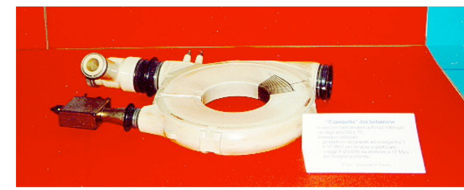
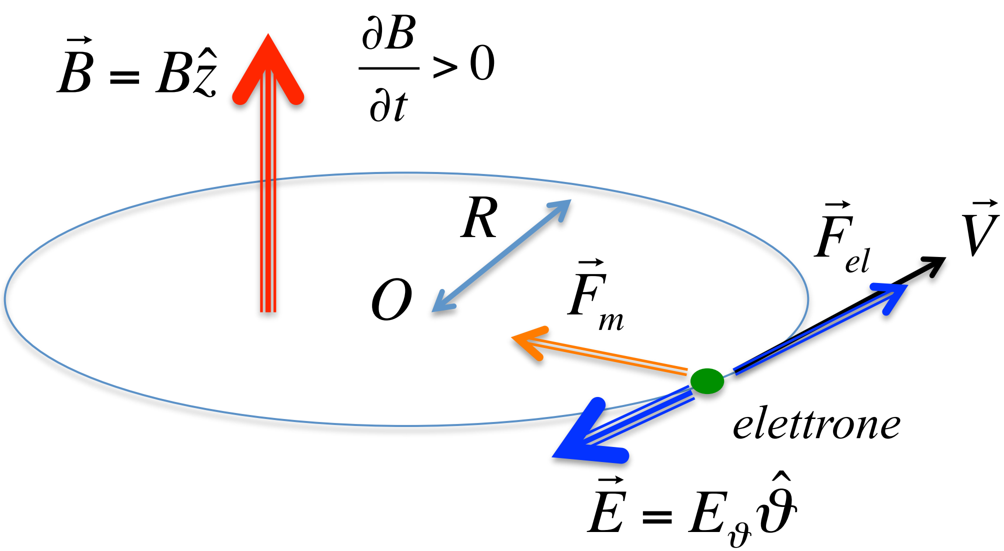
ACCELERATORI ad induzione
Il Betatrone – Kerst 1940



Utilizzato per accelerare elettroni.

Principio di funzionamento: induzione elettromagnetica. Viene applicato un campo magnetico assiale crescente con il tempo in simmetria cilindrica => si induce un campo elettrico tangenziale che accelera l'elettrone. La forza di Lorentz mantiene l'elettrone su una orbita circolare di raggio R, purchè il campo magnetico sull'orbita abbia un valore ben determinato.



$$2\pi R E_\vartheta = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\pi R^2 \frac{\partial < B >}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\vartheta = -\frac{R}{2}\frac{\partial < B >}{\partial t}$$

Valore medio del campo magnetico sul cerchio di raggio R al tempo t

BETATRONE

Proiettiamo l'equazione del moto sulla direzioni radiale e tangenziale: $\vec{F}_m + \vec{F}_{el} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$-eVB = -m\gamma \frac{V^2}{R} \Rightarrow p = eRB$$

Valore del campo magnetico sull'orbita di raggio R al tempo t

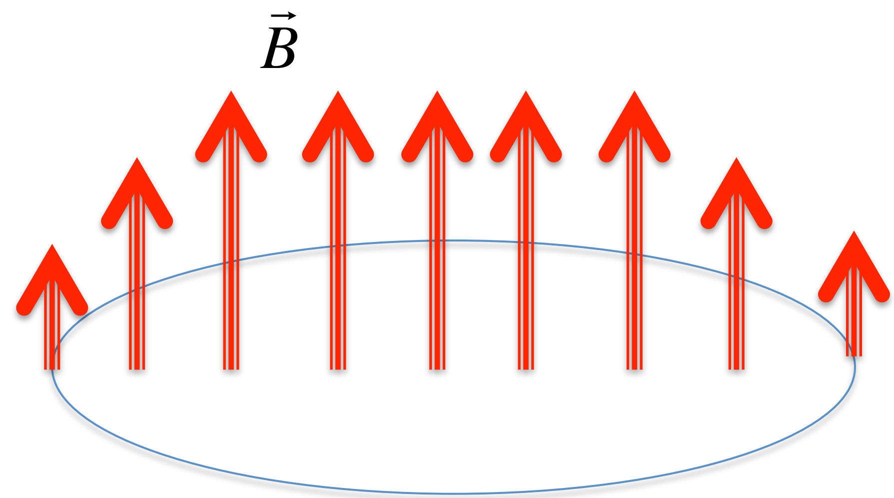
$$\frac{d(mV\gamma)}{dt} = -eE_\vartheta = \frac{eR}{2}\frac{\partial < B >}{\partial t} \Rightarrow p = \frac{eR}{2} < B >$$

