

G.Batignani

Appunti su " Lo spazio delle fasi "

(versione del 2/11/2017)

1. Definizione ed espressione dello spazio delle fasi per n particelle nello stato finale

Sia

$$a \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (eq.1)$$

il processo di decadimento di una particella "a" in n particelle $p_1 \dots p_n$.
Questo processo è caratterizzato da Γ , la larghezza totale di decadimento, definita come la sua **probabilità per unità di tempo**.

Sia

$$a + b \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (eq.2)$$

il processo di urto di una particella "a" su una particella "b", che dá luogo alla produzione di n particelle nello stato finale.
Questo processo è caratterizzato da σ , la sezione d'urto, già definita precedentemente.

Denominiamo con $P_1 \dots P_n$ i quadrimpulsi delle particelle nello stato finale, mentre sia P_{in} il quadrimpulso iniziale: $P_{in} = P_a$ nel caso di un decadimento (1), $P_{in} = P_a + P_b$ nel caso di un urto (2). Ricordiamo che $s = P_{in}^2$ con \sqrt{s} energia nel centro del massa. Ricordiamo che nello stato finale le particelle sono da considerarsi libere e non più interagenti.

Il numero di osservabili indipendenti nello stato finale (i.e. il numero di **grandezze fisiche indipendenti che posso misurare**) è pari a $3n-4$, in quanto vi sono:

- n quadrimpulsi $\Rightarrow 4n$ variabili;
- n vincoli dovuti alla massa di ogni singola particella: $m_i^2 = P_{0i}^2 - \vec{P}_i^2$ per la particella i -esima, avendo definito $P_i = (P_{0i}, \vec{P}_i)$;
- 4 vincoli per la conservazione impulso-energia: $P_{in} = \sum P_i$.

Per ogni set di valori negli intervalli $[P_1, P_1+dP_1] \dots [P_n, P_n+dP_n]$ dei quadrimpulsi nello stato finale si avrà una data probabilità di misurare una larghezza di decadimento

(oppure una sezione d'urto) che dipende dai quadrimpulsi stessi. Se tutti i quadrimpulsi fossero indipendenti, potrei scrivere: $d\Gamma = f_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4P_1 \dots d^4P_n$ e

$\Gamma = \int d\Gamma = \int f_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4P_1 \dots d^4P_n$, con $f_{dec}(P_1, \dots, P_n)$ probabilita' di misurare una larghezza $d\Gamma$ in un intorno di $P_1 \dots P_n$. Anticipiamo che questa funzione contiene tutte le informazioni sulla dinamica del processo ed e' calcolata - quando possibile - tramite le teorie delle interazioni fra particelle.

Tuttavia i vincoli riducono il numero di variabili indipendenti e quindi le relazioni precedenti devono essere scritte inserendo i vincoli, tramite funzioni δ di Dirac, nel modo seguente:

$$d\Gamma = f_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4P_1 \delta(P_{0i}^2 - \bar{P}_i^2 - m_i^2) \vartheta(P_{0i}) \dots d^4P_n \delta(P_{0n}^2 - \bar{P}_n^2 - m_n^2) \vartheta(P_{0n}) \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.3)$$

$$\Gamma = \int f_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4P_1 \delta(P_{0i}^2 - \bar{P}_i^2 - m_i^2) \vartheta(P_{0i}) \dots d^4P_n \delta(P_{0n}^2 - \bar{P}_n^2 - m_n^2) \vartheta(P_{0n}) \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.4)$$

Per n particelle finali si definisce l'elemento infinitesimo dello **spazio delle fasi** (limitatamente alle variabili "quadrimpulsi") come

$$dL_p = d^4P_1 \delta(P_{0i}^2 - \bar{P}_i^2 - m_i^2) \vartheta(P_{0i}) \dots d^4P_n \delta(P_{0n}^2 - \bar{P}_n^2 - m_n^2) \vartheta(P_{0n}) \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.5)$$

per cui

$$\Gamma = \int f_{dec}(P_1, \dots, P_n) dL_p \quad (eq.6)$$

Il termine $\vartheta(P_{0i})$ nella (3) viene introdotto per esprimere che solo la soluzione positiva ($P_0 = \pm \sqrt{\bar{P}^2 + m^2} = \pm E$) dell'equazione ottenuta ponendo a zero l'argomento delle funzioni $\delta(P_0^2 - \bar{P}^2 - m^2)$ ha un significato fisico.

