ACCELERATORI - classificazione

***Elettrostatici**:*
- *Van der Graaff*
- *Cockroft-Walton*
- *Tandem*

*Basati su **elementi acceleranti** (drift tubes o cavitá risonanti)*
- *Lineari (un solo passaggio in ogni elemento)*
- *Circolari: ciclotrone, sincrotrone (passaggi multipli)*
- *Collisori (Adone, LEP, SppS, LHC, ...)*
- *NTA: nuove tecniche acceleratrici*

*Basati su **induzione** e.m.: il betatrone*

ACCELERATORI(di particelle cariche): il primo parametro importante

Tensione di lavoro => energia della singola particella

⇒ *necessario superare le soglie di reazione, ottimizzare le misure*
⇒ *nota: é importante anche la dispersione dell'energia rispetto al valore medio (che dovrebbe essere quello ottimale)*

*Da pochi **MeV** (fisica nucleare, produzione di radioisotopi, ...)*

*a **GeV** (elettroni per fisica subnucleare o radiazione di sincrotrone)*

*a molti **TeV** (fisica subnucleare "high energy frontier")*

ACCELERATORI(di particelle cariche): esercizi sulle energie di soglia

"High Energy" frontier

Calcolare le energie di soglia per i seguenti processi di fisica subnucleare in cui la seconda particella é inizialmente ferma (bersaglio fisso):*

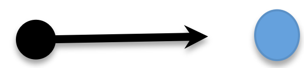
$$\gamma + p \to e^{+} + e^{-} + p$$

$$\gamma + e^{-} \to e^{+} + e^{-} + e^{-}$$

$$p + p \to p + p + p + \overline{p}$$

$$p + {}^{63}Cu \to {}^{63}Cu + p + p + \overline{p}$$

$$e^{+} + e^{-} \to \pi^{+} + \pi^{-}$$

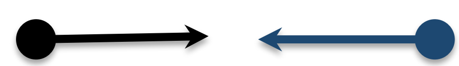


Calcolare le energie di soglia per i seguenti processi in cui i due proiettili si scontrano con velocitá uguali ed opposte (collisore):

$$e^{+} + e^{-} \to \pi^{+} + \pi^{-}$$

$$e^{+} + e^{-} \to W^{+} + W^{-}$$

$$p + p \to p + p + p + \overline{p}$$



(*) le energie di soglia per i processi di fisica nucleare sono giá state discusse

ACCELERATORI(di particelle cariche): un secondo parametro importante

Intensitá di corrente (**per ogni singolo fascio**)
*e, nei collisori, la **"luminositá"***

Infatti il numero di eventi é pari alla sezione d'urto moltiplicato:

- *l'intensitá del fascio ed il numero di bersagli per unitá di superficie (su bersaglio fisso)*

$$\frac{dN_f}{dt} = \Phi_a \sigma_f n_s$$

- *la luminositá (nei collisori)*

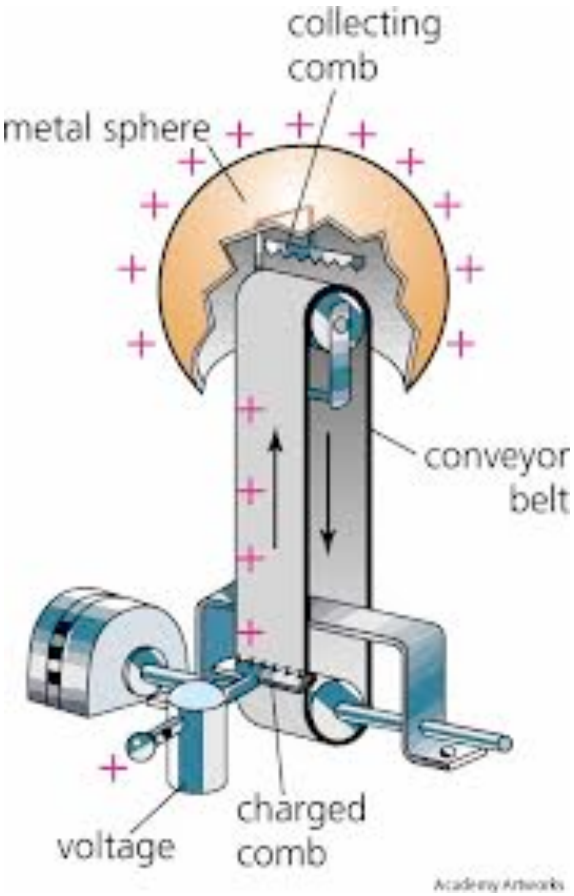
$$L \equiv \frac{dN_f/dt}{\sigma_f} \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_f}{dt} = L\sigma_f$$

