r - e^2 a \cos^3 \theta}$$

$$h = \frac{r}{\cos \varphi} - N$$

TRASFORMAZIONI TRA SISTEMI DI COORDINATE GENERALI

dove r è la distanza dall'asse polare, ricavabile da:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$e' \rightarrow$ è la "seconda eccentricità":

$$e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}$$

e θ è un angolo ausiliario fornito da:

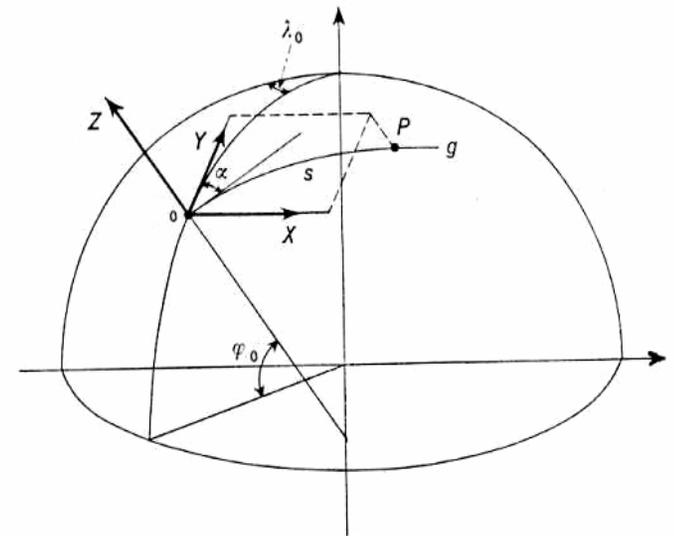
$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Za}{rb}\right)$$

SISTEMI DI COORDINATE LOCALI

SISTEMI LOCALI

Le coordinate cartesiane locali (e,n,h) o (x,y,z) sono le coordinate di un punto rispetto alla cosiddetta “**terna euleriana**” o **terna cartesiana ortogonale** (O,e,n,h) o (O,x,y,z) avente il piano (x,y) o (e,n) tangente all'ellissoide nel punto O , di coordinate geografiche φ_0 e λ_0 , l'asse z (h) diretto secondo la normale alla superficie, l'asse Y (e) tangente al meridiano in O e diretto verso Nord e l'asse X (n) tangente al parallelo in O e diretto verso Est.

Ovviamente tale riferimento può essere utilizzato solo in un limitato intorno dell'origine O .



TRASFORMAZIONI DI DATUM GEODETICO

Si tratta in questo caso di passare da un sistema di riferimento geodetico ad un altro.

Le differenze possono essere notevoli.

Come esempio si riportano le coordinate geografiche di un vertice trigonometrico espresse in diversi datum:

Roma 40: $\varphi = 43^\circ 07' 37,250''$
 $\lambda = -0^\circ 23' 47,323''$ E M.Mario = $12^\circ 03' 21,077''$ E Greenwich

WGS 84: $\varphi = 43^\circ 07' 39,584''$
 $\lambda = 12^\circ 03' 20,248''$ E Greenwich

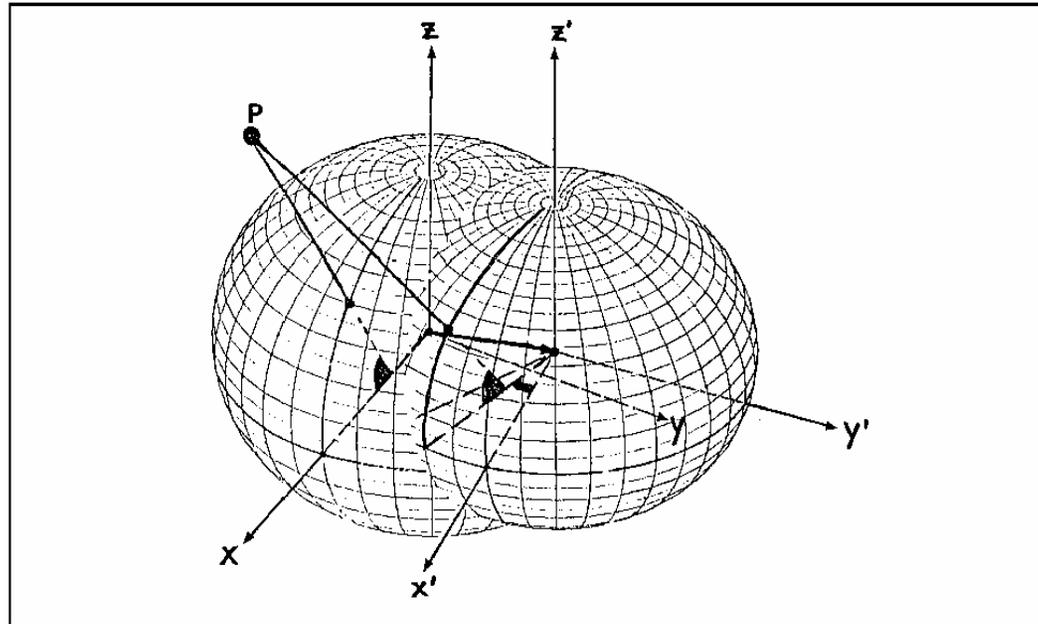
Bessel Genova: $\varphi = 43^\circ 07' 36,766''$
 $\lambda = 12^\circ 03' 19,399''$ E Greenwich