Procediamo adesso ad una **semplificazione** dell'espressione (5). Ricordando la proprieta' della funzione δ :

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|[f'(x)]_{x=x_j}|} \quad (eq.7)$$

con x_j soluzioni di $f(x) = 0$, si ha:

$$d^4P\delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)\vartheta(P_0) = d^4P\vartheta(P_0) \left[\frac{\delta(P_0 - E)}{[2P_0]_{P_0=E}} + \frac{\delta(P_0 + E)}{[2P_0]_{P_0=-E}} \right] = d^4P \frac{\delta(P_0 - E)}{2E} = \frac{d^3\vec{P}}{2E} \quad (eq.8).$$

Inserendo la eq.8 nella eq.5 otteniamo l'espressione standard per lo spazio delle fasi per n particelle:

$$dL_p = \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{P}_n}{2E_n} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.9)$$

Per un decadimento possiamo quindi concludere con:

$$d\Gamma = f_{dec}(P_1, \dots, P_n) dL_p = f_{dec}(P_1, \dots, P_n) \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{P}_n}{2E_n} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.10)$$

e per un urto, analogamente:

$$d\sigma = f_{urto}(P_1, \dots, P_n) dL_p = f_{urto}(P_1, \dots, P_n) \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{P}_n}{2E_n} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.11)$$

Distribuzioni inclusive.

Nel caso in cui nello stato finale:

- (i) non sia possibile misurare un certo numero di grandezze nello stato finale, oppure
- (ii) non si sia interessati a misurare alcune grandezze nello stato finale,

allora le equazioni (10) ed (11) devono essere integrate sulle variabili non misurate e si avrà una distribuzione "**inclusiva**".

Alcuni esempi sono:

- il processo di fotoproduzione di coppie e^+e^- su nuclei, in cui siamo interessati solo al modulo degli impulsi dell'elettrone e del positrone nello stato finale;
- la produzione del bosone di Higgs ad LHC, in cui nell'urto ad altissima energia protone-protone si producono centinaia di particelle: in questo caso le variabili interessanti sono il modulo dell'impulso e l'angolo di emissione del bosone di Higgs;
- un decadimento con neutrini nello stato finale, in cui si può misurare solo il tri-impulso di particelle cariche, non essendo il neutrino praticamente osservabile in questa situazione sperimentale.

2. Nota sulle funzioni di distribuzione

Notiamo subito che la quantita' $\frac{d^3\vec{P}}{2E}$ e' un invariante relativistico.

Questo risulta direttamente dall'eq.8 : $d^4P\delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)\vartheta(P_0) = \frac{d^3\vec{P}}{2E}$. I termini d^4P e $\delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)$ sono evidenti invarianti relativistici; il termine $\vartheta(P_0)$ e' invariante in quanto ogni trasformazione di Lorentz mantiene il segno dell'energia.

Alternativamente, si puo' anche dimostrarne l'invarianza nel caso particolare di impulso diretto lungo l'asse x e per una trasformazione di Lorentz proprio nella direzione x :

$$\begin{aligned} \frac{d^3\vec{P}'}{2E'} &= \frac{dP'_x dP'_y dP'_z}{2E'_x} = \frac{\gamma d(P_x + \beta E) dP_y dP_z}{2\gamma(E + \beta P_x)} = \frac{[dP_x + \beta d\sqrt{P_x^2 + m^2}] dP_y dP_z}{2(E + \beta P_x)} = \frac{\left(dP_x + \beta \frac{2P_x dP_x}{2\sqrt{P_x^2 + m^2}}\right) dP_y dP_z}{2(E + \beta P_x)} = \\ &= \frac{dP_x dP_y dP_z}{2E} \quad \text{q.v.d.} \end{aligned}$$

Se misuriamo in un sistema di riferimento la funzione di distribuzione dell'impulso (tridimensionale) di una particella, i.e. il numero di eventi dn nell'elemento di volume nello spazio degli impulsi $dn = f(\vec{P})d^3\vec{P}$, in un secondo sistema di riferimento si misurerà lo stesso numero di eventi $dn = f'(\vec{P}')d^3\vec{P}' = f(\vec{P})d^3\vec{P}$.

