

# Il Rumore nei sistemi elettronici

## 1 Cosa è il rumore (nei sistemi elettronici)

Generalmente si intende per rumore qualsiasi disturbo che tende a mascherare un segnale utile. L'uso del termine rumore deriva dal fatto che, per un segnale audio (p. es. il segnale prodotto da un lettore di Compact Disc) la presenza di disturbi ha come effetto la sovrapposizione di un rumore (udibile) al segnale utile o la presenza di un *rumore di fondo* nei momenti di silenzio.

È ovviamente noto che, in un partitore resistivo costituito da due resistenze  $R_1$  ed  $R_2$  alimentato da una tensione continua  $E$ , la tensione sulla resistenza  $R_2$  è una tensione *continua* di valore

$$V_2 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Visualizzando però l'andamento nel tempo della tensione  $V_2$  con uno strumento di opportuna sensibilità si scopre che essa, invece di essere perfettamente e rigorosamente costante, come l'espressione scritta sopra prevederebbe, in realtà varia nel tempo, intorno al valore medio  $V_2$ . La componente variabile nel tempo della tensione sulla resistenza  $R_2$  è un esempio di rumore presente nel partitore in questione. Le cause del rumore, in questo e in altri casi, possono essere molto diverse fra loro.

Lo studio del rumore, delle sue cause e delle contromisure da adottare per minimizzarne gli effetti negativi è estremamente utile da parte di chi progetta dispositivi, ma anche circuiti e sistemi elettronici, dal momento che in un circuito molto rumoroso un segnale utile di piccola ampiezza tende più facilmente ad essere mascherato e quindi reso impercettibile. Per comprendere meglio questo concetto è possibile pensare alla difficoltà che si incontrano nel percepire chiaramente il contenuto di una conversazione fatta a bassa voce (un segnale utile, ma debole) in un ambiente molto rumoroso (qui il rumore è proprio rumore acustico).

Nei sistemi di misura il rumore, sovrapponendosi alla grandezza da misurare (per esempio una tensione) o alla grandezza in cui la quantità fisica da misurare è stata convertita (per esempio una tensione in cui è stata convertita una temperatura da misurare) rende meno agevole la misura di grandezze di piccola entità. Per questa ragione si dice che il rumore in un sistema elettronico pone un limite minimo alla grandezza che in quel sistema è possibile trattare (cioè elaborare, misurare, ecc.): una tensione non potrà essere misurata con un voltmetro che sia caratterizzato da un rumore confrontabile con la tensione da misurare.

Ancora con riferimento all'esempio del partitore, se esso fosse pilotato con una tensione sinusoidale in ingresso dovrebbe produrre in uscita (cioè ancora su  $R_2$ ) una tensione sinusoidale attenuata. Se questa tensione rappresenta un segnale utile (cioè il cui andamento nel tempo, o la cui ampiezza o in generale le cui caratteristiche rappresentano un'informazione utile) la presenza del rumore potrebbe mascherare il segnale stesso, rendendolo al limite impercettibile.

Nei circuiti elettronici, una prima classificazione del rumore può essere fatta sulla base del fatto che esso sia generato *nel circuito*, oppure *esternamente ad esso*; nel primo caso si parla di

*rumore intrinseco* mentre, se la sorgente di rumore è esterna al circuito si ha *rumore estrinseco* (o *esterno*).

Il particolare fenomeno che è all'origine della generazione del rumore determina il modo in cui la potenza associata al rumore stesso (che in un circuito elettrico è un tensione, o una corrente) è distribuita tra le varie componenti spettrali. Si ha allora *rumore bianco* se il rumore ha distribuzione frequenziale di potenza uniforme, cioè uguale per tutte le frequenze. L'uso del termine *bianco* deriva dall'analogia con il colore bianco, che contiene tutte le righe dello spettro visibile.

Un'altra distribuzione frequenziale ricorrente nei sistemi elettronici è quella tipica del cosiddetto *rumore*  $1/f$  o *rumore rosa*. In questo caso la densità spettrale di potenza associata al rumore decresce all'aumentare della frequenza, proprio con un andamento di tipo  $1/f$  o, in alcuni casi come  $1/f^\gamma$ , in cui il valore dell'esponente  $\gamma$  dipende dal meccanismo fisico alla base del rumore in questione.

