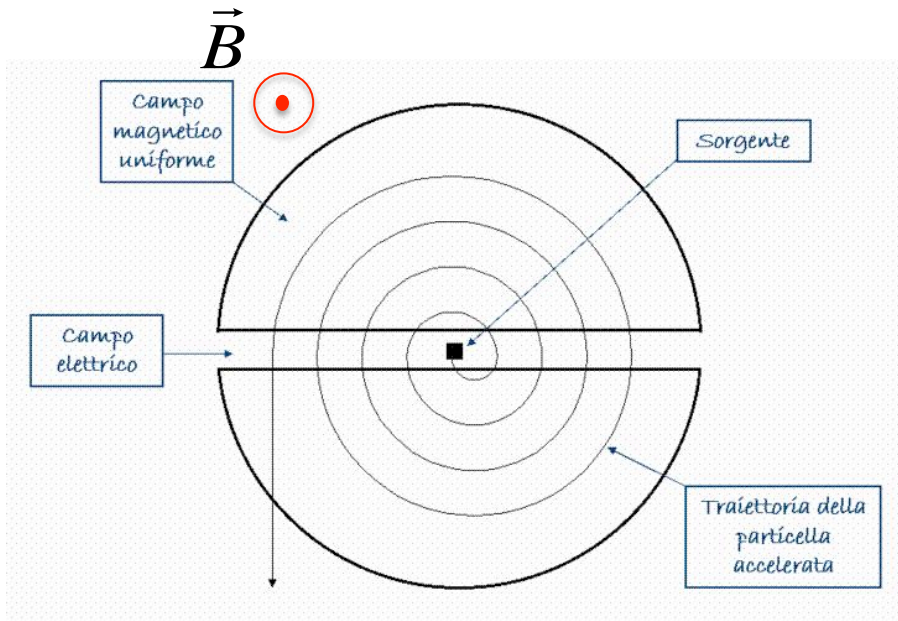


CICLOTRONE - Lawrence, 1932



Ciclotrone nei Laboratori Nazionali
INFN di Legnaro (PD)

Ciclotrone: gli ioni accelerati effettuano traiettorie con raggio crescente => il campo magnetico occupa tutto lo spazio.

$$m\gamma \frac{V^2}{R} = qVB \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V}{R} = \frac{qB}{m\gamma}$$

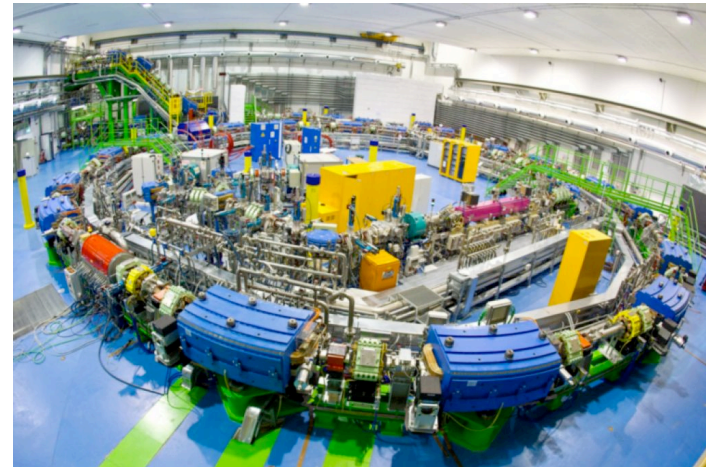
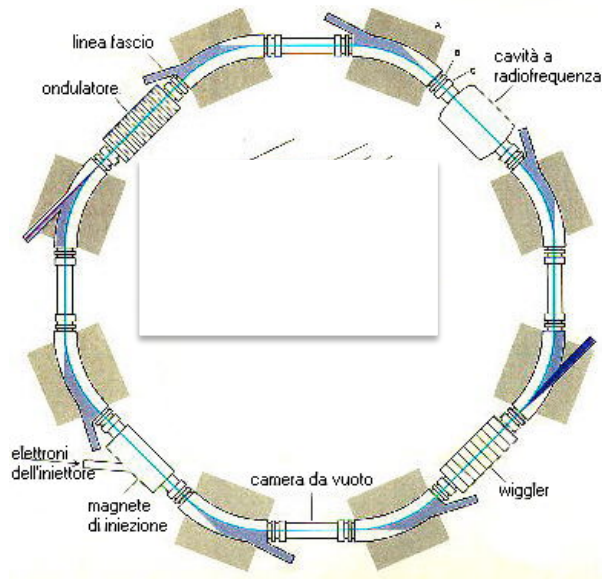
Ciclotrone NON relativistico: $\gamma=1 \Rightarrow$ la frequenza NON dipende dalla energia

Relativistico: la frequenza DIPENDE dall'energia e deve essere "modulata" => sincrotrone