La massima differenza in latitudine è di quasi 3", che corrispondono a circa 90 metri. L'esempio fa capire come sia indispensabile precisare il datum a cui si fa riferimento.

GEODESIA: DATUM

Le procedure utilizzate in geodesia per effettuare trasformazioni di datum possono essere raggruppate in due categorie:

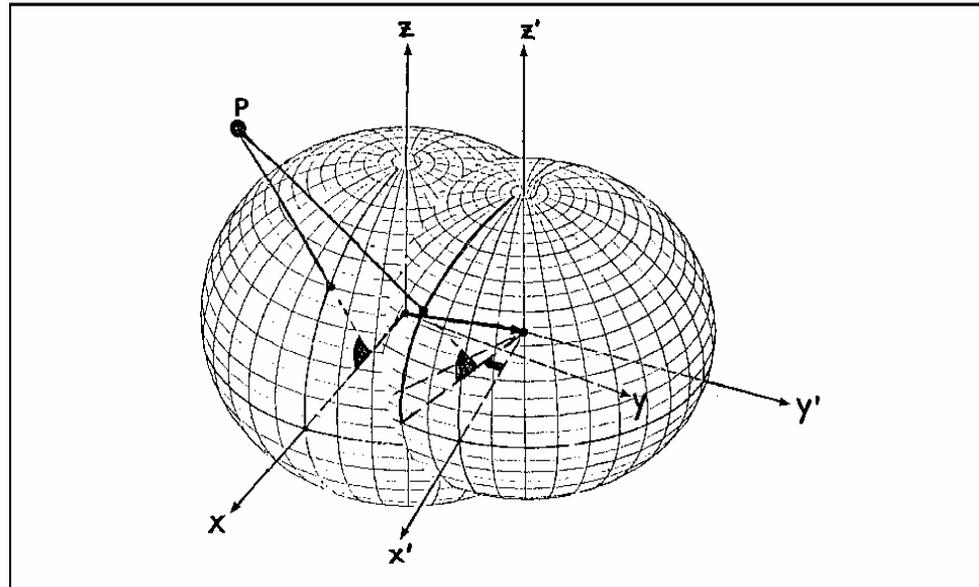
1. procedimenti basati su una trasformazione fra sistemi cartesiani nello spazio;
2. trasformazioni di tipo empirico valide localmente.



TRASFORMAZIONI FRA SISTEMI CARTESIANI TRIDIMENSIONALI

Con questo approccio, la trasformazione di datum viene eseguita operando sulle coordinate cartesiane geocentriche nei due sistemi.

Si passa, quindi, da un sistema cartesiano nello spazio ad un'altra terna cartesiana, traslata e diversamente orientata rispetto alla prima (con eventuali variazioni di scala e distorsioni).



Trasformazione di Helmert o trasformazione a 7 parametri

La procedura di trasformazione più frequentemente utilizzata, conosciuta come trasformazione di HELMERT, è un caso particolare di trasformazione affine e consiste in una rototraslazione nello spazio, con un fattore di scala.