## 2 Sorgenti di rumore intrinseco

### 2.1 Rumore termico

Il rumore termico è prodotto in una resistenza dall'agitazione degli elettroni liberi dovuta alla temperatura; esso è generato anche quando la resistenza non è collegata ad alcun circuito o generatore. Il fenomeno può essere attribuito al fatto che gli elettroni nel dispositivo non sono uniformemente (e costantemente) distribuiti al suo interno ma, appunto per l'agitazione termica possono in alcuni istanti essere presenti in numero maggiore su un terminale e in altri istanti in numero maggiore sull'altro. Questa fluttuazione di popolazione di elettroni sui due estremi determina tra essi una differenza di potenziale, che costituisce il cosiddetto *rumore termico* nella resistenza; tale differenza di potenziale è a valor medio nullo, dal momento che *mediamente* gli elettroni sono uniformemente distribuiti nel dispositivo.

Il rumore termico è stato inizialmente studiato dal fisico J.B. Johnson, nei primi decenni del ventesimo secolo, ed è pertanto detto anche *Rumore Johnson*, o anche *Rumore Nyquist*, dal nome dell'ingegnere di origine svedese (ma di formazione statunitense) che ne fornì un modello matematico nel 1928.

Da quanto è stato detto finora risulta evidente che il rumore è un fenomeno aleatorio: non è possibile infatti conoscere il valore della tensione tra gli estremi della resistenza istante per istante (come invece avverrebbe se il fenomeno fosse di tipo deterministico). Ciò che generalmente è noto è invece (solo) un insieme di parametri statistici. Questi risultano tuttavia molto utili per la descrizione dei fenomeni connessi al rumore e, come già anticipato, anche per la ricerca delle cause che lo determinano, per lo studio di architetture circuitali e di tecniche di progettazione che consentono di tenere sotto controllo gli effetti del rumore nei sistemi elettronici.

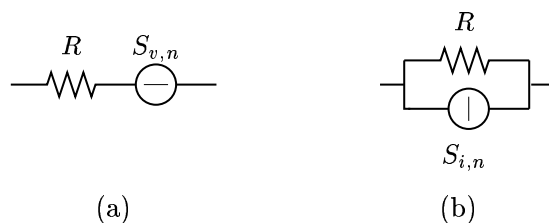


Figura 1 - Equivalente circuitale di una resistenza rumorosa comprendente (a) un generatore di tensione o (b) un generatore di corrente.

La densità spettrale di potenza  $S_{v,n}$  associata alla tensione di rumore termico in una resistenza  $R$  è costante con la frequenza: dunque il rumore termico è un esempio di *rumore bianco*. Essa vale

$$S_{v,n} = 4kTR \quad [\text{V}^2/\text{Hz}]$$

in cui  $k$  rappresenta la costante di Boltzmann ( $k = 1.38^{-23} \text{ J/K}$ ) e  $T$  è la temperatura *assoluta*. Una resistenza rumorosa (cioè una resistenza reale) può dunque essere modellizzata come è rappresentato in Figura 1 a. Il generatore di tensione mostrato è il generatore di rumore, di cui ovviamente non è noto il valore, né la polarità, istante per istante. L'unico parametro noto è invece la densità spettrale di potenza, che è appunto una grandezza di tipo statistico.

Per ragioni di opportunità può essere più conveniente “vedere” una resistenza rumorosa come un dispositivo nel quale è presente un generatore di corrente, invece che di tensione. Considerazioni ovvie sulla semplice rete di Figura 1 a consentono di ottenere quella riportata in Figura 1 b, in cui la densità spettrale della potenza associata alla *corrente* di rumore termico è

$$S_{i,n} = 4kT/R \quad [\text{A}^2/\text{Hz}]$$

Se del rumore termico presente in una resistenza  $R$  è nota la densità spettrale di potenza (in tensione)  $S_{v,n}$ , in una banda di frequenze di ampiezza  $B$  cadrà una potenza  $S_{v,n}B = 4kTRB$ , cui sarà associato un valore efficace della tensione di rumore  $V_n = \sqrt{4kTRB}$ . Analogamente, il valore efficace della corrente di rumore in una resistenza  $R$  è dato da  $I_n = \sqrt{4kTB/R}$ .