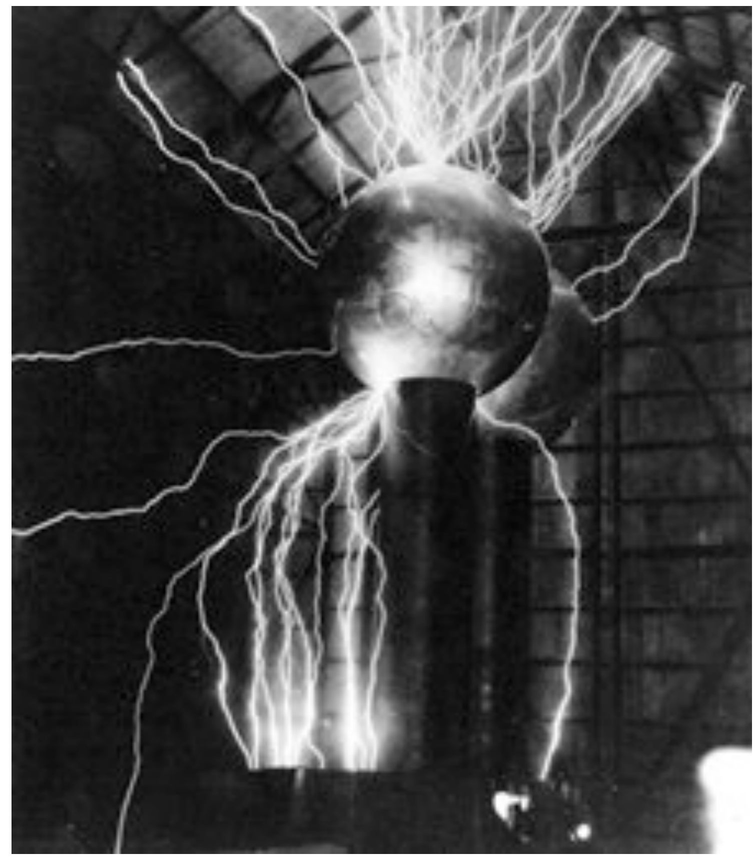
"High Luminosity" frontier

(record attuale: KEKB $2x10^{34}Hz/cm^2$)

ACCELERATORI ELETTROSTATICI
Van der Graaf

Tensioni ~5MV (talvolta fino a 10MV), basse correnti (~μA), stabili in tensione
Utilizzo nei Tandem

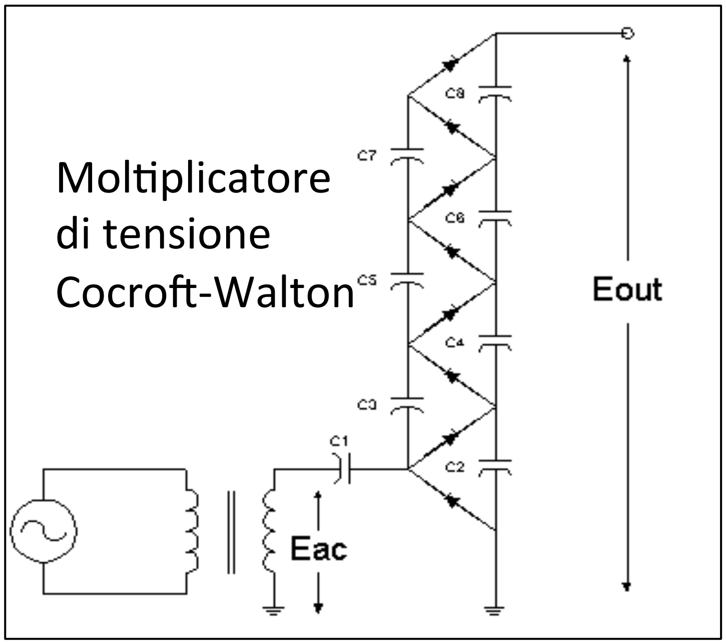




ACCELERATORI ELETTROSTATICI
acceleratore COCKROFT-WALTON (Premi Nobel 1951)

Utilizzato per produrre la prima reazione nucleare (1932): p+Li -> $\alpha+\alpha$