Tale modello consente di passare dalle coordinate X, Y, Z dei punti determinati nel sistema tridimensionale WGS84 (S_p) alle coordinate di tali punti determinate con le usuali operazioni di triangolazione e trilaterazione, nel sistema locale tridimensionale (S_A).

$$X_A = T + (1+k) \cdot R_{(R_X, R_Y, R_Z)} X_P$$

GEODESIA: DATUM

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1+k) \cdot R_{(R_x, R_y, R_z)} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}$$

X_A, Y_A, Z_A → coordinate cartesiane di un punto nel sistema locale di arrivo S_A (es. Ell. Hayford)

X_P, Y_P, Z_P → coordinate cartesiane dello stesso punto nel sistema globale di partenza S_P

T_x, T_y, T_z → vettore traslazione dell'origine del sistema di partenza, S_P rispetto al sistema di arrivo, S_A

R_x, R_y, R_z → rotazioni intorno agli assi di S_A in radianti ed agenti in senso antiorario

K → fattore di scala espresso in ppm (10^{-6}). Viene inserito per tener conto delle differenze di scala che inevitabilmente caratterizzano due diversi datum (originati da diversi set di misure, spesso eseguite in periodi storici diversi e con strumentazioni di caratteristiche differenti).

GEODESIA: DATUM

La matrice di rotazione R è data da:

$$R_{(R_x, R_y, R_z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le rotazioni sono considerate positive se antiorarie per un osservatore il cui verso piedi-testa coincida con quello dell'asse.

Le convenzioni di segno di cui sopra meritano particolare attenzione dato che non tutti i software di trasformazione adottano le stesse, anche se quelle sopra riportate sono le più diffuse, accreditate dai più importanti testi sul GPS e utilizzate per

i parametri IGM 95.

L'espressione della matrice R linearizzata e valida per piccole rotazioni è la seguente:

$$R_{(R_x, R_y, R_z)} \cong \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix}$$

GEODESIA: DATUM

L'Istituto Geografico Militare Italiano – IGM –, nel rilasciare verso la fine degli anni '90 i risultati della rete IGM95, calcolò per tutta l'Italia i valori dei 7 parametri della trasformazione di Helmert da WGS84 a Roma 40.

Per ogni vertice della rete venne stimato un set di parametri valido nell'intorno di tale vertice, sulla base delle coordinate note dei punti circostanti, e tale set venne inserito nella monografia del vertice stesso.

I 7 parametri di ogni vertice IGM95 consentivano di effettuare la trasformazione da coordinate GPS a coordinate nazionali con approssimazione centimetrica (circa 2 cm), per punti entro 10÷15 Km dal vertice utilizzato.

In questo modo non era più necessario occupare con stazioni GPS i vertici della vecchia rete, ma solo alcuni (teoricamente anche solo uno) vertici IGM95, molto più agevoli per l'accesso e per stazionarvi con un ricevitore GPS.

Inoltre la soluzione della trasformazione di datum non era più affidata a scelte dell'operatore ma si basava su parametri noti a priori.

GEODESIA: DATUM

	CASCINA (Madonna dell'Acqua)		105703	105 III SO	
	Nazione: ITALIA Provincia: PISA Comune: CASCINA Carabinieri: CASCINA	Proprietà: Provincia di PISA - Settore Pianificazione del Territorio - U.O.O. Difesa Suolo e Idraulica Indirizzo: Piazza Vittorio Emanuele, 14 Comune: PISA Cap: 56125 Tel: 050 929111 Fax: Provincia: PISA			
Materializzazione: Centro del tipo "GPS C" fissato sulla sommità del muro in mattoni sito a sud del fiume Arno e a nord-est dalla chiesa di "Madonna dell'Acqua".		Geografiche (Roma40) φ: 43°40'21.11" λ: -01°53'01.11"	Piane (Gauss-Boaga) N: 4.836.912 E: 1.626.347	Geografiche (WGS84) φ: 43°40'21.11" λ: 10°34'01.11"	Piane (UTM-WGS84) N: 4.836.915 E: 626.340
		Quota s.l.m.: 06	u: N: E: E:	Quota ell.: 04	33 N: F: E:
Accesso: SS Tosco Romagnolo, n.87; Chiesa di "Madonna dell'Acqua".					
Informazioni ausiliarie:					
Vertici collegati: R 0030 ### 016# Contrassegno di tipo Cso Pozzetto (C) ΔH: -6,84		Parametri: Tx: 02 Rx: 07" Ty: 72 Ry: -8,2" K: 29 Tz: -43 Rz: -1,2"		Stazioni astronomiche:	

Segnalato: 30/10/92 G2B92 Francesco Doninno

Ultimo intervento: Dicembre 2005 G2B92 Francesco Doninno

55° 20' 00" N
10° 40' 00" E

TUTO GEOGRAFICO MILITARE - Direzione Geodetica - via Di Novati, 93 - 50127 FIRENZE - Tel: 0552775442 Fax: 055417909

GEODESIA: DATUM

Restava però un problema:

i parametri variavano da punto a punto (ovviamente essendo stimati localmente).