## 2.2 Rumore shot

Il flusso di corrente in un conduttore non è perfettamente uniforme: data la natura corpuscolare della carica (gli elettroni sono dei portatori discreti di carica: ognuno di essi “porta” una carica  $q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ), una corrente continua corrisponde a un determinato flusso *medio* di elettroni; questi però attraversano ogni sezione del circuito in maniera non perfettamente “continua”: in un determinato istante infatti, un elettrone può attraversare o non attraversare una certa sezione, ma la sezione non può essere attraversata da “mezzo” elettrone! Inoltre, per l'agitazione termica degli elettroni (che si manifesta anche in presenza di corrente), in un

determinato istante un certo elettrone può attraversare una sezione anche in verso opposto alla corrente *media* che scorre nel conduttore. Dunque la corrente, in realtà, ha un determinato valore medio e, intorno a questo, fluttuazioni a valor medio nullo che vengono classificate come *rumore*.

Il *rumore Shot*, che si manifesta in presenza di una barriera di potenziale, è di particolare interesse in una giunzione *p-n*, in cui esso ha densità spettrale di potenza (in corrente)

$$S_{i,n} = 2qI \quad [\text{A}^2/\text{Hz}]$$

dove  $I$  è il valore medio (dunque continuo) della corrente che scorre nella giunzione, come effetto della polarizzazione. Anche il rumore shot è di tipo bianco per cui, come già visto nel caso di rumore termico, è possibile esprimere il valore efficace della corrente di rumore (shot) in una giunzione *p-n* in una banda di frequenze  $B$  nella forma  $I_{sh} = \sqrt{2qIB}$ .

### 2.3 Rumore flicker

Il rumore *flicker* (sfarfallio) o  $1/f$  è riconducibile alle proprietà superficiali dei materiali, a particolari fenomeni di generazione e ricombinazione di portatori nei semiconduttori. Esso è presente in tutti i dispositivi elettrici ed elettronici (diodi, transistor bipolari e unipolari, resistori, termistori), ma anche in sistemi fisici diversi, come per esempio sistemi biologici e sociali. La sua caratteristica fondamentale è il fatto che esso cresce per basse frequenze: è stato osservato fino almeno a qualche decina di microhertz.

La sua densità spettrale di potenza è del tipo

$$S(f) = \frac{K}{f^\gamma}$$

in cui  $K$  è un coefficiente (con proprie dimensioni) che dipende dal particolare meccanismo alla base dei fenomeni di rumore e  $\gamma$  un esponente che nella gran parte dei casi assume valore unitario ma anche, in specifiche situazioni, valori diversi, generalmente compresi tra 0.8 e 1.3.

## 3 Il rumore negli amplificatori

Dal momento che ogni dispositivo attivo o passivo è affetto da rumore, un sistema basato su tali dispositivi risentirà di conseguenza della rumorosità dei suoi componenti. Nel caso di un amplificatore, il fatto che a ogni resistenza sia associato un generatore di rumore e la stessa cosa valga per ogni altro elemento circuitale, fa sì che sia in teoria possibile calcolare l'effetto di tali generatori di rumore sull'uscita dell'amplificatore. Infatti, solo per la rumorosità degli elementi costituenti l'amplificatore, sulla sua uscita sarà presente una tensione (di natura aleatoria come lo sono i fenomeni di rumore che la determinano), ma il cui valore quadratico medio, dunque

un parametro statistico, può essere valutato sulla base della conoscenza del comportamento “rumoroso” dei componenti.

Allo scopo di semplificare lo studio - sotto il profilo del rumore - di un sistema complesso come un amplificatore, è possibile utilizzare, invece che i generatori equivalenti di rumore di *ogni* suo componente (cioè almeno qualche centinaio di generatori, per esempio, per un amplificatore operativo) dei *generatori equivalenti di rumore*, di valore e posizione tali che l’effetto prodotto da questi generatori sull’uscita dell’amplificatore sia pari a quello che sarebbe possibile valutare considerando i singoli generatori di rumore di *tutti* i componenti dell’amplificatore.