SINCROTRONE

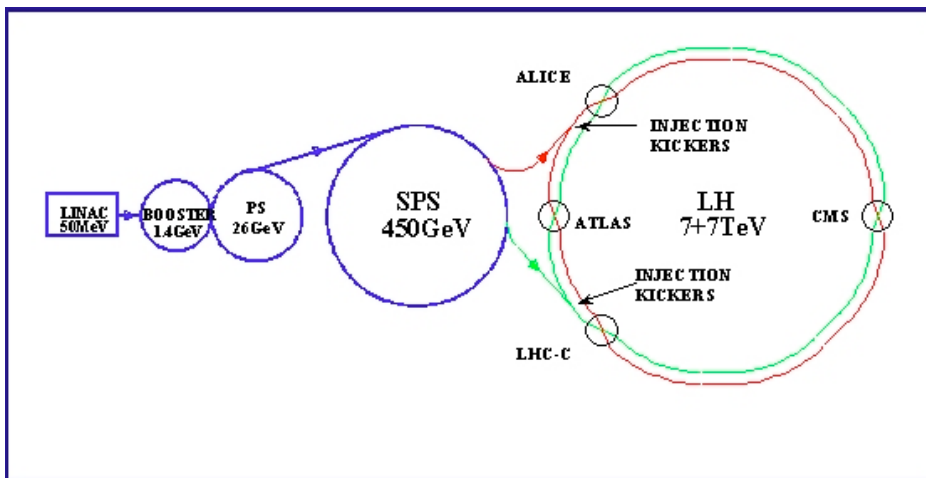
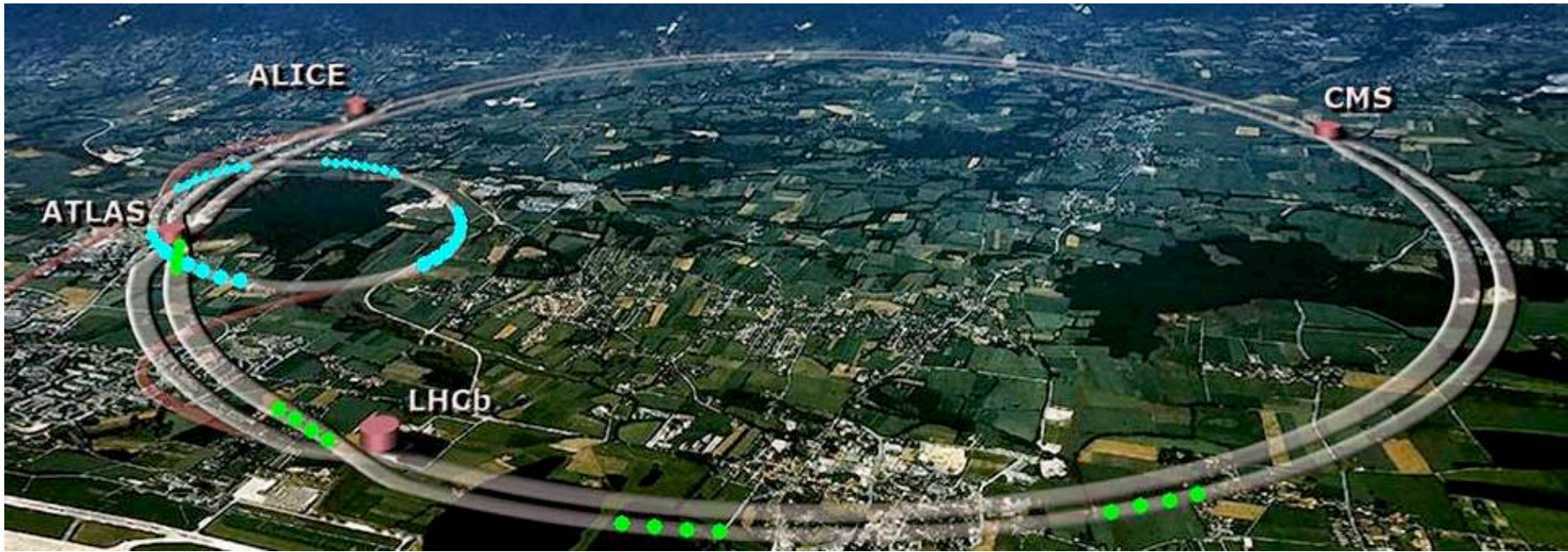
Sincrotrone: gli ioni accelerati ed il campo magnetico occupano solo una regione limitata attorno ad una circonferenza fissata => possibile la “sincronizzazione”: variazione del campo magnetico per adattarlo alla frequenza di rivoluzione

- *per accelerare ioni fino a GeV-TeV*
- *per accelerare ioni per adroterapia*
- *per accelerare elettroni e produrre luce di sincrotrone*



Sincrotrone per adroterapia

Esempio di Collisore $pp \Rightarrow$ LHC al CERN

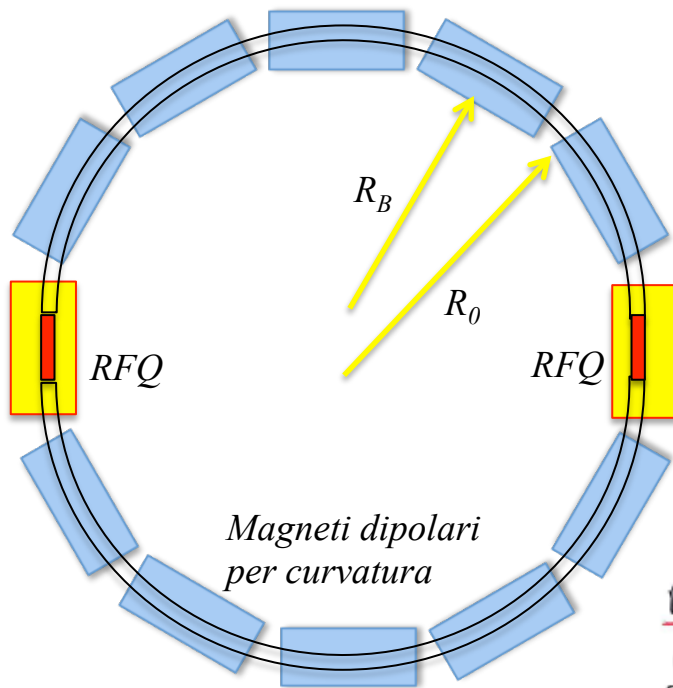


LHC dal 2008 $p+p$ 7 TeV + 7 TeV

Precedentemente (1989-2000) nello stesso tunnel collisore LEP $e^+ + e^-$

- LEP Fase I 45 GeV + 45 GeV*
- LEP Fase II 104 GeV + 104 GeV*

SINCROTRONE - potenza irradiata



RFQ (cavità a radiofrequenza):