Per ovviare a questo, e quindi per evitare possibili ambiguità, si adottava il criterio di utilizzare i parametri del vertice IGM95 più vicino all'area del rilievo.

Se però l'area era vasta, si dovevano adottare i parametri di più vertici IGM95, sempre affidandosi al criterio della minima distanza. Infatti, nel caso in cui il rilievo GPS fosse effettuato in zone intermedie tra più vertici IGM95, si utilizzavano 3 vertici IGM95 che racchiudevano la zona, e si determinavano i 7 parametri medi della zona interessata.

Per la zona di Pisa, in prima approssimazione, si può adottare il seguente set di parametri medi di trasformazione da WGS84 a Roma40:

$$T_x=87.82 \text{ m } T_y=38.72 \text{ m } T_z=-48.43 \text{ m}$$

$$R_x=0.307'' \text{ } R_y=-2.042'' \text{ } R_z=-0.062''$$

$$L=27.26$$

GEODESIA: DATUM

Per semplificare la procedura da parte degli operatori ed evitare ogni possibile ambiguità, l'IGM ha proceduto successivamente al calcolo e alla pubblicazione di "grigliati" di trasformazione che riportano le variazioni di latitudine e longitudine tra WGS84 e Roma 40 in funzione delle coordinate geografiche del punto considerato.

Le variazioni sono calcolate per incrementi finiti di latitudine e longitudine, in sostanza quindi ne vengono dati i valori sui nodi di un grigliato a maglia quadrangolare. Per calcolare le variazioni da attribuire a un generico punto rilevato, tale grigliato bidimensionale deve essere interpolato, e per farlo in maniera univoca l'IGM fornisce un programma di interpolazione, il software VERTO.

Un analogo grigliato è stato realizzato anche per l'altimetria, basandosi sul modello di geoide ITALGEO99 e sulla rete di livellazione nazionale.



Il sistema Verto

Il sistema si basa su una griglia regolare di valori di differenze di latitudine e longitudine fra i sistemi:

ROMA40

ED50

WGS84

106.gr1

122901.gr1



Il sistema Verto

Oltre alla griglia il sistema comprende alcuni software atti ad interpolarla:

Verto1



Verto1
versione 1.0 marzo 2002
Istituto Geografico Militare

Dal Sistema
 ROMA40
 ED50
 WGS84

Al Sistema
 ROMA40
 ED50
 WGS84

da quote ellissoidiche \rightarrow a quote geoidiche

Trasforma le quote

Input/Output
Da tastiera Da file

Input/Output da tastiera
Input WGS84
 $\varphi = 45^{\circ} 10' 00.0000''$
 $\lambda = 12^{\circ} 10' 00.0000''$
h = 200.000

Output ROMA40
 $\varphi = 45^{\circ} 08' 57.6265''$
 $\lambda = -0^{\circ} 17' 07.8271''$
H = 157.040

Zona di lavoro
e: [W986E]
145.gri
146.gri
147.gri
148.gri
149.gri
150.gri
151.gri

Foglio al 50.000 : 148
Long. da Roma -0° 31' -0° 05'
Long. da Greenwich 11° 55' 12° 21'

Limiti approssimativi della zona in cui è possibile operare
45° 25'
45° 08'

Origine ROMA40-ED50 2002 Origine ROMA40-WGS84 2002 Origine Geoidale 1999 V.1

ESEGUI
ESCI

IGM - Direzione Geodetica - Rinaldo Masetti

Il sistema Verto



Verto2



Verto2
versione 1.0 gennaio 2003
Istituto Geografico Militare

Del Sistema
 ROMA40 (Gauss-Boaga)
 ED50 (UTM)
 WGS84 (UTM)

Al Sistema
 ROMA40 (Gauss-Boaga)
 ED50 (UTM)
 WGS84 (UTM)