La relazione fra le due funzioni di distribuzione si determina utilizzando la proprieta' di invarianza della quantita' $\frac{d^3\vec{P}}{2E}$:

$$\frac{E' f'(\vec{P}')d^3\vec{P}'}{E'} = \frac{E f(\vec{P})d^3\vec{P}}{E} \quad \text{da cui} \quad f'(\vec{P}') = \frac{E'}{E} f(\vec{P}) \quad (\text{eq.12})$$

3. Esempio. Lo spazio delle fasi a due corpi e le conseguenze sulla dipendenza della sezione d'urto dall'energia.

Consideriamo il caso $n=2$, in cui le due particelle nello stato finale hanno masse m_1 ed m_2 . Sia \sqrt{s} l'energia nel centro di massa, dove il tri-impulso totale e' nullo.

Indichiamo con \vec{P}_1 e \vec{P}_2 i tri-impulsi dei prodotti nello stato finale e con E_1 ed E_2 le loro energie. Lo spazio delle fasi si scrive, dall'eq.9:

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{P}_2}{2E_2} \delta^4\left(P_{in} - \sum P_i\right) = \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{P}_2}{2E_2} \delta\left(\sqrt{s} - E_1 - E_2\right) \delta^3\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) \\ &= \frac{d^3\vec{P}_1}{4E_1 E_2} \delta\left(\sqrt{s} - E_1 - E_2\right) = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \delta\left(\sqrt{s} - E_1 - E_2\right) \quad (\text{eq.13}) \end{aligned}$$

Si ha $P_1 = |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = P_{cm}$, con

$$P_{cm} = \sqrt{\frac{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}{4s}} \quad (eq.14)$$

perche' $\sqrt{s} = \sqrt{P_{cm}^2 + m_1^2} + \sqrt{P_{cm}^2 + m_2^2}$. (eq.15)

Proseguendo i calcoli nell'equazione (13) troviamo l'espressione finale:

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{P_1^2 + m_1^2} - \sqrt{P_1^2 + m_2^2}) = \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \frac{\delta(P_1 - P_{cm})}{\left| \left[\frac{d}{dP_1} \left(\sqrt{s} - \sqrt{P_1^2 + m_1^2} - \sqrt{P_1^2 + m_2^2} \right) \right]_{P_1=P_{cm}} \right|} = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \frac{\delta(P_1 - P_{cm})}{\left| \left[\frac{P_1}{E_1} + \frac{P_1}{E_2} \right]_{P_1=P_{cm}} \right|} = \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \frac{\delta(P_1 - P_{cm})}{P_{cm} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}} = \frac{P_{cm} d\Omega_1}{4\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (eq.16)$$

Quindi l'espressione per la sezione d'urto in un processo a due corpi e'

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = f_{urto}(\Omega_1) \frac{P_{cm}}{4\sqrt{s}} \quad (eq.17)$$

mentre il decadimento di una particella di massa M in due corpi si esprime con

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_1} = f_{dec}(\Omega_1) \frac{P_{cm}}{4M} \quad (eq.18)$$

Attenzione! Le funzioni f_{dec} e f_{urto} dipendono dalla dinamica dell'urto o del decadimento. Esse sono, di norma, anche dipendenti dall'energia nel centro di massa, dalle cariche e dalle masse delle particelle coinvolte, nonche' dalle orientazioni dei loro momenti angolari (spin).