Valore medio del campo magnetico sul cerchio di raggio R al tempo t

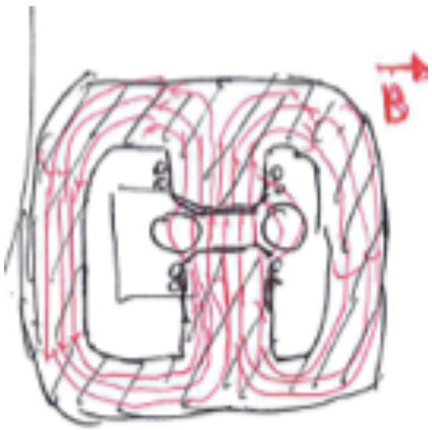
Passaggio valido se B(0)=0 – attenzione a fenomeni di isteresi

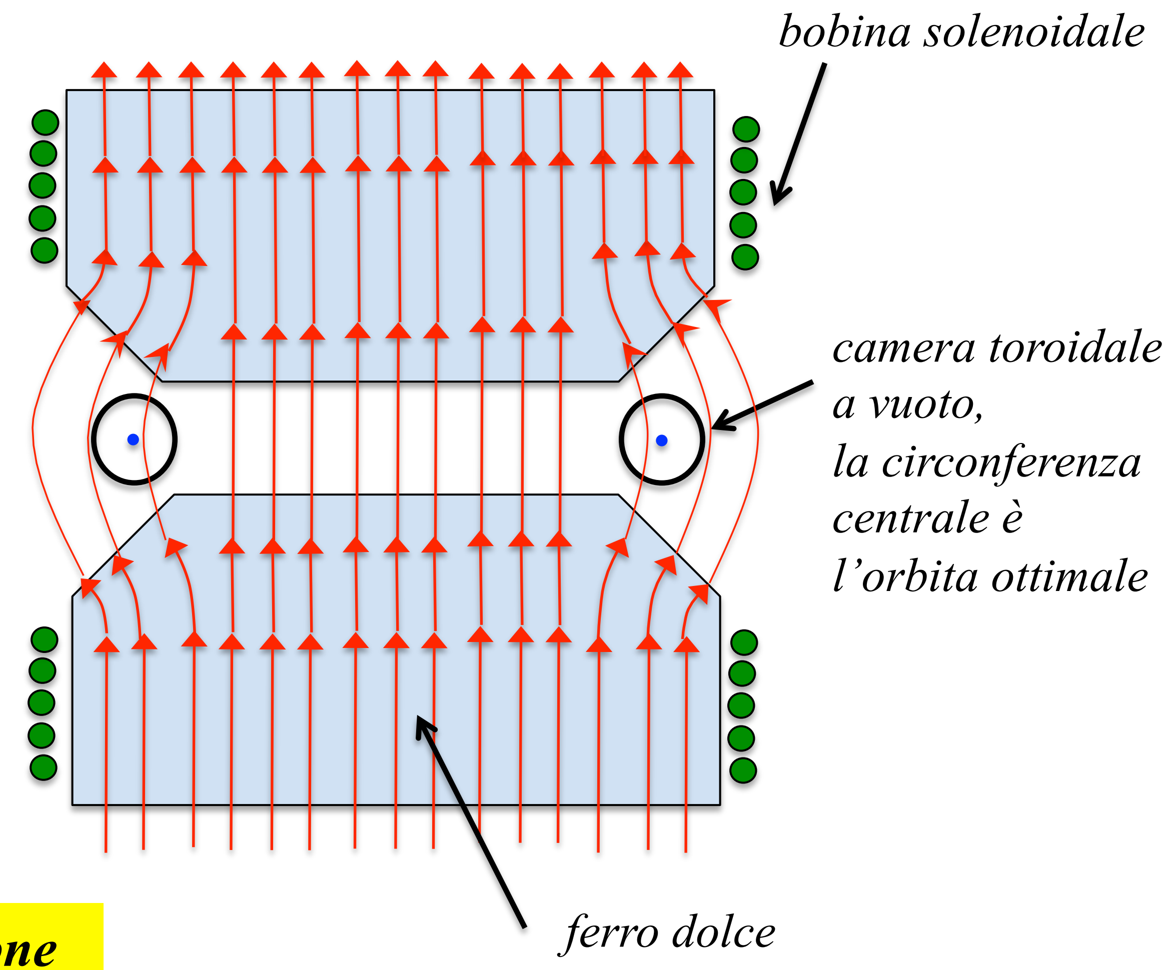
$$\boxed{B = \frac{< B >}{2}}$$

Il campo magnetico sull'orbita di raggio R al tempo t deve essere la metá del valore medio del campo magnetico sul cerchio di raggio R al tempo t



