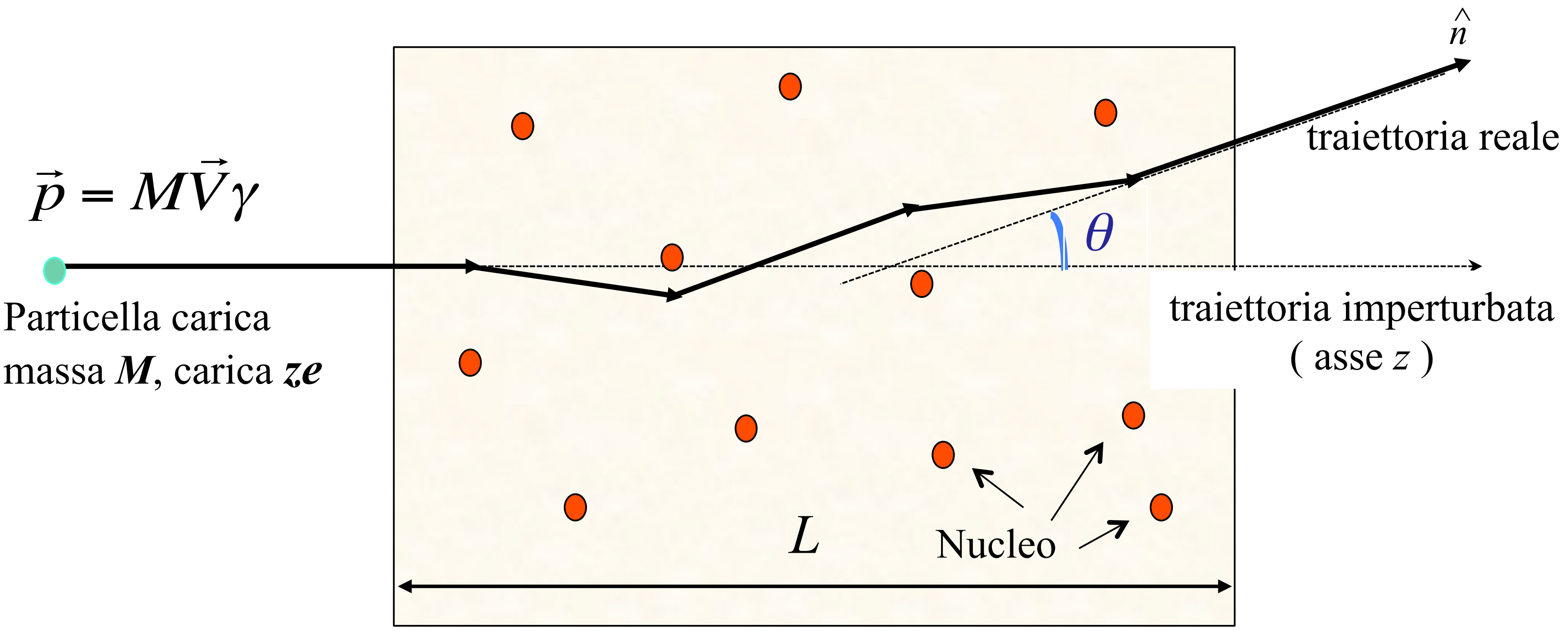
bozza 30 nov 2017
da verificare

*Lo **scattering multiplo** coulombiano*
- descrizione qualitativa -

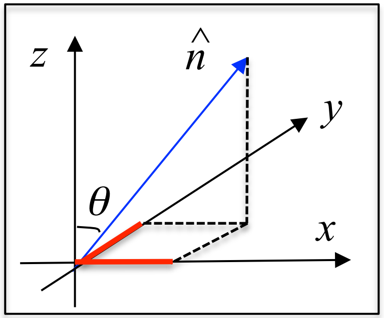


Multiplo scattering: deflessione di una particella veloce (massa $\boldsymbol{M}$, carica $\boldsymbol{ze}$) in un mezzo di spessore $\boldsymbol{L}$. E' dovuta ad interazioni multiple ed elastiche nei campi coulombiani dei nuclei (ognuno di carica $\boldsymbol{Ze}$).