- accelerano
- reintegrano l'energia

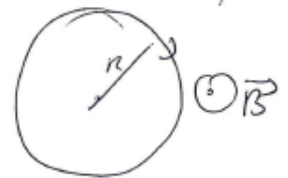
R_B : raggio nelle regioni curve

R_0 : raggio medio dell'orbita

POTENZA di impatta

Se fosse un moto circolare uniforme

($R_0 = R_B = R$) $\uparrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$



$$\underline{I} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 (\vec{a}^2 - |\vec{a}_\parallel \vec{\beta}|^2) =$$

$$= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 (\vec{a}^2 - \vec{a}^2 \beta^2) = \frac{q^2 |\vec{a}|^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{\beta^2 c^2}{R} \right)^2 =$$

$$\underline{I} = \frac{q^2 \gamma^4 \beta^4 c}{6\pi\epsilon_0 R^2}$$

SINCROTRONE - potenza totale irradiata

Energia persa in un giro, caso $E \gg m$; T_B = Tempo nel campo $\vec{B}$.

$$\underline{\Delta E_1} = I \cdot T_B = \frac{q^2 \gamma^4 \beta^4 c}{6\pi \epsilon_0 R_B^2} \cdot \frac{2\pi R_B}{\beta c} = \frac{q^2 \gamma^4 \beta^3}{3\epsilon_0 R_B} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{q^2 M_e c^2}{4\pi \epsilon_0 M_e c^2} \cdot \frac{\beta^3 \gamma^4}{R_B} = \boxed{\frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{R_B} \right) \cdot M_e c^2 \beta^3 \gamma^4}$$

● Esempio: LEP-II $E = 104 \text{ GeV} \Rightarrow \gamma = 2.035 \cdot 10^5, \beta \approx 1$; $R_B = 3.1 \text{ Km}, R_0 = 4.39 \text{ Km}$
 $(2\pi R_B = 19.5 \text{ Km}, 2\pi R_0 = 27.6 \text{ Km})$

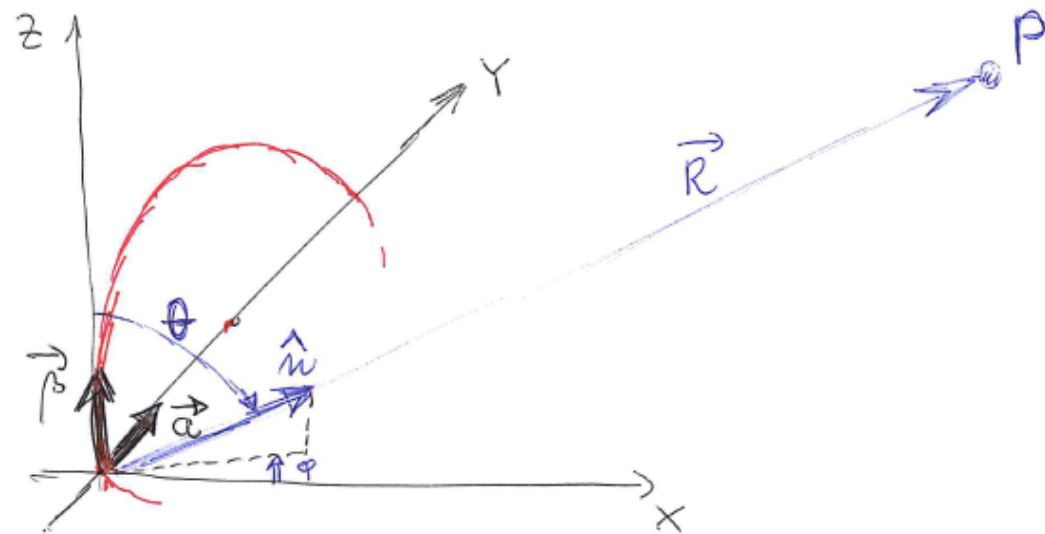
$$\Delta E_1 \cong \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}}{3.1 \cdot 10^3 \text{ m}} \right) \cdot 0.511 \text{ MeV} \cdot 1 \cdot (2.035 \cdot 10^5)^4 = 3.3 \cdot 10^9 \frac{\text{eV}}{\text{giro}}; \quad \frac{\Delta E_1}{E} = 3.2 \%$$

Cou un fascio $i = 5 \text{ mA}$ occorre una potente RFQ: $P = \Delta E_1 \cdot \frac{i}{q} = \underline{\underline{16.5 \text{ MW}}}$

● Esercizio. Calcolare ΔE_1 e $\frac{\Delta E_1}{E}$ per: i) LEP-I ($E = 45 \text{ GeV}, R_B = 3.1 \text{ Km}$) [elettroni];
 ii) un "betatrone" con $E = 150 \text{ MeV}$ (elettroni), $R_0 = R_B = 1 \text{ m}$. $\left[\Delta E_1 = \begin{cases} 116 \text{ MeV/giro (i)} \\ \end{cases} \right]$

● Esercizio. A LHC protoni da 7 TeV , $R_0 = 4.39 \text{ Km}, R_B = 2.8 \text{ Km}$.
 Calcolare ΔE_1 e il campo $|\vec{B}|$ necessario per effettuare la curvatura.