Tensioni ~1MV, alte correnti (~mA), “ripple” in tensione

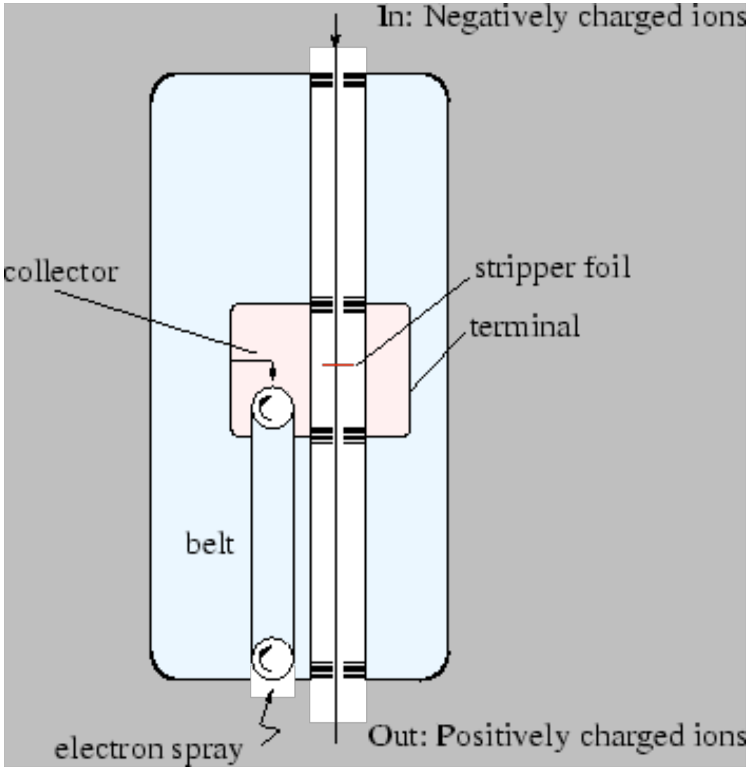


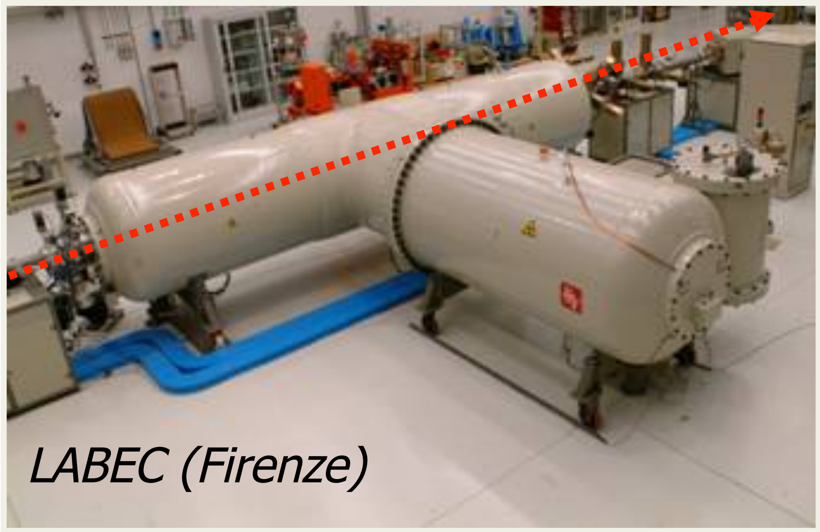
Anche usati come iniettori di altre macchine acceleratrici, come a Fermilab: idrogeno H^- (ione negativo) fino a 750 keV

ACCELERATORI ELETTROSTATICI
acceleratore elettrostatico TANDEM

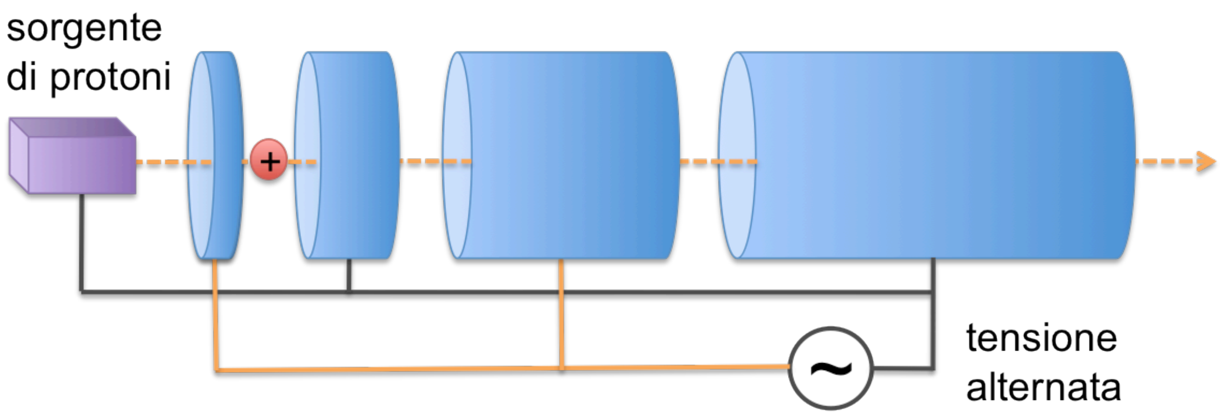
Prima si accelerano A^-, poi un materiale molto sottile rimuove elettroni ("stripping") e lo ione diventa A^+ => raddoppio della tensione!

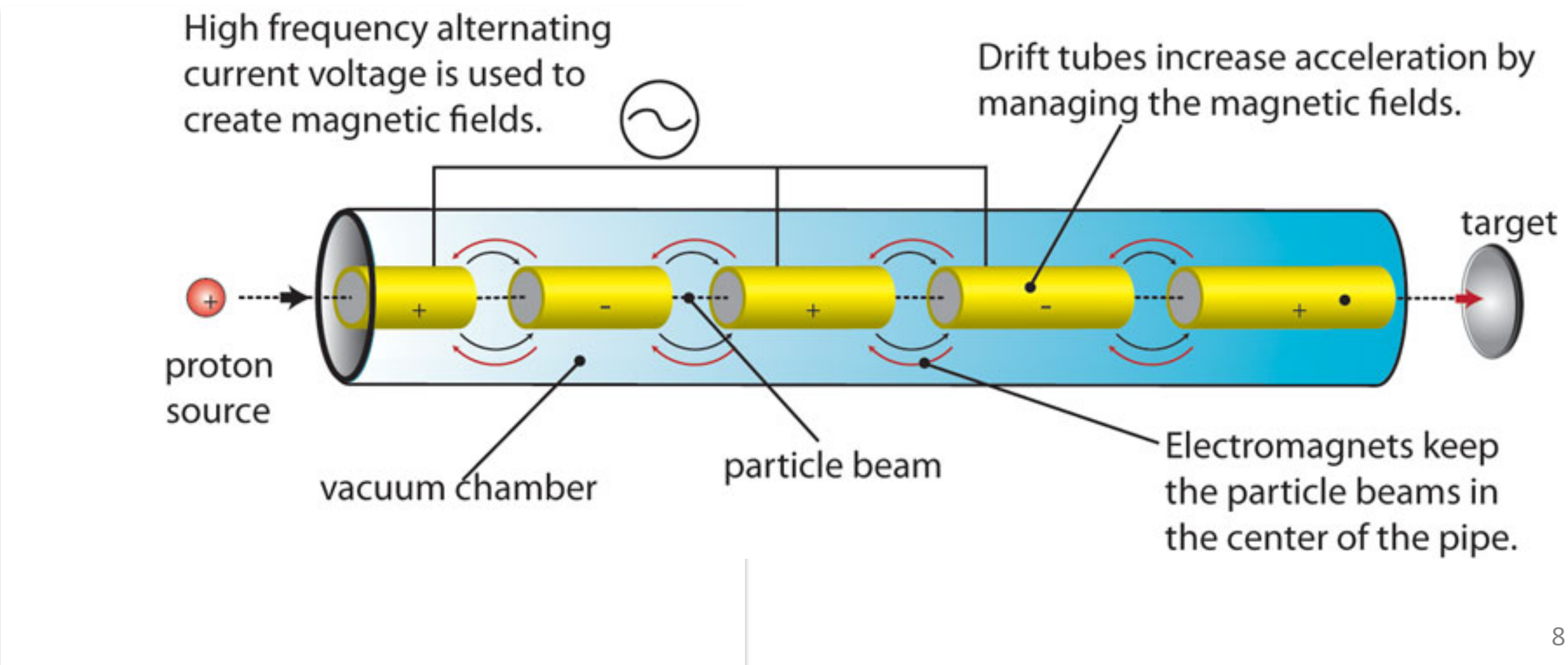
Tensioni fino a 20MV, basse correnti (~µA), molto stabili in tensione