Da quote ellissoidiche → A quote geoidiche

Trasforma le quote

Input/Output
Da tastiera Da file

Input/Output da tastiera
Input UTM (WGS84)
 Geografiche Plane

N = 4 560 000 000
E = 510 000 000
h = 1 214 140

Fuso
 32
 33
 34

Output Gauss-Boaga
 Geografiche Plane

N = 4 560 009 225
E = 1 510 029 878
H = 1 166 769

Zona di lavoro
c:\pisco_c\ 408.gi
20Programmi 409.gi
Verto2 410.gi
D&T 411.gi
lord 412.gi
413.gi
414.gi

Foglio al 50.000 : 411
495 km fuso 32 531 km

Limiti approssimativi della zona in cui è possibile operare
4 567 km
4 554 km

Origine ROMA40-ED60 2002 Origine ROMA40-WGS84 2002 Origine Geoida 1999 V.1

ESQUI
ESCI

IGM - Servizio Geodetico - Piero Invernizzi

Il sistema Verto



Verto3



Calcolo Parametri Piani

Scelta dei file

Tipo di file:

File dei dati:

File di report:

File dei parametri:

Errore medio dei punti di peso della trasformazione: m

Numero dei parametri

1 parametro (R) Trasformazione Conforme

2 parametri (Tn, Te)

3 parametri (Tn, Te, S)

3 parametri (Tn, Te, R)

4 parametri (Tn, Te, R, S)

5 parametri (Tn, Te, R, Sn, Se)

Parametri e. q. m.

Tn= m +/-

Te= m +/-

R= +/-

S= +/-

Sn=

Se=

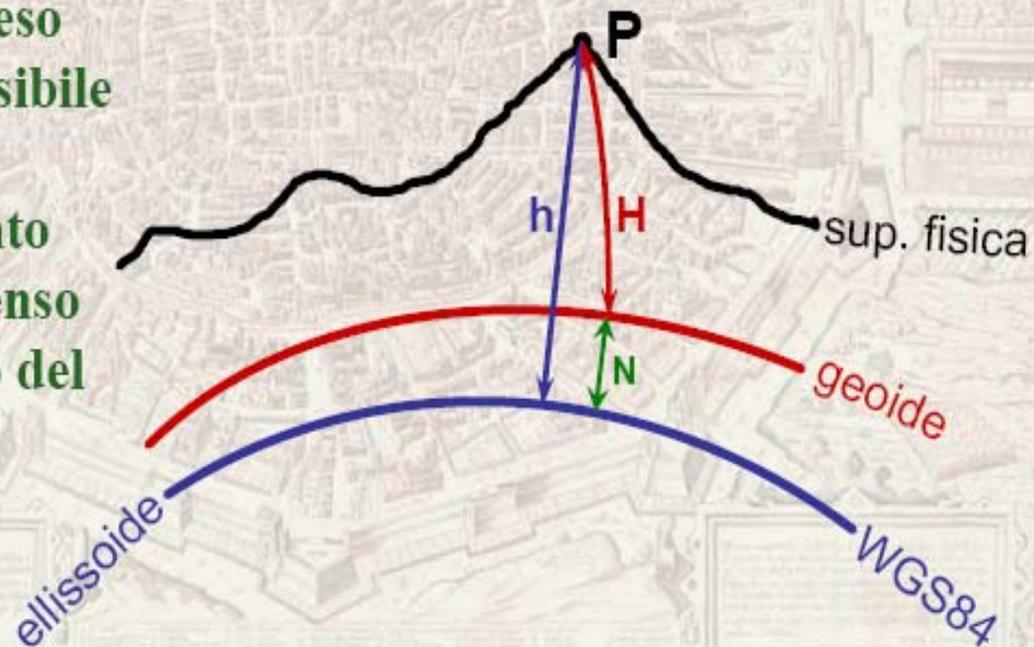
IGM - Servizio Geodetico - Renzo Masetti



Il sistema Verto

Contiene anche una “griglia altimetrica” che permette di trasformare le altezze ellissoidiche **WGS84** in quote sul livello del mare

Verto ha reso quindi possibile il pieno sfruttamento anche in senso altimetrico del GPS



Il sistema Verto



Verto4

Consentirà il pieno sfruttamento della cartografia prodotta prima dell'introduzione del WGS84