SINCROTRONE - potenza irradiata: distribuzione angolare (I)

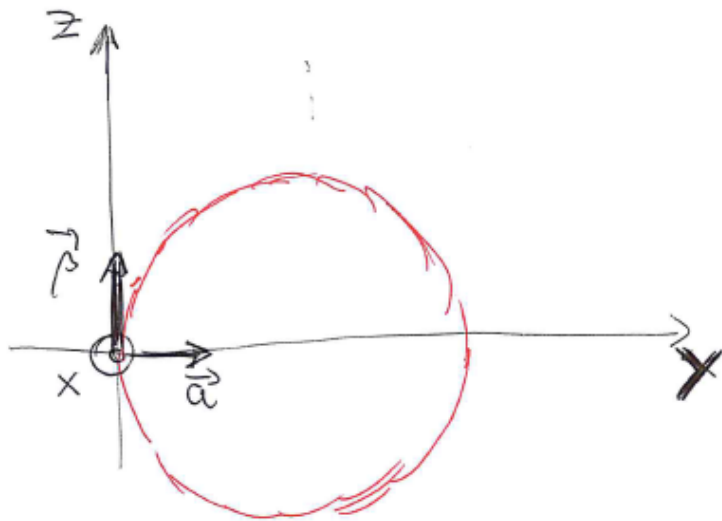


Moto nel piano YZ con $\vec{a}$ lungo Y
e $\vec{\beta}$ lungo Z :

$$\vec{\beta} = (0, 0, \beta) \quad , \quad \vec{a} = (0, a, 0)$$

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

[direzione generica di osservazione]



$$\frac{dI}{d\Omega} = (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) \frac{dt}{dt'} \cdot R^2 = \underbrace{\epsilon_0 c |\vec{E}|^2}_{\text{Campo di radiazione}} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \cdot R^2 =$$

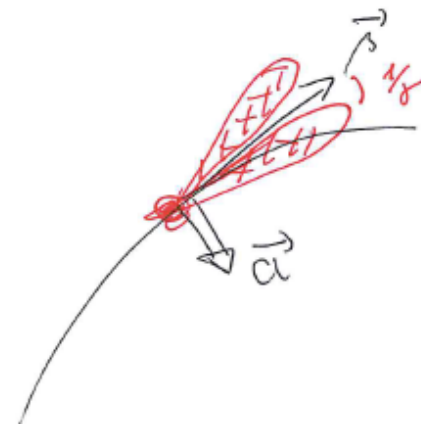
$$= \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 R c^2} \right)^2 \frac{|\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{a}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6} R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) =$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{a}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} \Rightarrow$$

SINCROTRONE - potenza irradiata: distribuzione angolare (II)

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\left| (\hat{n} - \vec{\beta})(\vec{a} \cdot \hat{n}) - \vec{a} [\hat{n} \cdot (\hat{n} - \vec{\beta})] \right|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})^2 a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - 2 \vec{a} \cdot (\hat{n} - \vec{\beta}) a \sin \theta \sin \varphi (1 - \beta \cos \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{(1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta) a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - 2 a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi (1 - \beta \cos \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \\ &= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^2} (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta - 2 + 2\beta \cos \theta) \right] \Rightarrow \\ \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right] \end{aligned}$$

↳ picco in un cono $\frac{1}{\gamma}$
attorno a $\vec{\beta}$



SINCROTRONE - potenza irradiata: verifica

Verifichiamo che $\int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$ (come deLarmor)

Wefetti $\int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\cos\theta d\varphi}{(1-\beta\cos\theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{\gamma^2 (1-\beta\cos\theta)^2} \right] =$

$$= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-\beta x)^3} \left[\varphi - \frac{(1-x^2)(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)}{\gamma^2 (1-\beta x)^2} \right]_{0}^{2\pi} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-\beta x)^3} \left(1 - \frac{1-x^2}{2\gamma^2 (1-\beta x)^2} \right) =$$

$$= \frac{q^2 a^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-\beta x)^3} - \frac{1}{2\gamma^2} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) dx}{(1-\beta x)^5} \right\} = \frac{q^2 a^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left\{ 2\gamma^4 - \frac{1}{2\gamma^2} \frac{4}{3} \gamma^6 \right\} = \frac{q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