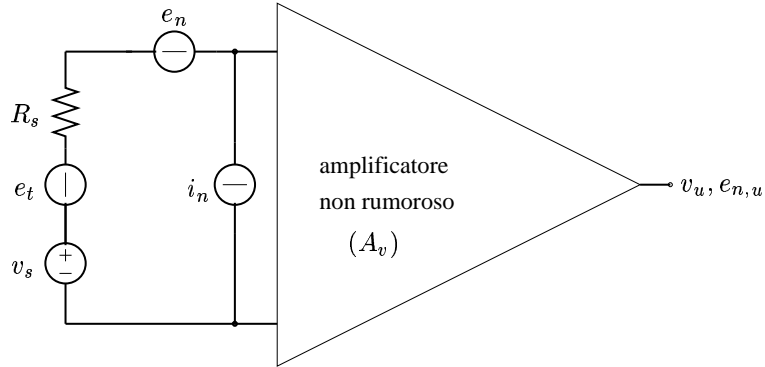


Figura 2 - Modello di amplificatore con i relativi generatori di rumore.

Un circuito generalmente utilizzato per modellizzare il comportamento rumoroso di un amplificatore, che si suppone pilotato da un generatore di tensione  $v_s$  di resistenza interna  $R_s$  (Figura 2) prevede un generatore equivalente di tensione in serie con l’ingresso e un generatore di corrente tra gli ingressi dell’amplificatore stesso; il generatore (di tensione)  $e_t$  rappresenta il rumore termico della resistenza  $R_s$ . Poiché tutti i contributi al rumore sono stati messi in conto mediante tali generatori, l’amplificatore appare come non rumoroso<sup>1</sup>.

Il valore (efficace<sup>2</sup>, o quadratico medio) delle tensioni  $e_t$  ed  $e_n$  e della corrente  $i_n$  e il loro andamento con la frequenza dipendono da *tutti* i componenti che costituiscono l’amplificatore. Per la loro determinazione si ricorre a metodi di analisi teorica, accompagnati da simulazioni e prove sperimentali.

Detta  $R_{in}$  la resistenza d’ingresso dell’amplificatore, il valore quadratico medio (cioè il quadrato del valore efficace) della tensione di rumore ( $e_{n,u}$ ) presente in uscita all’amplificatore è dato da

$$E_{n,u}^2 = A_v^2 \left[ \frac{(E_t^2 + E_n^2) R_{in}^2}{(R_{in} + R_s)^2} + \frac{I_n^2 R_{in}^2 R_s^2}{(R_{in} + R_s)^2} \right]$$

<sup>1</sup>Si noti l’analogia con i generatori di *offset* di un amplificatore operativo, che consentono di considerare questo ideale, avendo spostato sull’ingresso (mediante i generatori di tensione e di corrente) le cause di sbilanciamento in uscita.

<sup>2</sup>Indicheremo con lettera maiuscola e pedice minuscolo (per esempio  $E_n$ ) il valore efficace di queste grandezze

in cui è facile riconoscere i contributi dei tre generatori di rumore in ingresso. Questa tensione può essere pensata come il risultato di un unico generatore di tensione di rumore ( $e_{n,i}$ ), presente sull'ingresso dell'amplificatore. Tenendo conto della resistenza d'ingresso di quest'ultimo si ottiene, eguagliando i due valori quadratici medii:

$$E_{n,i}^2 \frac{R_{in}^2}{(R_s + R_{in})^2} A_v^2 = A_v^2 \left[ \frac{(E_t^2 + E_n^2) R_{in}^2}{(R_{in} + R_s)^2} + \frac{I_n^2 R_{in}^2 R_s^2}{(R_{in} + R_s)^2} \right]$$

da cui segue

$$E_{n,i}^2 = E_t^2 + E_n^2 + I_n^2 R_s^2$$

Nel ricavare questa espressione si è fatta l'ipotesi che i generatori di rumore siano incorrelati, il che equivale nella pratica a dire che ciascuna sorgente di rumore all'interno dell'amplificatore (resistenze, diodi, transistori, ecc.) ha effetti su uno solo dei tre generatori in ingresso<sup>3</sup>.