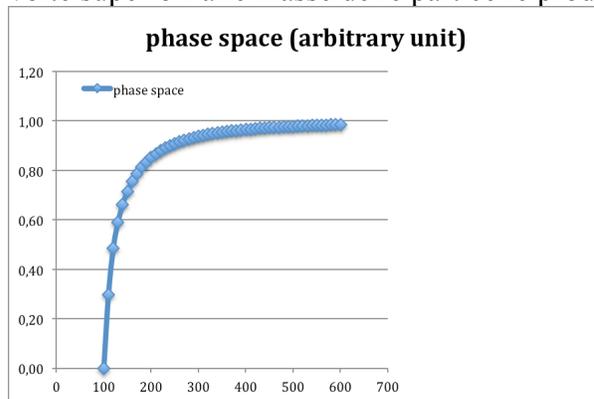
Consideriamo adesso un processo di annichilazione di un **eletttrone e di un positrone** in due particelle di massa m uguale e carica opposta (creazione di coppia particella-antiparticella). Se eletttrone e positrone hanno energie E uguali ma impulsi opposti si ha $\sqrt{s} = 2E$.

Desideriamo valutare la dipendenza della sezione d'urto totale dall'energia nel centro di massa dovuta al solo spazio delle fasi: per tale scopo consideriamo che f_{urto} non dipenda da s e da Ω .

Utilizzando l'eq.14 troviamo $P_{cm} = \sqrt{\frac{s}{4} - m^2}$, mentre utilizzando l'eq.17:

$$\sigma = \int f_{urto} \frac{P_{cm}}{4\sqrt{s}} d\Omega = \frac{\pi f_{urto}}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{s}{4} - m^2} = \frac{\pi f_{urto}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} = \frac{\pi f_{urto}}{2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \quad (eq.19)$$

La dipendenza dello spazio della fasi (il fattore sotto la radice quadrata nell'espressione 19) e' qui riportato in funzione dell'energia E (in MeV) per la creazione di una coppia particella-antiparticella di massa $105 MeV$ (muoni). Si noti come lo spazio delle fasi sia inizialmente nullo e cresca fino a raggiungere il suo valore massimo per energie circa 5 volte superiori alle masse delle particelle prodotte.



4. Esempi. Lo spazio delle fasi a tre corpi, il metodo della massa invariante per l'identificazione di particelle instabili, il decadimento $\mu \Rightarrow e\nu\nu$

Consideriamo il caso $n=3$, in cui le tre particelle nello stato finale hanno masse m_1 , m_2 ed m_3 . Sia \sqrt{s} l'energia nel centro di massa, dove il tri-impulso totale e' nullo.

Indichiamo con \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 i tri-impulsi nel centro di massa dei prodotti nello stato finale e con E_1 , E_2 ed E_3 le loro energie, sempre nel centro di massa.

Il numero di variabili indipendenti nello stato finale e' pari a $3n-4 = 5$.

Nel sistema del centro di massa i tri-impulsi delle tre particelle giacciono tutti su un piano (che nel caso del decadimento di una particella in tre corpi si chiama **piano di decadimento**).

Possiamo quindi dare l'orientazione di questo piano con tre angoli (gli "*angoli di Eulero*", spiegati nei testi di geometria, meccanica razionale, ed anche su wikipedia) denominati α , β , γ . Questi possono essere usati come 3 delle 5 variabili indipendenti e si puo' scrivere l'elemento infinitesimo nello spazio delle fasi di loro competenza come:

$$dad(\cos \beta) d\gamma \quad (eq.19)$$

Restano da scegliere le ultime due variabili che completano la definizione dello stato finale a tre corpi. Le scelte possibili sono molteplici, ma quella principalmente utilizzata (per esempio dal "Particle Data Group" <http://www-pdg.lbl.gov/2015/reviews/rpp2015-rev-kinematics.pdf>) e':

$$s_{12} = (P_1 + P_2)^2 = (P_{in} - P_3)^2 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_3 \quad (eq.20a)$$

$$s_{23} = (P_2 + P_3)^2 = (P_{in} - P_1)^2 = s + m_1^2 - 2\sqrt{s}E_1 \quad (eq.20b)$$

Il significato fisico di s_{12} e' chiaro: si tratta del quadrato della massa invariante del sistema composto dalle particelle 1 e 2. I suoi limiti sono:

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_3)^2 \quad (eq.21a)$$

Analogamente s_{23} e' il quadrato della massa invariante del sistema composto dalle particelle 2 e 3, con i limiti

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (\sqrt{s} - m_1)^2 \quad (eq.21b)$$