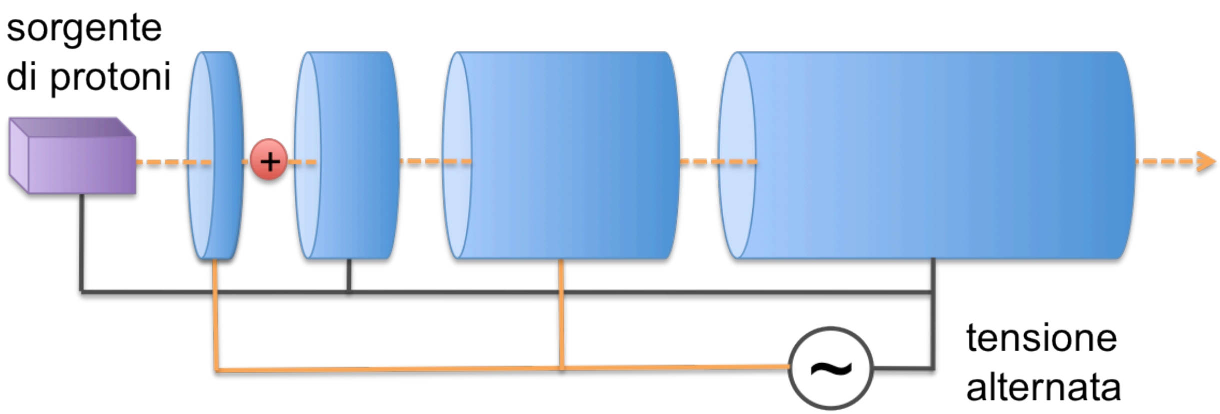


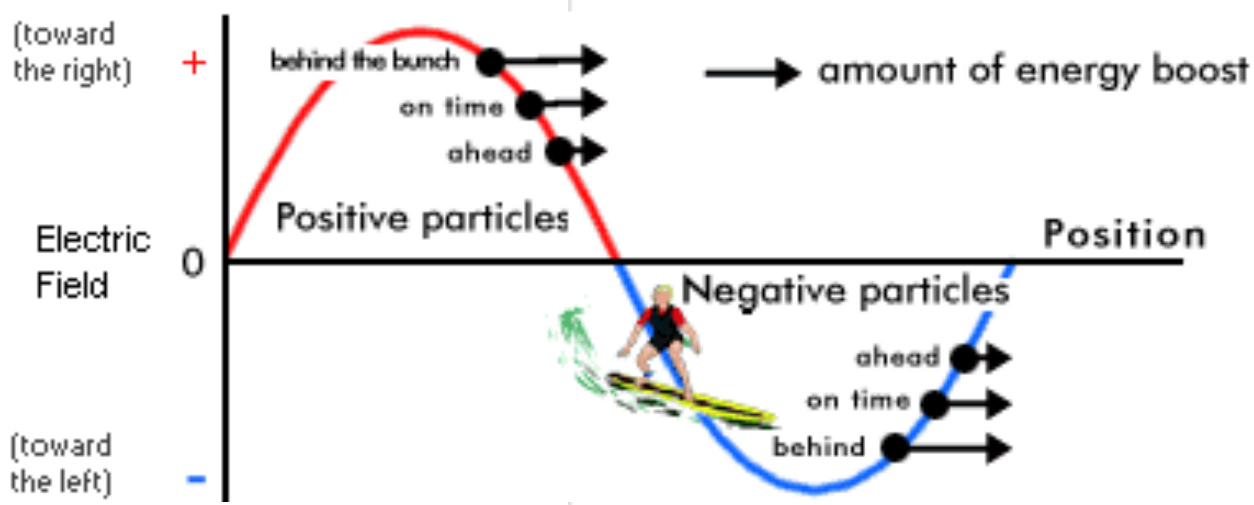
ACCELERATORI LINEARI
~ 100kV/m (drift tubes) – Wideroe 1928