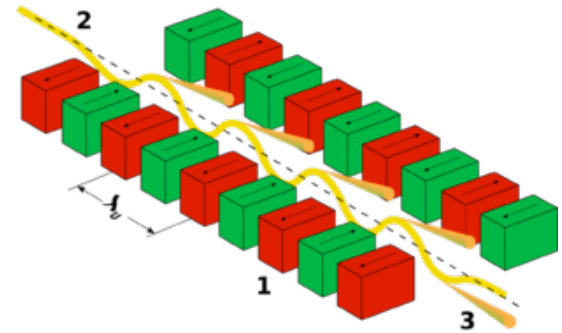
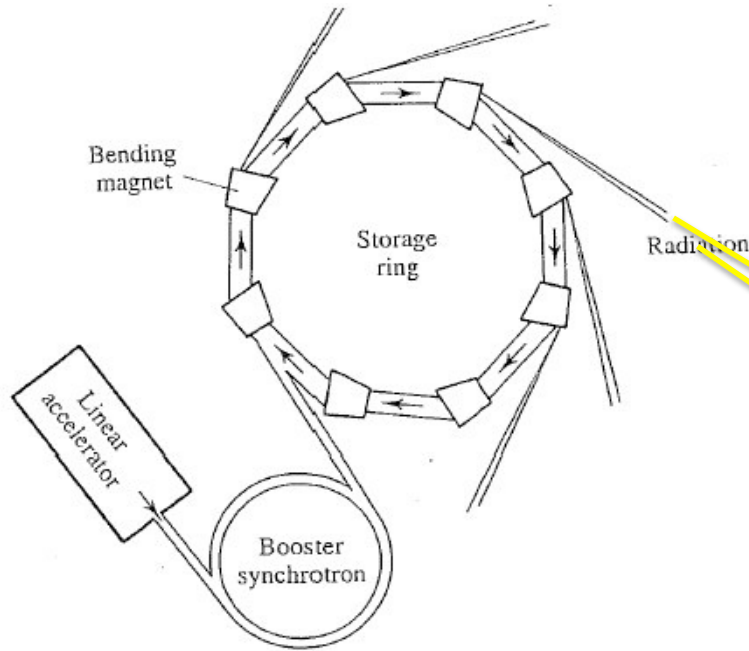
OK

$$= -\frac{1}{\beta} \int_{-1}^1 \frac{d(1-\beta x)}{(1-\beta x)^3} = \frac{1}{2\beta} \left[\frac{1}{(1-\beta x)^2} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1+\beta)^2} \right) = 2\gamma^4$$

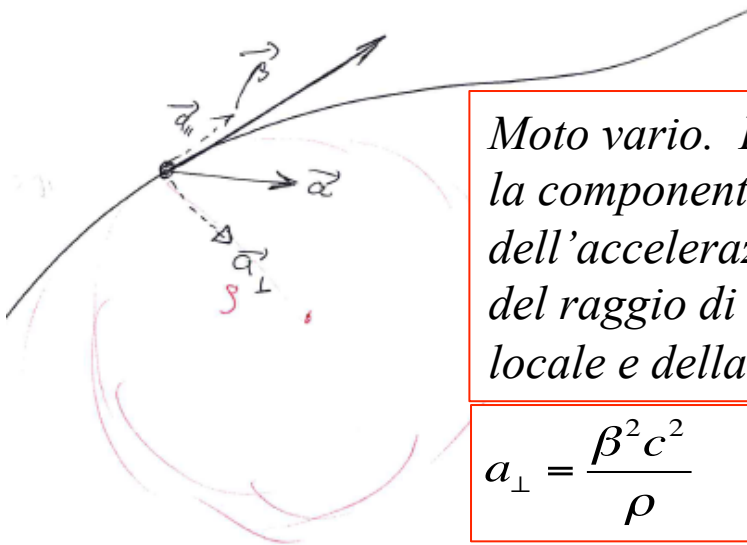
già utilizzato
per il linac.

Luce di SINCROTRONE



$$\sim \frac{1}{\gamma}$$

produzione tramite wiggler o ondulatori

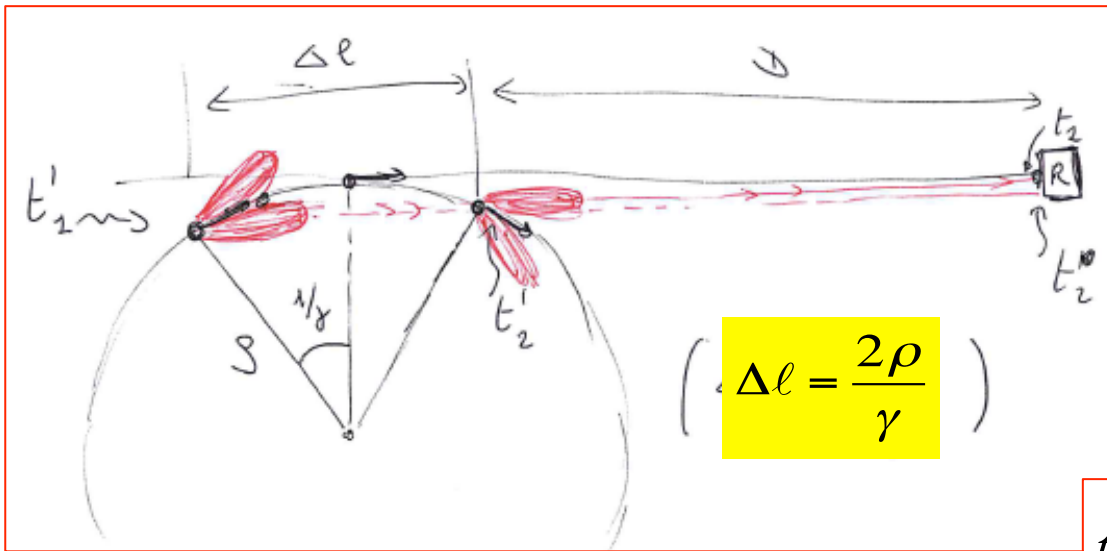


Moto vario. Rilevante solo la componente trasversale dell'accelerazione, funzione del raggio di curvatura locale e della velocità

$$a_{\perp} = \frac{\beta^2 c^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\beta^2 c^2}{a_{\perp}}$$