Notando che, se definiamo

$$s_{13} = (P_1 + P_3)^2 = (P_{in} - P_2)^2 = s + m_2^2 - 2\sqrt{s}E_2 \quad \text{con} \quad (m_1 + m_3)^2 \leq s_{13} \leq (\sqrt{s} - m_2)^2 \quad (eq.21c)$$

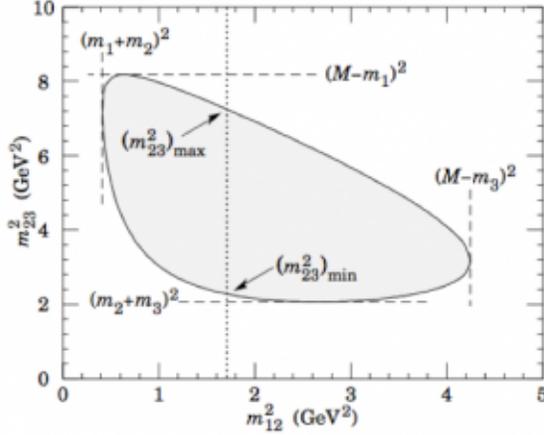
si ha

$$s_{12} + s_{13} + s_{23} = 3s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2\sqrt{s}(E_1 + E_2 + E_3) = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad (eq.22)$$

da cui possiamo ricavare gli ulteriori limiti:

$$m_1^2 + m_3^2 + 2m_2\sqrt{s} < s_{12} + s_{23} < s + m_2^2 - 2m_1m_3 \quad (eq.23)$$

che ci aiutano a definire la porzione permessa del piano $s_{12} - s_{23}$. Nella figura seguente e' indicata la regione permessa nelle due ultime variabili scelte.



Resta infine da appurare se lo spazio delle fasi dipenda o meno dalle variabili che abbiamo scelto. Se sviluppassimo i calcoli nell'equazione (9), troveremmo (non dimostrato in questi appunti) che

$$dL_p = \frac{1}{32s} ds_{12} ds_{23} d\alpha d(\cos \beta) d\gamma \quad (eq.24)$$

Questo risultato e' **notevole**: lo spazio delle fasi a tre corpi e' popolato uniformemente (si dice essere "piatto") se utilizziamo le 5 variabili che abbiamo individuato. Naturalmente lo spazio delle fasi e' "piatto" anche se utilizziamo le variabili E_1 ed E_3 : questo a causa delle relazioni (20a) e (20b).

Nota importante. La larghezza di decadimento a tre corpi si puo' quindi esprimere come:

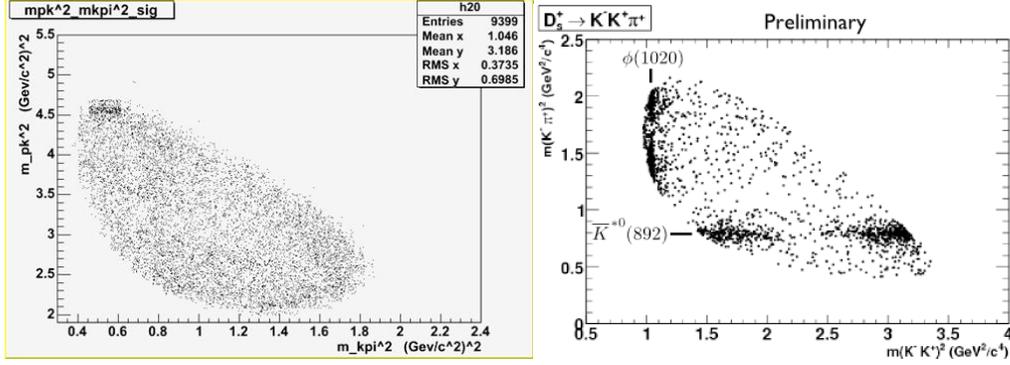
$$\Gamma = \int f_{dec}(s_{12}, s_{23}, \alpha, \beta, \gamma) dL_p \quad (eq.24b)$$