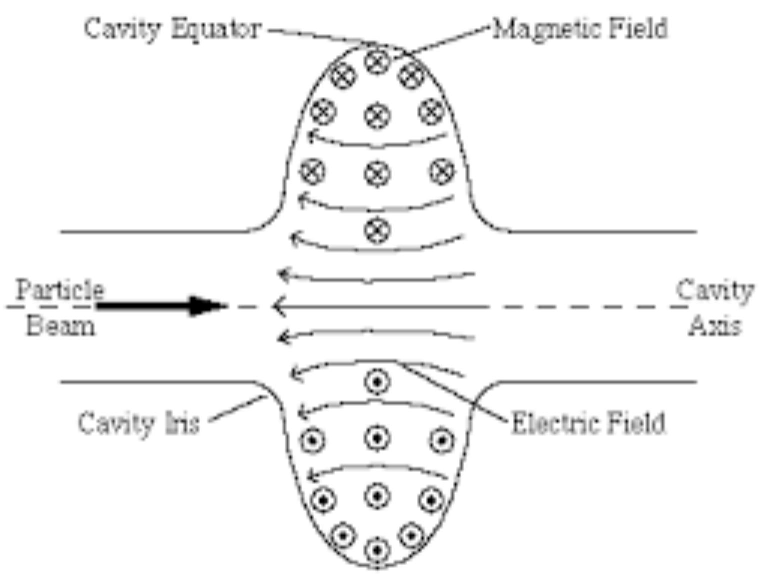


Struttura a bunch





CAVITA" ACCELERATRICI
(tipicamente superconduttrici)
~ 50MV/m



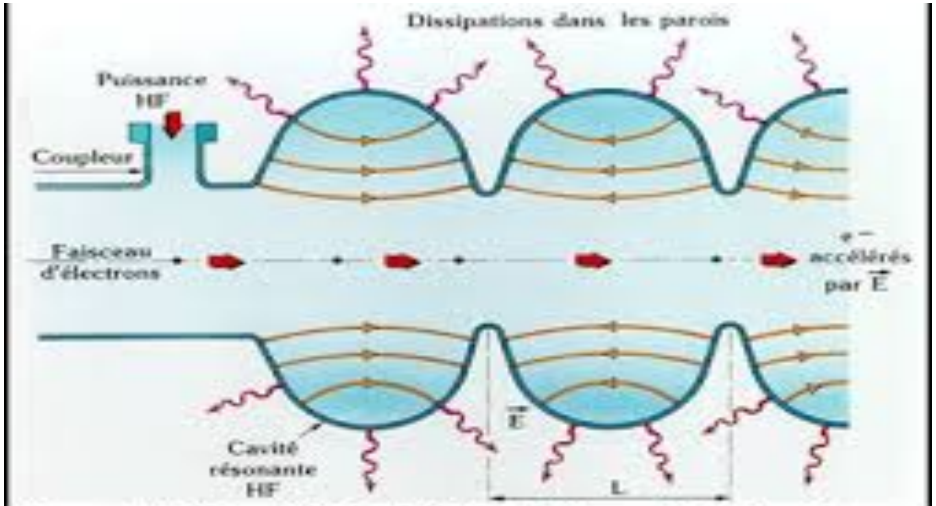
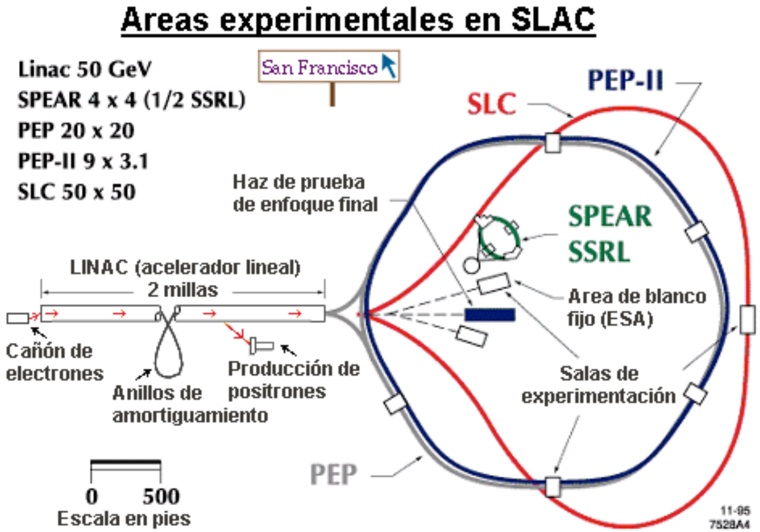
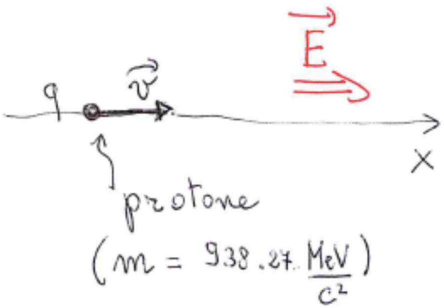


Figure 1 Schéma de la distribution du champ électrique dans une cavité résonnante

ACCELERATORI LINEARI
il 2-mile LINAC di SLAC (Stanford)



ACCELERATORI LINEARI
moto in un campo elettrico uniforme



- Campo elettrico lungo x : $\vec{E} = (E_0, 0, 0)$
- Moto su una retta – asse x : $\vec{v} = (v, 0, 0)$
- $\beta \equiv \frac{v}{c}$; condizione iniziale $\beta(0) = \beta_0$ (non parte da fermo)

$$\frac{dp_x}{dt} = qE_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d(mv\gamma)}{dt} = qE_0 \\ \beta(0) = \beta_0 \end{cases} \Rightarrow mv\gamma - mv_0\gamma_0 = qE_0 t$$

$$\Rightarrow \beta\gamma = \beta_0\gamma_0 + \frac{qE_0}{mc} \cdot t = \beta_0\gamma_0 + \frac{t}{\tau}$$

avendo definito $\tau = \frac{mc}{qE_0}$

Esempi di valori numerici per τ :