BETATRONE – produzione di campi magnetici con le proprietà necessarie





Fattore limitante: ***saturazione*** *del* ***ferro dolce*** *(che tuttavia ha un* ***ciclo di isteresi stretto****)*

BETATRONE – esempio numerico

$$< B >= 1T$$

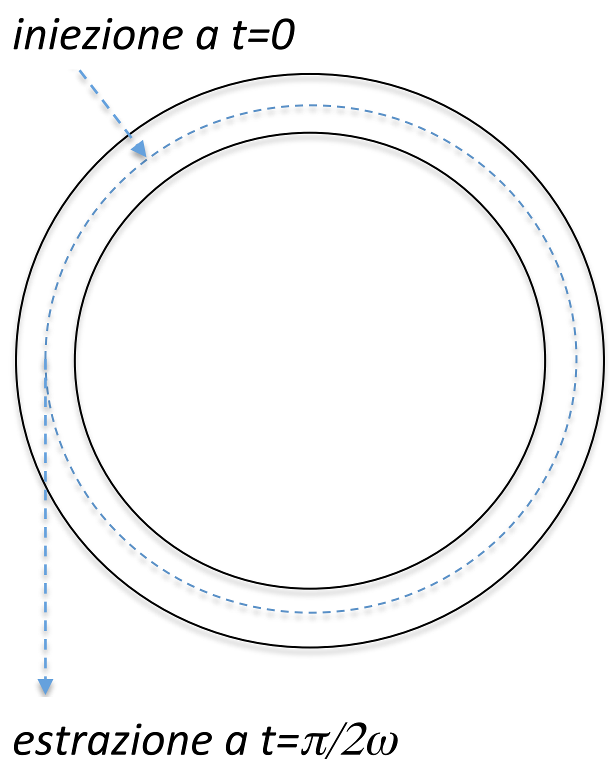
$$R = 1m$$

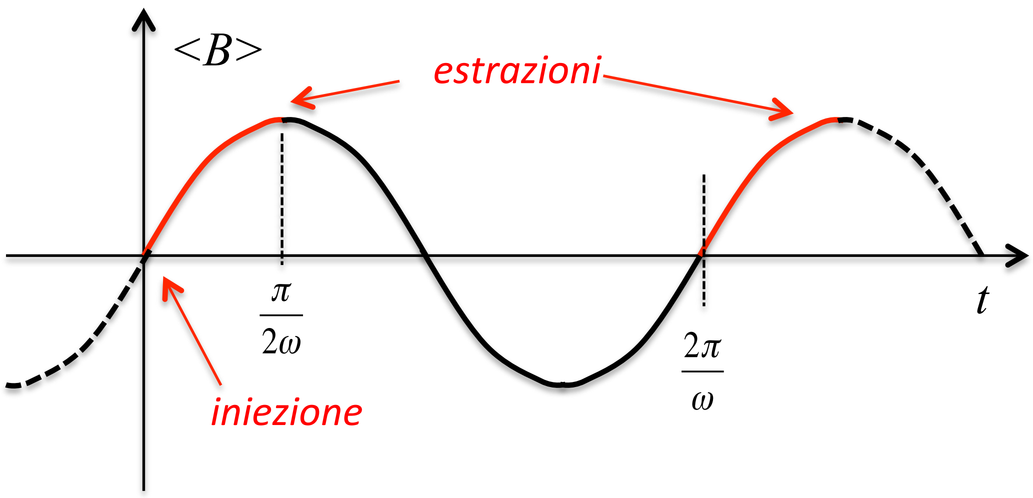
$$p_{\max} = \frac{eR}{2} < B >= 150\,\frac{MeV}{c}$$