Come è già stato anticipato, è possibile valutare le grandezze  $E_t$ ,  $E_n$  ed  $I_n$ , mediante calcoli e misure. In particolare, il valore di  $E_t$  è noto se è noto il valore della resistenza  $R_s$  della sorgente di segnale.

Cortocircuitando gli ingressi dell'amplificatore (dunque eliminando il generatore di segnale, la sua resistenza e di conseguenza il relativo generatore equivalente di rumore  $e_t$ ), viene di fatto reso nullo l'effetto del generatore di corrente  $i_n$ , e tutto il rumore presente all'uscita è dovuto al generatore  $e_n$ . Quindi misurando la densità spettrale di potenza all'uscita dell'amplificatore e dividendo per il quadrato del guadagno in tensione  $A_v$  si ricava il valore quadratico medio della tensione  $e_n$ .

In modo analogo, lasciando aperti gli ingressi dell'amplificatore, sull'uscita si ritrova solo il contributo del generatore di corrente  $i_n$ ; ancora una volta, dividendo la potenza in uscita per il relativo guadagno (adesso  $A_v^2 R_{in}^2$ ) si ricava il valore di  $I_n^2$ .

### 3.1 Cifra di rumore di un amplificatore

Per esprimere con un unico parametro numerico la rumorosità di un amplificatore si può ricorrere alla *Cifra di rumore (Noise Figure)*,  $NF$ , definita come *il rapporto tra la potenza complessiva di rumore disponibile in uscita e la quota di questa attribuibile alla sorgente che si trova in ingresso all'amplificatore, riferite alla temperatura ambiente*. Dunque la cifra di rumore misura in uscita la potenza di rumore "in più" rispetto a quella che deriverebbe dalla sorgente in ingresso: questa potenza in eccesso è chiaramente dovuta al comportamento dell'amplificatore.

Facendo uso delle relazioni già ricavate è immediato ottenere

$$NF = \frac{E_t^2 + E_n^2 + I_n^2 R_s^2}{E_t^2} = 1 + \frac{E_n^2 + I_n^2 R_s^2}{E_t^2}$$

---

<sup>3</sup>Più in generale vale l'espressione  $E_{n,i}^2 = E_t^2 + E_n^2 + I_n^2 R_s^2 + 2C E_n I_n R_s$ , in cui  $C$  è il coefficiente di correlazione tra  $e_n$  e  $i_n$ .

Rappresentando un rapporto di potenze, il valore di  $NF$  può anche essere espresso in decibel, calcolandolo come  $10 \log(NF)$ .

Prendiamo in considerazione la Figura 3, nella quale è riportato l'andamento dei tre termini presenti a numeratore dell'espressione di  $NF$  (valori efficaci delle tensioni) in funzione della resistenza di sorgente  $R_s$ . È ovvio che il contributo di  $E_n$  risulta costante, non dipendendo da  $R_s$ . Al contrario gli altri due termini non sono costanti, dal momento che  $E_t$  varia con la radice quadrata di  $R_s$ , mentre  $R_s I_n$  varia ovviamente come  $R_s$  stessa.