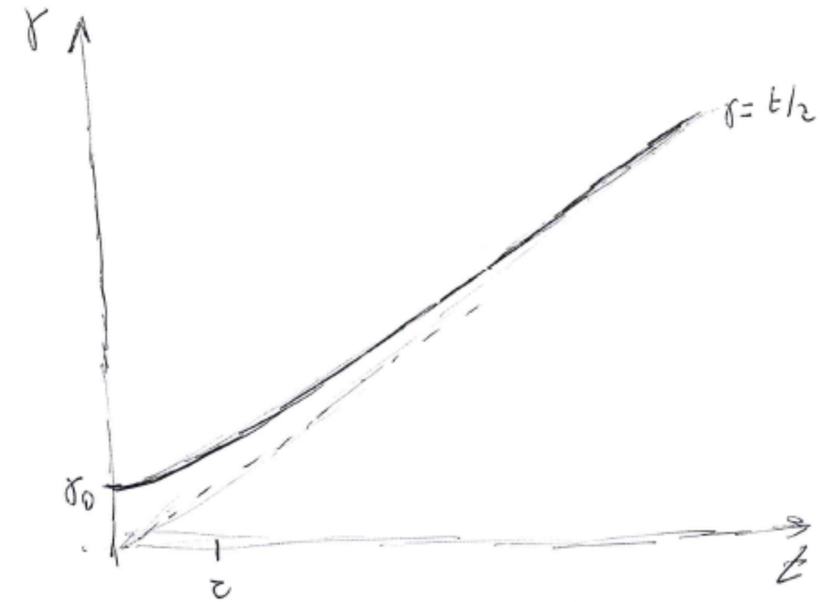
- $E_0 = 100\ \frac{kV}{m}$ (drift tubes) $\Rightarrow \tau = \frac{(mc^2)}{qE_0 c} = \frac{(938.27\ 10^6 \cdot 1.6\ 10^{-19}\ J)}{(1.6\ 10^{-19}\ C)(10^5\ \frac{V}{m})(3\ 10^8\ \frac{m}{s})} = 31.3\ \mu s$
- $E_0 = 50\ \frac{MV}{m}$ (cavità) $\Rightarrow \tau = 62.6\ ns$

ACCELERATORI LINEARI
moto in un campo elettrico uniforme

Poiché $\gamma = \sqrt{1+\beta^2\gamma^2}$, $\beta = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+\beta^2\gamma^2}}$, $\beta\gamma = \beta_0\gamma_0 + t/\tau$

$$\beta = \frac{\beta_0\gamma_0 + t/\tau}{\sqrt{1+(\beta_0\gamma_0+t/\tau)^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{1+(\beta_0\gamma_0+t/\tau)^2}$$



Se $\beta_0 = 0$ $\quad \beta = \frac{t/\tau}{\sqrt{1+(t/\tau)^2}}$

$$\gamma = \sqrt{1+(t/\tau)^2}$$

Esercizio: calcolare $x(t) = \int_0^t \beta c \, dt$

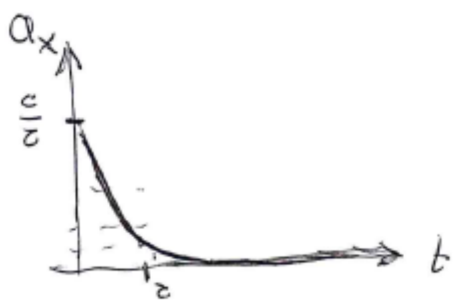
ACCELERATORI LINEARI
moto in campo elettrico uniforme

Accelerazione nel laboratorio e nel sistema di riferimento solidale alla carica accelerata.

(Caso $\beta_0 = 0$)

Nel laboratorio:
$$a_x \equiv \frac{dv}{dt} = c\,\frac{d\beta}{dt} = c\,\frac{d}{dt}\left(\frac{t/\tau}{\sqrt{1+(t/\tau)^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{c}{\tau}\,\frac{\sqrt{1+(t/\tau)^2} - \frac{t\,2t/\tau^2}{2\sqrt{1+(t/\tau)^2}}}{1+(t/\tau)^2} = \frac{c}{\tau}\cdot\frac{1+\left(\frac{t}{\tau}\right)^2-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}{\left[1+(t/\tau)^2\right]^{3/2}} = \frac{c}{\tau\gamma^3} = \frac{qE_0}{m}\cdot\frac{1}{\gamma^3}$$



$a_x \to 0$ molto velocemente

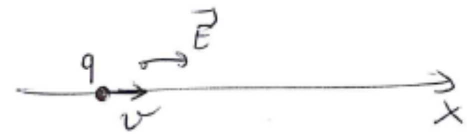
Nel sistema della carica:
$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \Rightarrow a'_x = qE_0/m$$

ACCELERATORI LINEARI
potenza irraggiata

Formula di LARMOR relativistica: $$\frac{q^2\gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\vec{a}^2 - |\vec{a}\wedge\vec{\beta}|^2\right) = I$$

(I potenza irraggiata)

Ipotizziamo:
- acceleratore lineare
- moto qualunque (non necessariamente $\vec{E}$ costante)