Un elettrone sarebbe ultra-relativistico: $T_{\max} = p_{\max} c = 150\,MeV$

Un protone sarebbe non-relativistico: $T_{\max} = \frac{p^2_{\max}}{2m_p} = 15\,MeV$

BETATRONE – modalitá di operazione

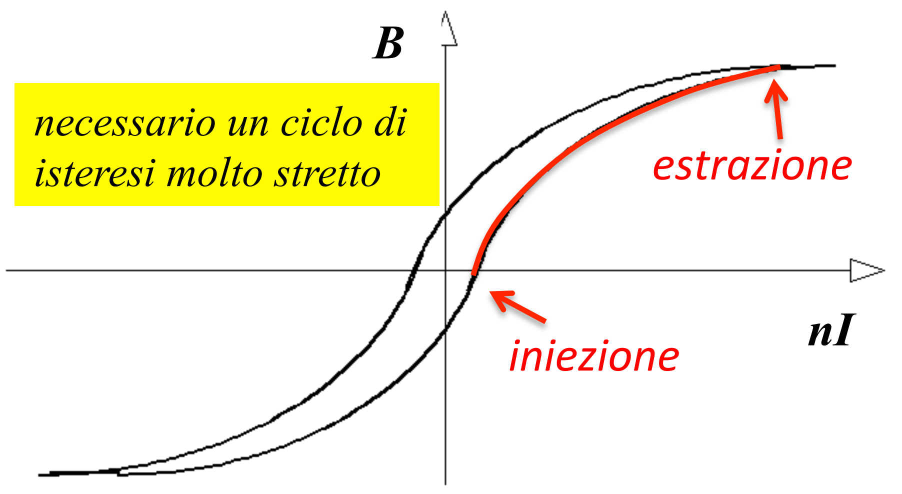




$$< B >= B_{\max} \sin(\omega t)$$

Come varia la velocitá (e l'energia) in funzione del tempo?

Quanti giri sono percorsi prima di raggiungere l'energia massima?



BETATRONE – legge oraria tangenziale

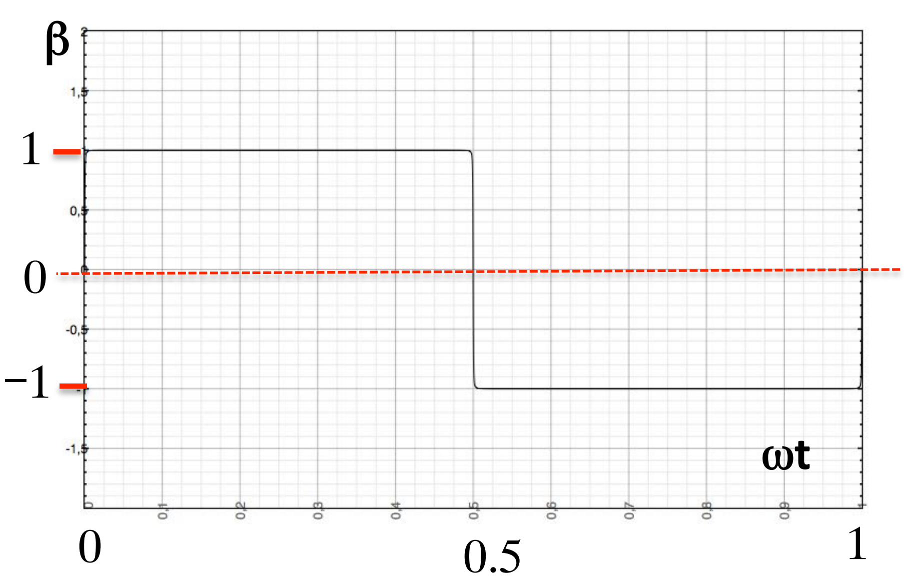
$$mV\gamma = \frac{eR<B>}{2} = \frac{eRB_{\max}}{2}\sin(\omega t)$$