Nelle regioni curve vi è irraggiamento

Esso è concentrato in un cono di apertura $\sim 1/\gamma$ rispetto alla tangente alla curva



Il ricevitore “R” vede arrivare la radiazione :

- al tempo t_1 se emessa al tempo t'_1
- al tempo t_2 se emessa al tempo t'_2

$$t_1 \approx t'_1 + \frac{\Delta\ell + D}{c}$$

$$t_2 \approx t'_2 + \frac{D}{c} = t'_1 + \frac{\Delta\ell}{V} + \frac{D}{c}$$

Quindi la radiazione viene osservata per un tempo Δt :

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 = t'_1 + \frac{\Delta\ell}{V} + \frac{D}{c} - \left(t'_1 + \frac{\Delta\ell + D}{c} \right) = \\ &= \frac{\Delta\ell}{V} - \frac{\Delta\ell}{c} = \Delta\ell \left(\frac{1}{\beta c} - \frac{1}{c} \right) = \frac{2\rho}{\gamma} \left(\frac{1 - \beta}{\beta c} \right) = \\ &= \frac{2\rho}{\gamma\beta c} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} \right) \approx \frac{\rho}{c\gamma^3} \end{aligned}$$

$$\Delta t \approx \frac{\rho}{c\gamma^3}$$

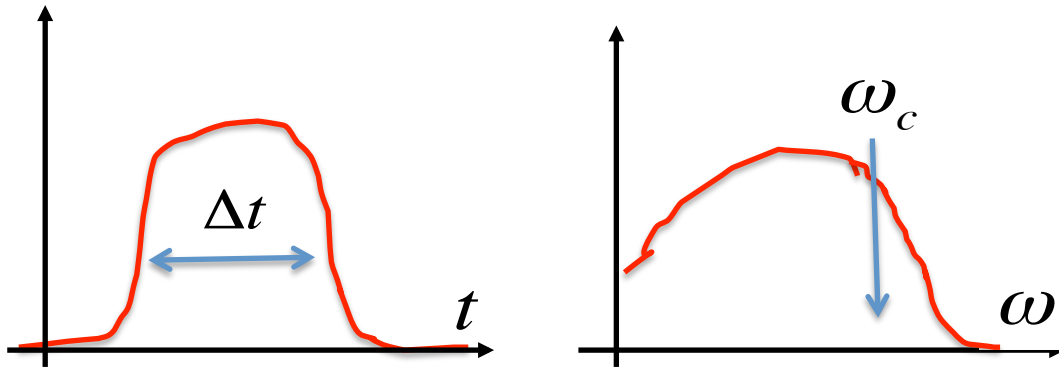
Luce di SINCROTRONE

$$\Delta t \approx \frac{\rho}{c\gamma^3}$$

Nota: si poteva anche utilizzare direttamente la relazione:

$$\Delta t = \Delta t' \left(\frac{dt}{dt'} \right) = \frac{\Delta \ell}{V} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \approx \frac{2\rho}{\gamma\beta c} (1 - \beta) = \frac{2\rho}{\gamma\beta c} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} \right) \approx \frac{\rho}{c\gamma^3}$$

Se Δt è la durata dell'impulso, lo spettro in frequenza angolare si estende fino ad una "frequenza critica" $\omega_c \sim 1/\Delta t$



$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{c\gamma^3}{\rho}$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} \approx \frac{2\pi\rho}{\gamma^3}$$

Esercizio.

Calcolare il valore del campo magnetico, la frequenza critica e la corrispondente lunghezza d'onda della radiazione emessa da un sincrotrone in cui circolano elettroni di energia 5 GeV in una regione in cui il raggio di curvatura è 30m.

$$B(T) = \frac{1}{300} \frac{P(\text{MeV} / c)}{\rho(m)} = 5.5 \text{ kG}$$

$$\omega_c \approx \frac{c\gamma^3}{\rho} = 0.94 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi\rho}{\gamma^3} \approx 2.02 \text{ \AA}$$

Notiamo che un fotone avente la frequenza critica avrebbe una energia pari a 6.2 KeV.

Calcolare poi l'energia irradiata (classicamente!) da un elettrone in un arco di lunghezza $L=3\text{cm}$, e l'energia irradiata da un pacchetto di 10^9 elettroni nello stesso tratto.

$$\Delta E_1 \cong \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{R_B} m_e c^2 \gamma^4 \cong 2 \text{ MeV} \Rightarrow \Delta E \cong \Delta E_1 \frac{L}{2\pi R_B} = 320 \text{ eV}$$

$$\Delta E(10^9 \text{ e}^-) \approx 320 \text{ GeV}$$

segue =>

Luce di SINCROTRONE – Esercizio-I (seguito)

[seguito] Se la distribuzione in frequenza fosse piatta fra una frequenza minima (pari alla frequenza di rivoluzione c/ρ) e la frequenza critica (ω_c), quanti fotoni di energia compresa fra 6 e 6.1 keV si produrrebbero? Nota: il risultato ha un significato in una approssimazione semiclassica se il numero ottenuto è grande rispetto all'unità.

$\frac{dI}{dE_\gamma}$ distribuzione della potenza irradiata in funzione dell'energia.