bozza 30 nov 2017
da verificare

*Lo **scattering multiplo** coulombiano - definizioni degli angoli ed ipotesi -*

$\boldsymbol{\theta}$ angolo rispetto all'asse z: $0 < \boldsymbol{\theta} << 1$
$\boldsymbol{\theta_x}$ *(in rosso in figura)* proiezione di $\boldsymbol{\theta}$ su x: $-\infty < \boldsymbol{\theta} < +\infty$
$\boldsymbol{\theta_y}$ *(in rosso in figura)* proiezione di $\boldsymbol{\theta}$ su y: $-\infty < \boldsymbol{\theta} < +\infty$



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi \\ \sin\vartheta\cos\phi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \vartheta\cos\phi \\ \vartheta\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}$$

Ipotesi: $\boldsymbol{\theta << 1}$ (piccole deflessioni per una particella veloce)
Ipotesi: distribuzione gaussiana per $\boldsymbol{\theta_x}$ e $\boldsymbol{\theta_y}$ con r.m.s. $\boldsymbol{\theta_0}$ (<<1, parametro da calcolare utizzando il modello basato sullo scattering Rutherford) (*).

$$\frac{dP}{d\vartheta_x} = \frac{1}{\vartheta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0^2}}$$

$$\frac{dP}{d\vartheta_x} = \frac{1}{\vartheta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$<\vartheta_x> \; = \; <\vartheta_y> \; = \; 0$$

$$\sqrt{<\vartheta_x^2>} \; = \; \sqrt{<\vartheta_y^2>} \; = \; \vartheta_0$$

(*) Per "grandi" angoli (~2% dei casi) occorre invece utilizzare la **distribuzione di Molière**.

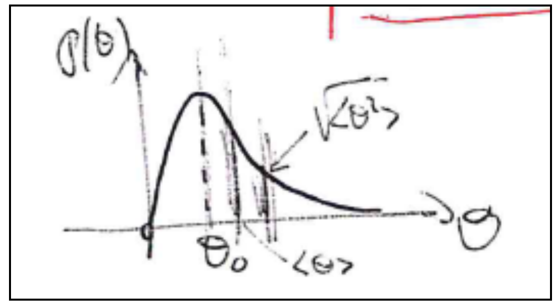
bozza 30 nov 2017
da verificare

*Lo **scattering multiplo** coulombiano*
- distribuzione dell'angolo di scattering multiplo -

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\vartheta_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0^2}}\frac{1}{\vartheta_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0^2}}d\vartheta_x d\vartheta_y=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi\vartheta_0^2}e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}\vartheta\, d\vartheta\, d\phi=\int_0^{\infty}\frac{\vartheta}{\vartheta_0^2}e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}d\vartheta$$

da cui

$$\mathrm{P}(\vartheta)=\frac{\vartheta}{\vartheta_0^2}e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}$$



Notiamo che:

$$<\vartheta>=\int_0^{\infty}\vartheta P(\vartheta)d\vartheta=\int_0^{\infty}\frac{\vartheta^2}{\vartheta_0^2}e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}d\vartheta=\vartheta_0\int_0^{\infty}w^2e^{-\frac{w^2}{2}}dw=\frac{\vartheta_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}w^2e^{-\frac{w^2}{2}}dw=\vartheta_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$<\vartheta^2>=\int_0^{\infty}\vartheta^2P(\vartheta)d\vartheta=\int_0^{\infty}\frac{\vartheta^3}{\vartheta_0^2}e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}d\vartheta=\int_0^{\infty}\frac{\vartheta^2}{\vartheta_0^2}e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}d\frac{\vartheta^2}{2}=2\vartheta_0^2\int_0^{\infty}te^{-t}dt=2\vartheta_0^2$$

$$\sqrt{<\vartheta^2>}=\sqrt{<\vartheta_x^2>+<\vartheta_y^2>}=\vartheta_0\sqrt{2}$$

$$\sigma_\vartheta=\sqrt{<\vartheta^2>-<\vartheta>^2}=\vartheta_0\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}=0.65\vartheta_0$$

questo é rilevante per la dispersione finale

bozza 30 nov 2017
da verificare

Lo ***scattering multiplo*** *coulombiano*
angolo quadratico medio per singolo urto -