In ogni caso

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d(m v_x \gamma)}{dt} = m a_x \gamma + m v_x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m a_x \gamma + m v_x \frac{-2\beta\dot{\beta}}{-2\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} =$$

$$= m a_x \gamma + m a_x \beta^2 \gamma^3 = m a_x \gamma\left(1+\gamma^2\beta^2\right) = m a_x \gamma^3$$

$$\underset{(\vec{a}\wedge\vec{\beta}=\vec{0})}{I =} \frac{q^2\gamma^6 a_x^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \dashrightarrow \begin{array}{l}\gamma^6 \text{ elevato} \\ a_x \text{ piccolo!}\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\left(\frac{dp_x}{dt}\right)^2$$

ACCELERATORI LINEARI
potenza irraggiata

Calcoliamo la frazione di energia persa rispetto all'aumento di energia:

$$f_{rad} \equiv \frac{I}{\left(\frac{dE}{dt}\right)} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\left(\frac{dp_x}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{v\left(\frac{dE}{dx}\right)}$$

Notiamo che $c\,\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{E^2-m^2c^4} = \frac{2E\,\frac{dE}{dt}}{2\sqrt{E^2-m^2c^4}} = \frac{E}{pc}\cdot\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{dE}{dt} = c\,\frac{dE}{dx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = \frac{dE}{dx}.$$

Allora

$$f_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta c\left(\frac{dE}{dx}\right)} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\cdot\frac{1}{mc^2}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{dE}{dx}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{rad} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{r_e\left(\frac{dE}{dx}\right)}{mc^2} \ll 1$$

$\beta \sim 1$;
in un tratto di lunghezza r_e (2.8 fm!) si acquista una energia $\ll mc^2$.

ACCELERATORI LINEARI
potenza irraggiata

3b

Esercizio Calcolare f_{rad} per un e^- accelerato con $\frac{dE}{dx} = 100\,\frac{MeV}{m}$ (!) o $10\,\frac{GeV}{m}$ (!!)

$$f_{rad} = \frac{2}{3\beta}\cdot\frac{2.8\,10^{-15}\,m}{0.5\,MeV}\cdot 10^2\,\frac{MeV}{m} = \frac{3.7\,10^{-13}}{\beta}$$; oppure $\frac{3.7\,10^{-11}}{\beta}$ .... trascurabile.

Esercizio Un elettrone viene accelerato in un campo elettrico (E_0) uniforme e costante fino a raggiungere una energia finale ($E_f \in 150$ MeV). Calcolare la frazione di energia persa per radiazione in funzione di E_0

Soluzione. Riprendiamo $\beta = \frac{t/\tau}{\sqrt{1+t^2/\tau^2}}$ con $\tau = \frac{m_e c}{q E_0}$; $I = \frac{q^2\gamma^6|\vec{a}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{q^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{E_0^2}{m_e^2}$

$\left(|\vec{a}|\gamma^3 = \frac{qE_0}{m_e}\right)$

$$E_f = m_e c^2\gamma = \frac{m_e c^2}{(1+t_f^2/\tau^2)^{1/2}} \Rightarrow t_f = \tau\sqrt{\left(\frac{E_f}{m_e c^2}\right)^2-1}$$

$$f_{rad} = \frac{I\cdot t_f}{E_f} = \frac{q^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{E_0^2}{m_e^2}\cdot\frac{1}{E_f}\cdot\tau\sqrt{\underbrace{\left(\frac{E_f}{m_e c^2}\right)^2}_{\gg 1}-1} \simeq \frac{q^4 E_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_e^2}\cdot\frac{m_e c}{q E_0}\cdot\frac{1}{m_e c^2} \Rightarrow$$

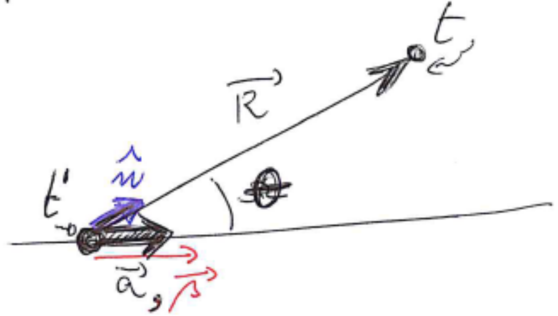
$$f_{rad} = \frac{2}{3}\frac{q^3 E_0}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\cdot\frac{1}{m_e c^2} = \frac{2}{3}\frac{r_e q E_0}{m_e c^2} = \frac{E_0}{E_{CRIT}}$$ con $$E_{CRIT} = \frac{3}{2}\frac{m_e c^2}{r_e q} = \frac{3}{2}\frac{5\,10^5\,V}{2.8\,10^{-15}\,m} \simeq 2.7\,10^{20}\,\frac{V}{m}$$ (!)