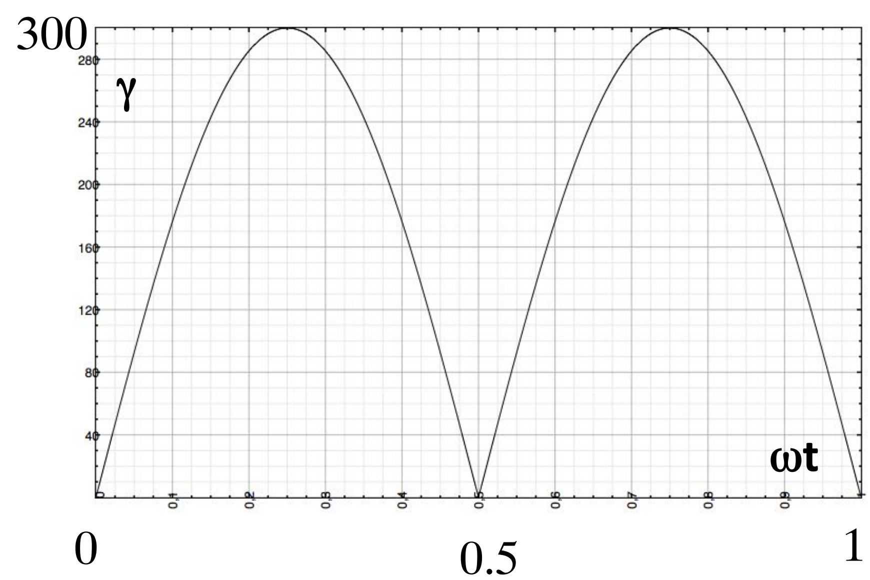
$$\beta\gamma = \frac{eRB_{\max}}{2mc}\sin(\omega t) = k\sin(\omega t) \quad \text{con} \quad k = \frac{eRB_{\max}}{2mc} \cong 300$$

$$\beta = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+\beta^2\gamma^2}} = \frac{k\sin\omega t}{\sqrt{1+k^2\sin^2\omega t}}$$

$$\gamma = \sqrt{1+\beta^2\gamma^2} = \sqrt{1+k^2\sin^2\omega t}$$

Per $t >> \frac{1}{k\omega} = \frac{T}{2k\pi} \approx \frac{T}{1900}$ $\quad \beta \cong 1$ (In pratica si raggiunge subito β=1)





BETATRONE – calcolo dei giri percorsi durante il processo di accelerazione

Sia *"s"* il percorso lungo l'orbita circolare: $$\frac{1}{c}\frac{ds}{dt} = \frac{k\sin\omega t}{\sqrt{1+k^2\sin^2\omega t}}$$

Il numero di giri percorsi é:

$$N = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{\pi/2\omega} ds = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\pi/2\omega}\frac{k\sin\omega t}{\sqrt{1+k^2\sin^2\omega t}}dt \approx \frac{c}{4\omega R} = \frac{c}{8\pi fR} = \frac{11.9MHz}{f}$$

dove abbiamo approssimato considerando un raggiungimento immediato della velocitá della luce. Per esempio *f=10kHz => 1190 giri*. Il calcolo esatto darebbe:

$$N = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\pi/2\omega}\frac{k\sin\omega t}{\sqrt{1+k^2\sin^2\omega t}}dt = \frac{c}{4\pi^2 Rf}\int_0^{\pi/2}\frac{k\sin w}{\sqrt{1+k^2\sin^2 w}}dw = \frac{c}{4\pi^2 Rf}\int_0^{\pi/2}\frac{-d\cos w}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1-\cos^2 w}} =$$

$$= \frac{c}{4\pi^2 Rf}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1-y^2}} = \frac{c}{4\pi^2 Rf}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}\right) \cong \frac{11.9MHz}{f}$$

e si può svilupare in serie:

$$N \approx \frac{c}{4\pi^2 Rf}\arcsin\left(1-\frac{1}{2k^2}\right) \cong \frac{c}{4\pi^2 Rf}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{c}{8\pi Rf}\left(1-\frac{1}{\pi k^2}\right)$$