Per le ipotesi fatte $\frac{dI}{dE_\gamma}$ è una costante. Poiché $\Delta E = \int_{E_{\min}}^{E_c} \frac{dI}{dE_\gamma} dE_\gamma \Rightarrow \frac{dI}{dE_\gamma} = \frac{\Delta E}{E_c - E_{\min}}$

$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma}$ distribuzione del numero di fotoni irradiati in funzione dell'energia

$$dI = E_\gamma dN_\gamma \quad \text{da cui} \quad \frac{dI}{dE_\gamma} = E_\gamma \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \Rightarrow \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{\Delta E}{E_c - E_{\min}}$$

La frequenza minima è trascurabile rispetto alla frequenza critica (ω_c), ed i fotoni di energia compresa fra 6 e 6.1 keV sono (per 10^9 elettroni):

$$N = \int_{6\text{keV}}^{6.1\text{keV}} \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} dE_\gamma = \int_{6\text{keV}}^{6.1\text{keV}} \frac{1}{E_\gamma} \frac{\Delta E}{E_c} dE_\gamma = \frac{\Delta E}{E_c} \ln \frac{6.1}{6.0} = 8.5 \times 10^5$$

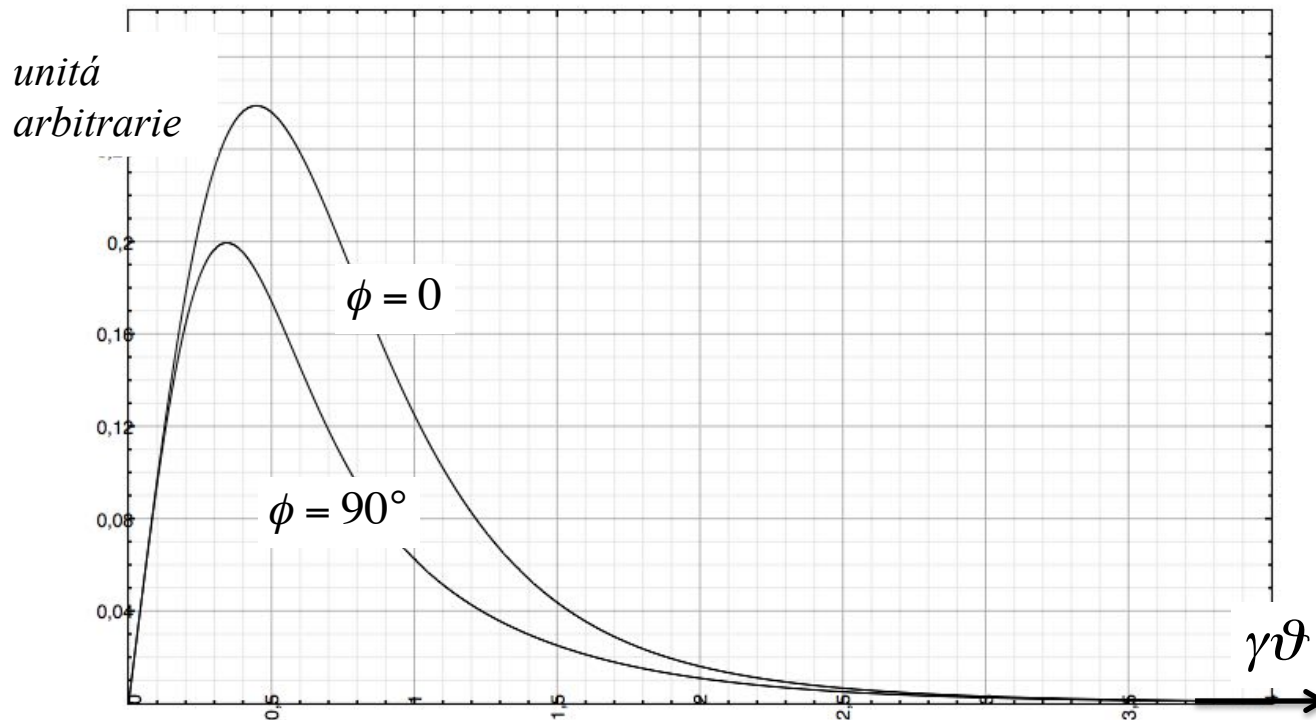
Luce di SINCROTRONE – Esercizio-II

Esercizio. Sviluppare la potenza irradiata da un sincrotrone per piccoli angoli θ ed disegnarne il grafico per i valori $\phi=0$ e $\phi=\pi/2$.

$$\frac{dI}{d\cos\vartheta} = \frac{q^2 a^2}{8\pi\epsilon_0 c^3 (1 - \beta \cos\vartheta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2\vartheta \sin^2\phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos\vartheta)^2} \right)$$

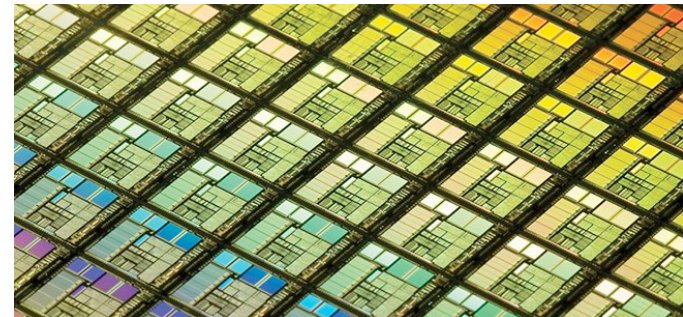
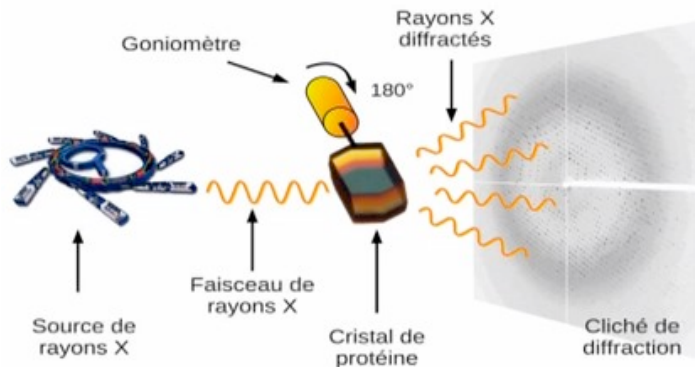
$$1 - \beta \cos\vartheta \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) \approx \frac{1}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \vartheta^2)$$