ACCELERATORI LINEARI
potenza irraggiata distribuzione angolare

Campo di radiazione $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R c} \dfrac{\hat{n} \wedge \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}\right]}{(1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n})^3}\Bigg|_{rit}$

Acceleratore lineare $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R c} \cdot \dfrac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n})^3}\Bigg|_{rit}$

$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 (\vec{S}\cdot\hat{n}) \left(\frac{dt}{dt'}\right) \Rightarrow$$



$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 \left(c\,\varepsilon_0 \vec{E}^2\right) \cdot (1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n}) = R^2 c\,\varepsilon_0 \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 R^2 c^2} \frac{\left|\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})\right|^2}{(1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n})^6} \cdot (1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n}) =$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \frac{|\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^5} = \frac{q^2\,|\vec{a}|^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{1 - \cos^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^5}$$

ACCELERATORI LINEARI
potenza irraggiata distribuzione angolare

$$\frac{dI}{d\cos\theta} = \frac{q^2|\vec{a}|^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{1-\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

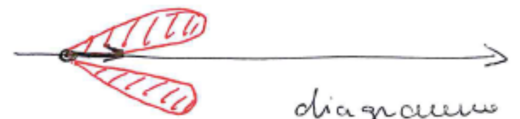
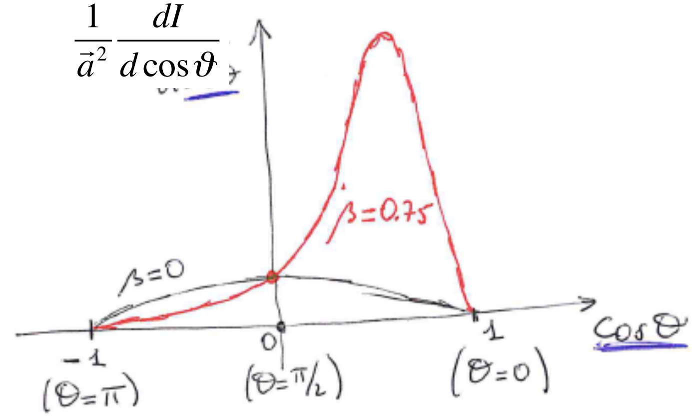


diagramma di radiazione

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{q^2|\vec{a}|^2}{8\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{\sin^3\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$



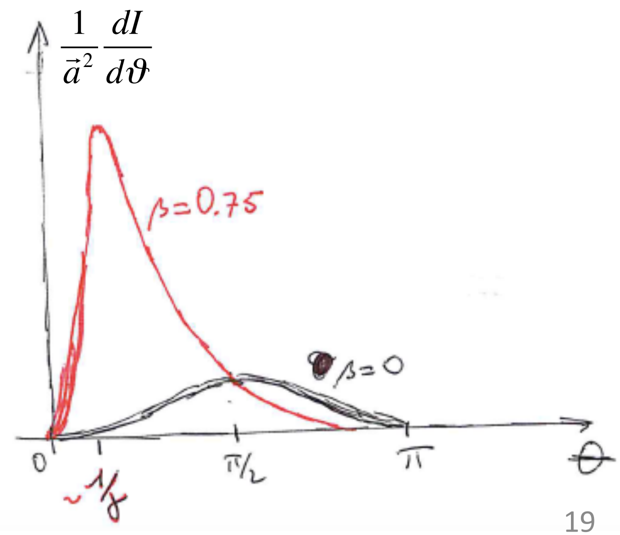
Integrando

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{q^2|\vec{a}|^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{1-\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\,d\cos\theta =$$

$$= \frac{q^2|\vec{a}|^2\gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

OK con LARMOR perché $\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}\,dx = \frac{4}{3}\gamma^6$

(vedi dopo)



NOTA: il massimo a $\theta \sim 1/\gamma$ si può dimostrare anche con una trasformazione di Lorentz (fai per esercizio)

Calcolo di $\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}\,dx = \frac{4}{3}\gamma^6}$

JC

$$Y = 1-\beta x \;,\quad dy = -\beta\,dx \;,\quad dx = -\frac{1}{\beta}dy \;,\quad x = \frac{1-Y}{\beta}.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)}{(1-\beta x)^5}\,dx = \int_{1+\beta}^{1-\beta} \frac{1-\frac{1}{\beta^2}(1-Y)^2}{Y^5}\left(-\frac{dy}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^3}\int_{1+\beta}^{1-\beta} \frac{(1-\beta^2)-2Y+Y^2}{Y^5}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\beta^3}\left[\frac{(1-\beta^2)}{(-4)Y^4} - \frac{2}{(-3)Y^3} + \frac{1}{(-2)Y^2}\right]_{1+\beta}^{1-\beta} =$$

$$= \frac{1}{\beta^3}\left[-\frac{(1-\beta^2)}{4(1-\beta)^4} + \frac{(1-\beta^2)}{4(1+\beta)^4} + \frac{2}{3(1-\beta)^3} - \frac{2}{3(1+\beta)^3} - \frac{1}{2(1-\beta)^2} + \frac{1}{2(1+\beta)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^3}\left[\frac{-(1+\beta)^4+(1-\beta)^4}{4(1-\beta^2)^3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{(1+\beta)^3-(1-\beta)^3}{(1-\beta^2)^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\beta)^2-(1+\beta)^2}{(1-\beta^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^3}\left[\frac{-8\beta-8\beta^3}{4(1-\beta^2)^3} + \frac{2}{3}\,\frac{6\beta+2\beta^3}{(1-\beta^2)^3} + \frac{1}{2}\,\frac{-4\beta}{(1-\beta^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{-2-2\beta^2}{(1-\beta^2)^3} + \frac{2}{3}\,\frac{6+2\beta^2}{(1-\beta^2)^3} - \frac{2}{(1-\beta^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3\beta^2}\,\frac{-6-6\beta^2+12+4\beta^2-6(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^3} = \frac{1}{3\beta^2}\,\frac{4\beta^2}{(1-\beta^2)^3} =$$

$$= \frac{4}{3}\gamma^6$$

ok

formula matematica utile
(dimostrazione)