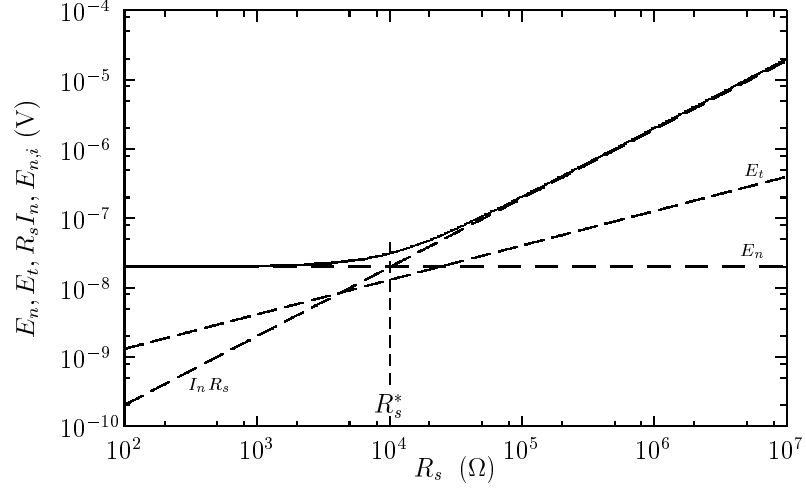


Figura 3 - Andamento dei valori efficaci di  $e_n$ ,  $e_t$  ed  $R_s i_n$  (linea tratteggiata) e del valore efficace del rumore totale in tensione riportato in ingresso ( $E_{n,i}$ , linea continua) in funzione della resistenza di sorgente  $R_s$  per un ipotetico amplificatore con  $I_n = 2 \text{ pA}$ ,  $E_n = 20 \text{ nA}$  alla temperatura  $T = 300 \text{ K}$  ( $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ ).  $R_s^*$  rappresenta il valore della resistenza di sorgente per il quale risulta minima la cifra di rumore dell'amplificatore.

L'espressione ottenuta per  $NF$  suggerisce che il suo valore è tanto maggiore quanto più  $E_{n,i}$  è grande rispetto a  $E_t$ ; dunque per piccoli valori di  $R_s$  (quando  $E_t$ , proporzionale a  $\sqrt{R_s}$  è piccolo) e per grandi valori di  $R_s$  (quando il termine  $R_s I_n$  prevale sugli altri) si ha un elevato valore della cifra di rumore e dunque un peggior comportamento dell'amplificatore.

Per valori intermedi di  $R_s$  la cifra di rumore dell'amplificatore assumerà valori inferiori: dunque risulterà conveniente (se possibile) pilotare l'amplificatore con una sorgente caratterizzata da valori di resistenza interna né particolarmente bassi, né particolarmente elevati.

Riprendendo l'espressione di  $NF$  (esprimendo anche il termine  $E_t$  in funzione di  $R_s$ ) e ricercandone il minimo, si ottiene, per la resistenza di sorgente

$$R_s = \frac{E_n}{I_n}$$

Questa scelta di  $R_s$  (per un dato amplificatore caratterizzato da generatori di rumore  $E_n$  ed

$I_n$ ), garantisce il minimo valore della cifra di rumore<sup>4</sup>. Tale valore risulta essere

$$NF^* = 1 + \frac{E_n I_n}{2kTB}$$

sulla banda  $B$  di interesse.

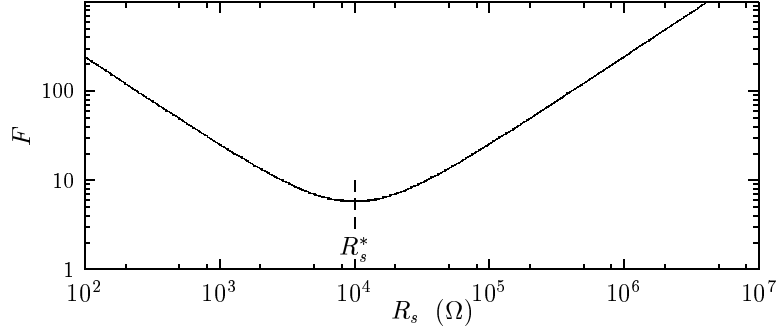


Figura 4 - Andamento della cifra di rumore per l'amplificatore caratterizzato dai parametri  $E_n$ ,  $E_t$  ed  $I_n$  di Figura 3.  $R_s^*$  rappresenta il valore della resistenza di sorgente per il quale risulta minima la cifra di rumore dell'amplificatore.

Per l'amplificatore a cui si riferisce il diagramma in Figura 3, l'andamento della cifra di rumore (al variare di  $R_s$ ) è riportato in Figura 4. Il minimo della cifra di rumore si ha per  $R_s = R_s^* = 10 \text{ k}\Omega$ .