Nel caso in cui non vi sia una direzione privilegiata nello stato iniziale, per esempio per il decadimento di una particella priva di momento angolare ("spin"), la funzione f_{dec} dipendera' soltanto da s_{12} e s_{23} . E' quindi possibile integrare sugli angoli ottenendo

$$d\Gamma = f_{dec}(s_{12}, s_{23}) \frac{ds_{12} ds_{23}}{32s} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^1 d(\cos \beta) \int_0^{2\pi} d\gamma = \frac{\pi^2}{4s} f_{dec}(s_{12}, s_{23}) ds_{12} ds_{23} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{d^2\Gamma}{ds_{12} ds_{23}} = \frac{\pi^2}{4s} f_{dec}(s_{12}, s_{23}) \quad (eq.24c)$$

Un esempio di Dalitz plot popolato in modo abbastanza uniforme e' visibile nella figura seguente, sulla sinistra, dove le tre particelle nello stato finale sono un protone, un mesone π (massa 139.6 MeV) ed un mesone K (massa 493.7 MeV)



Tuttavia esistono, come si vede nella figura di destra, delle situazioni in cui il Dalitz plot appare principalmente popolato in regioni in cui la variabile s_{12} oppure la variabile s_{23} hanno un valore fortemente preferito. Questo corrisponde a decadimenti a tre corpi, in cui due delle particelle osservate sono in realta' particelle prodotte nel decadimento di una particella a vita media molto breve. Nella figura sopra a destra si ha, per esempio, evidenza delle particelle $\phi(1020 \text{ MeV})$ e $K^*(892 \text{ MeV})$.

Il metodo di identificare le particelle instabili tramite un picco nella massa invariante dei loro prodotti di decadimento e' fondamentale in fisica delle particelle ed e' appunto denominato "**tecnica della massa invariante**". Notiamo che questo metodo puo' essere utilizzato anche in stati finali con piu' di tre particelle.

Terminiamo con un esempio importantissimo in fisica delle particelle: il decadimento del muone in un positrone, un antineutrino di tipo μ ed un neutrino di tipo e :



Il muone ha massa 105.7 MeV , i due neutrini hanno massa trascurabile (inferiore ad 0.6 eV per il neutrino elettronico ad a 200 KeV per il neutrino muonico), ed il positrone ha una massa (511 KeV) trascurabile : trascurare queste masse e' una approssimazione abbastanza buona, se ci limitiamo alla sola valutazione dello spazio delle fasi e non desideriamo valutare gli effetti dovute alle forze responsabili del decadimento. Porremo quindi uguali a zero le masse dei prodotti di decadimento e pertanto le equazioni (20), (21) e (23) si scrivono, con $\sqrt{s} = M = 105.7 \text{ MeV}$:

$$s_{12} = M^2 - 2ME_3 \quad (\text{eq.26a})$$

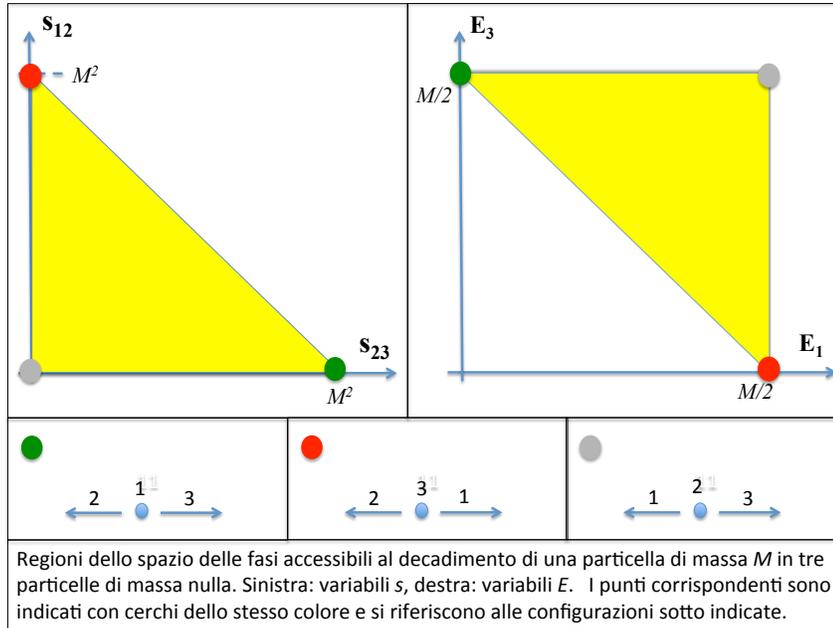
$$s_{23} = M^2 - 2ME_1 \quad (\text{eq.26b})$$