Dalla sezione d'urto **Mott** :
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{2PV}\right)^2\frac{1-\beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\approx\left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{2PV}\right)^2\frac{1}{\frac{\vartheta^4}{16}}=\left(\frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV}\right)^2\frac{1}{\vartheta^4}\Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\approx\frac{\ell^2}{\vartheta^4}\qquad \text{con} \qquad \ell=\frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV}$$

L'angolo quadratico medio per un urto è:
$$<\vartheta^2_{urto}>=\frac{\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}}\vartheta^2\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega}{\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega}=\frac{\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}}\vartheta^2\frac{\ell^2}{\vartheta^4}2\pi\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sigma_{ms}}=\frac{2\pi\ell^2}{\sigma_{ms}}\ln\frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_{\min}}\quad \text{con} \quad \sigma_{ms}=\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega\ .$$

Utilizzando la relazione
$$\tan\frac{\vartheta}{2}=\frac{zZ\alpha\hbar c}{PV}\frac{1}{b}\Rightarrow\vartheta\approx\frac{\ell}{b}\qquad \text{con} \qquad b_{\min}=R_{nucleo}=r_0A^{1/3},\quad b_{\max}=R_{atomo}=1.4a_0Z^{-1/3}$$

ed anche *A~2Z* :
$$\ln\frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_{\min}}=\ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}}=\ln\frac{1.4a_0Z^{-1/3}}{r_0A^{1/3}}=\ln\frac{1.4\cdot0.53\cdot10^5\,fm}{1.4\,fm(ZA)^{1/3}}\approx\ln\frac{5.3\cdot10^4}{\sqrt[3]{2}Z^{2/3}}=2\ln\frac{205}{Z^{1/3}}$$

$$\boxed{<\vartheta^2_{urto}>\approx\frac{4\pi\ell^2}{\sigma_{ms}}\ln\frac{205}{Z^{1/3}}}$$

bozza 30 nov 2017
da verificare

Lo ***scattering multiplo*** *coulombiano*
- angolo quadratico medio -

L'angolo quadratico medio si ottiene sommando in quadratura su tutti gli urti :

$$< \vartheta^2 > = N_{urti} < \vartheta^2_{urto} > = nL\sigma_{ms} < \vartheta^2_{urto} > = 4\pi nL\ell^2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}} \ .$$

Ricordando la definizione di lunghezza di radiazione data dalla formula di Tsai (che approssimiamo):

$$X_0 = \frac{1}{4Z^2 n\alpha r_e^2 \left[\ln \frac{184}{Z^{1/3}} - f(Z) + \frac{L'}{Z} \right]} \approx \frac{1}{4Z^2 n\alpha r_e^2 \ln \frac{184}{Z^{1/3}}}$$

$$\sqrt{< \vartheta^2 >} = \sqrt{\frac{X_0}{X_0} 4\pi nL\ell^2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}}} = \ell \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{4\pi n \ln \frac{205}{Z^{1/3}}}{4Z^2 n\alpha r_e^2 \ln \frac{184}{Z^{1/3}}}} \approx \ell \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{Z^2 \alpha r_e^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{< \vartheta^2 >} = \frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV} \frac{1}{r_e} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{Z^2 \alpha}} = \frac{2zm_e c^2}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cong z\sqrt{2} \frac{14.6MeV}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

Un calcolo più preciso darebbe il valore del PDG:

$$\sqrt{< \vartheta^2 >} = z\sqrt{2} \frac{13.6MeV}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

$$\vartheta_0 = z \frac{13.6MeV}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$