$$\frac{dI}{d\vartheta} \approx \frac{q^2 a^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \vartheta \left(\frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \vartheta^2} \right)^3 \left(1 - \frac{4\gamma^4 \vartheta^2 \sin^2\phi}{2\gamma^2 (1 + \gamma^2 \vartheta^2)^2} \right) = \frac{q^2 a^2 \gamma^5}{\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\gamma \vartheta}{(1 + \gamma^2 \vartheta^2)^3} \left(1 - \frac{2\gamma^2 \vartheta^2 \sin^2\phi}{(1 + \gamma^2 \vartheta^2)^2} \right)$$

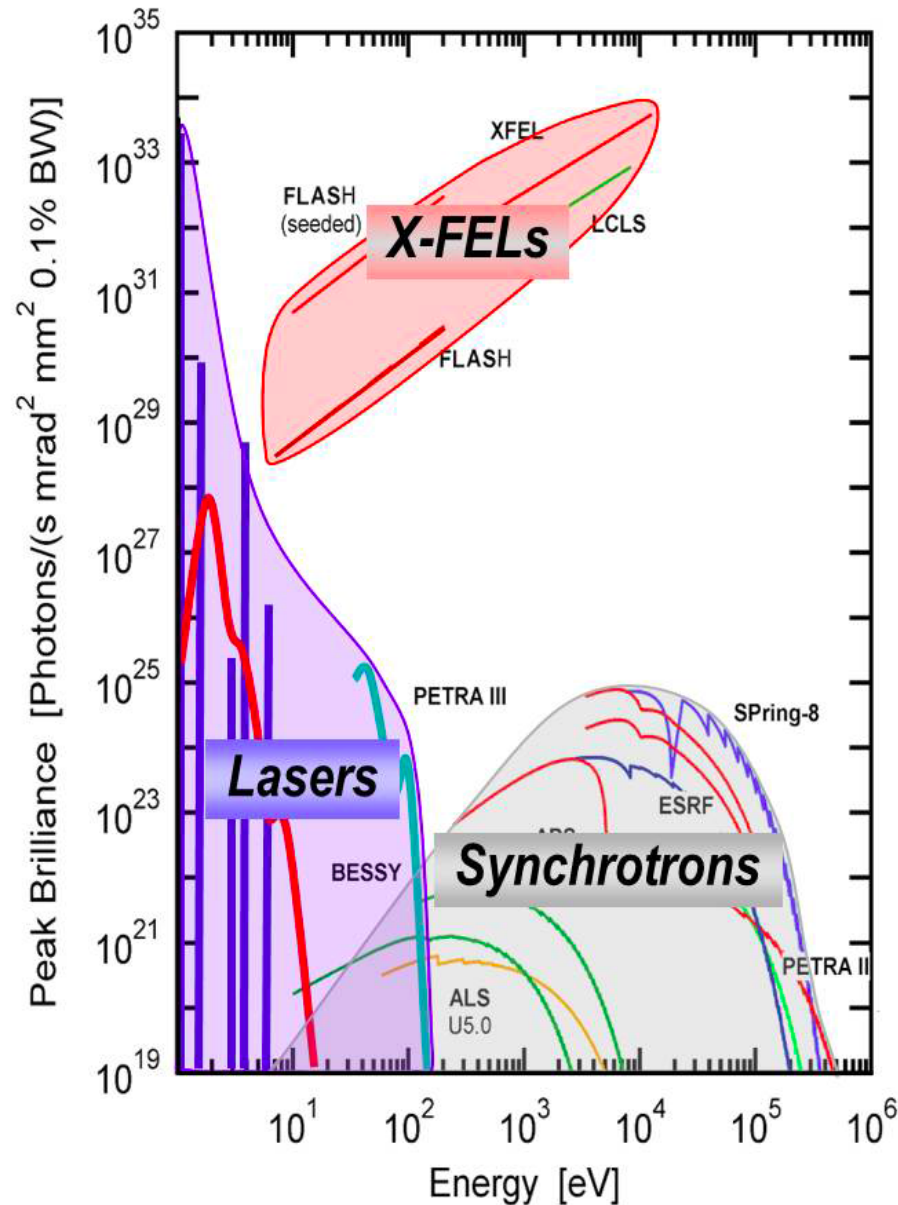


Luce di SINCROTRONE – Elenco di alcune applicazioni

- *Litografia per produzione di chip in elettronica*
- *Studi di proteine e reazioni in biochimica*
- *Studi di molecole complesse*
- *Analisi di materiali*
- *Diagnosi mediche*
- *Indagini su beni culturali (datazioni dipinti, ...)*



Luce di SINCROTRONE – confronto con altre sorgenti di luce



Energie tipiche della luce di sincrotrone:

100 eV - 100 keV

Quali rivelatori servono per misurare questi fotoni?