$$0 \leq s_{12} \leq M^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq E_3 \leq M/2 \quad (\text{eq.26c})$$

$$0 \leq s_{23} \leq M^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq E_1 \leq M/2 \quad (\text{eq.26d})$$

$$0 < s_{12} + s_{23} < M^2 \quad \Rightarrow \quad M/2 \leq E_1 + E_3 \leq M \quad (\text{eq.26e})$$

Nella figura, in cui la particella 1 e' il positrone, sono indicate le zone accessibili dello spazio delle fasi.



Poiche' i due neutrini non sono rivelabili, se non in rivelatori estremamente massivi e comunque con una probabilita' risibile, l'unica variabile osservabile sara' l'energia E_1 del positrone, che e' direttamente correlata alla massa invariante del sistema composto dai due neutrini secondo l'eq. (26b).

Calcoliamo la funzione di distribuzione di E_1 a partire dalla equazione (24c) ed ipotizzando che f_{dec} sia una costante:

$$d\Gamma = f_{dec} \frac{\pi^2}{4s} ds_{12} ds_{23} = f_{dec} \pi^2 dE_1 dE_3 \quad (eq.27)$$

Integrando su E_3 si ottiene:

$$d\Gamma = f_{dec} \pi^2 dE_1 \int_{M/2-E_1}^{M/2} dE_3 = f_{dec} \pi^2 E_1 dE_1 \quad (eq.28)$$

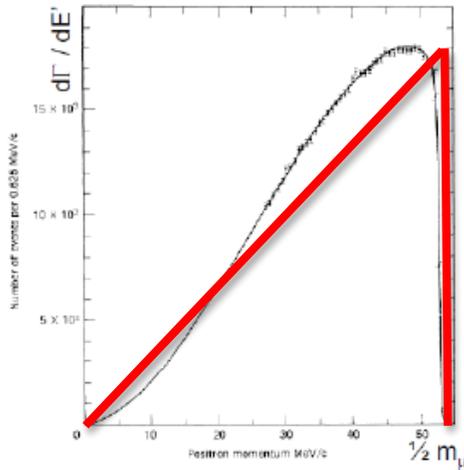
da cui si ottiene la distribuzione di E_1 , sempre considerando solo l'effetto dello spazio delle fasi:

$$\frac{d\Gamma}{dE_1} = f_{dec} \pi^2 M^2 E_1 \quad (eq.29)$$

Notiamo che il valore medio di E_1 e' esattamente $1/3$, come e' ragionevole nel caso di una totale simmetria delle tre particelle prodotte nel decadimento :

$$\langle E \rangle_1 = \frac{\int_0^{M/2} \left(\frac{d\Gamma}{dE_1} \right) E_1 dE_1}{\int_0^{M/2} \left(\frac{d\Gamma}{dE_1} \right) dE_1} = \frac{\int_0^{M/2} E_1^2 dE_1}{\int_0^{M/2} E_1 dE_1} = \frac{M}{3} \quad (eq.30)$$

La distribuzione dell'eq. (29) e' riportata in rosso nella figura seguente, dove e' sovrapposta ad una curva nera che rappresenta i dati sperimentali veri. Questi ultimi differiscono dalla nostra semplice previsione a causa della dinamica delle interazioni elettrodeboli.



Nota (non oggetto del programma del corso): i dati sperimentali (curva nera) sono ben parametrizzati dalla distribuzione :

$$\frac{d\Gamma}{dE_1} = \begin{cases} \cos^2 E_1^2 (3M - 4E_1) & 0 < E_1 < M/2 \\ 0 & E_1 > M/2 \end{cases} \quad (eq.31)$$

con il valore medio $\langle E \rangle_1 = \frac{\int_0^{M/2} E_1^3 (3M - 4E_1) dE_1}{\int_0^{M/2} E_1^2 (3M - 4E_1) dE_1} = \frac{7}{20} M$ (eq.32)