### 3.2 Cifra di rumore di un amplificatore costituito da più stadi in cascata.

Nell'amplificatore rappresentato in Figura 5 la potenza di rumore presente in uscita è data da

$$P_{n,u} = (E_t^2 + E_{n1}^2 + R_s^2 I_{n1}^2) G_1 G_2 G_3 + (E_{n2}^2 + R_s^2 I_{n2}^2) G_2 G_3 + (E_{n3}^2 + R_s^2 I_{n3}^2) G_3$$

La relativa cifra di rumore è dunque

$$NF_{123} = \frac{P_{n,u}}{G_1 G_2 G_3 E_t^2} = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_1} + \frac{NF_3 - 1}{G_1 G_2}$$

Da questa relazione, generalizzabile nella forma

$$NF_{tot} = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_1} + \frac{NF_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{NF_n - 1}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} = NF_1 + \sum_{i=2}^n \frac{NF_i - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j}$$

---

<sup>4</sup>Si osservi che l'espressione trovata per  $R_s$  corrisponde alla condizione per cui nei diagrammi di Figura 3 il termine  $R_s I_n$  eguaglia  $E_n$ .



(nota come formula di Friis) si vede che il maggior contributo alla cifra di rumore complessiva è dato dal primo stadio amplificatore, mentre gli stadi successivi contribuiscono in misura progressivamente decrescente, perché le relative cifre di rumore risultano divise per il prodotto dei guadagni di tutti gli stadi precedenti (oltre che ridotte per la sottrazione del termine 1).

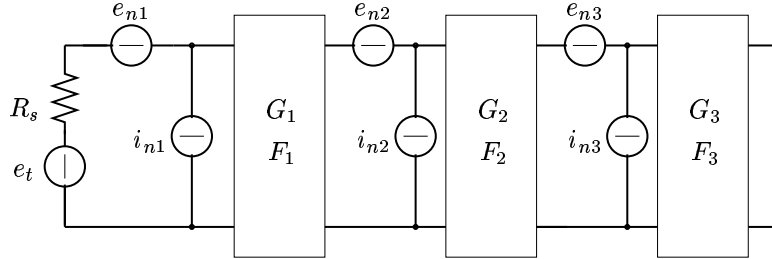


Figura 5 - Amplificatore costituito da tre stadi in cascata, caratterizzati, rispettivamente, da guadagni in potenza  $G_1, G_2$  e  $G_3$ , cifre di rumore  $NF_1, NF_2$  ed  $NF_3$  e generatori di rumore  $e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}$  e  $i_{n1}, i_{n2}, i_{n3}$ .

Questo risultato è di grande importanza per il progettista, il cui impegno nella ricerca di soluzioni circuitali e componenti a basso rumore deve essere concentrato principalmente sul primo stadio e in misura inferiore sugli stadi seguenti.

È opportuno precisare che se, come spesso accade, il primo stadio è uno stadio passivo (attenuatore, circuito di accoppiamento, ecc.), lo stadio più influente ai fini della cifra di rumore complessiva è il secondo.

### 3.3 Temperatura di rumore di un amplificatore

La temperatura di rumore  $T_n$  di un amplificatore è definita come *la temperatura alla quale si dovrebbe trovare la resistenza della sorgente che pilota un amplificatore per produrre (su una certa banda  $\Delta f$ ) la stessa potenza di rumore dovuta alle sorgenti equivalenti ( $e_n, i_n$ ) che caratterizzano l'amplificatore stesso*. Applicando tale definizione:

$$4kT_n R_s \Delta f = E_n^2 + R_s^2 I_n^2 \quad \text{segue} \quad T_n = \frac{E_n^2 + R_s^2 I_n^2}{4kR_s \Delta f}$$

Anche per la temperatura di rumore di un amplificatore costituito da  $n$  stadi in cascata (ciascuno con temperatura di rumore  $T_{ni}$  e guadagno in potenza  $G_i$  vale la formula di Friis nella forma:

$$T_{n,tot} = T_{n1} + \frac{T_{n2}}{G_1} + \frac{T_{n3}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{T_{nn}}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} = T_{n1} + \sum_{i=1}^n \frac{T_{ni}}{\prod_{j=1}^{n-1} G_j}$$