

3. SISTEMI A TELAIO

Generalmente, nelle strutture a telaio le masse vengono schematizzate come concentrate in un numero finito di punti. Pertanto i telai vengono studiati come strutture con un numero finito di gradi di libertà. Di norma inoltre si trascura la deformazione assiale delle aste.

Consideriamo un telaio soggetto ad un generico sistema di forze: nella ipotesi di piccoli spostamenti e di comportamento lineare elastico del materiale, vale il principio di sovrapposizione degli effetti; pertanto, lo stato di deformazione del telaio conseguente ai carichi applicati può essere considerato come somma di una deformazione "locale" delle varie aste considerate perfettamente incastrate e di una deformazione "nodale", costituita da traslazioni e rotazioni dei nodi.

Così, ad esempio, per il telaio di fig. 3.1, la deformazione totale può essere vista come somma della deformazione locale (schema a) e delle deformazioni legate alle rotazioni dei nodi (schemi b e c) e alla traslazione del piano (schema d).

Fig. 3.1

La deformazione locale è facilmente determinabile in quanto ogni asta è perfettamente incastrata; così come le deformazioni legate a rotazioni e spostamenti unitari; lo studio del sistema consiste perciò nella determinazione dello stato di deformazione nodale, cioè delle rotazioni e spostamenti nodali, che risultano quindi le effettive incognite del problema.

Nelle ipotesi di cui sopra (masse concentrate a livello dei piani, deformazione assiale trascurabile) un modello rappresentativo di telaio è, ad esempio, quello di fig. 3.2. In tale modello, le coordinate incognite sono le 9 rotazioni dei nodi e i 3 spostamenti di piano.

Fig. 3.2

Molto spesso, nei telai è accettabile l'ipotesi di traversi infinitamente rigidi rispetto ai pilastri. In tal caso il modello si semplifica ulteriormente essendo i nodi impediti di ruotare: le coordinate incognite si riducono, nel caso dell'esempio, ai 3 spostamenti dei piani (fig. 3.3).

Fig. 3.3

L'analisi dinamica di un modello siffatto viene condotta secondo le linee generali descritte al cap. 2 per le strutture ad n gradi di libertà.

Per l'esempio di fig. 3.3, il sistema di equazioni differenziali assume la forma:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\delta}_1 + c_1 \dot{\delta}_1 + c_2 (\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2) + k_1 \delta_1 + k_2 (\delta_1 - \delta_2) = 0 \\ m_2 \ddot{\delta}_2 + c_2 (\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1) + c_3 (\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + k_2 (\delta_2 - \delta_1) + k_3 (\delta_2 - \delta_3) = 0 \\ m_3 \ddot{\delta}_3 + c_3 (\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_2) + k_3 (\delta_3 - \delta_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\delta}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\delta}_1 - c_2 \dot{\delta}_2 + (k_1 + k_2) \delta_1 - k_2 \delta_2 = 0 \\ m_2 \ddot{\delta}_2 - c_2 \dot{\delta}_1 + (c_2 + c_3) \dot{\delta}_2 - c_3 \dot{\delta}_3 - k_2 \delta_1 + (k_2 + k_3) \delta_2 - k_3 \delta_3 = 0 \\ m_3 \ddot{\delta}_3 - c_3 \dot{\delta}_2 + c_3 \dot{\delta}_3 - k_3 \delta_2 + k_3 \delta_3 = 0 \end{cases}$$

In generale lo smorzamento ha valori piuttosto piccoli, per cui se ne tiene conto in maniera approssimata.

Per quanto riguarda i termini di rigidità, questi possono essere valutati utilizzando direttamente la definizione di rigidità, cioè come rapporto fra il vettore forza nodale e la deformazione nodale che tale forza induce, nei modelli di fig. 3.4.

Fig. 3.4

La matrice di rigidità risulta quindi:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Tale matrice può essere scritta anche nella forma:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

i cui termini assumono il significato indicato in fig. 3.5.

Fig. 3.5

In generale, per un telaio ad n piani, nel sistema di equazioni differenziali:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.4)$$

si ha:

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad \text{vettore degli spostamenti dei piani}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle masse}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{matrice di smorzamento}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & k_{n-1,n} \\ 0 & 0 & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{matrice di rigidezza}$$

ANALISI SISMICA

Infine, nel caso di analisi sismica della struttura a telaio, nel sistema:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = -[m]\{T\}\ddot{x}_G(t) \quad (2.50)$$

si ha:

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

L'analisi modale conduce alla scrittura di n equazioni disaccoppiate del tipo:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = -g_i \ddot{x}_G(t) \quad (3.1)$$

in cui:

$$g_i = \frac{\sum_{r=1}^n m_r u_r^{(i)}}{\sum_{r=1}^n m_r (u_r^{(i)})^2} \quad (3.2)$$

La soluzione di tali equazioni permette di determinare le forze elastiche relative a ciascun piano:

$$\{f_p(t)\} = \left\{ \sum_{i=1}^n f_{p,i}(t) \right\} \quad (3.3)$$

in cui:

$$\{f_{p,i}(t)\} = [m] \{u_i\} g_i \omega_i V_i(t) \quad (3.4)$$

$$f_{p,i}(t) = m_p u_p^{(i)} g_i \omega_i V_i(t)$$

$f_{p,i}(t)$ può essere visto come il contributo fornito da ciascun modo.

Attraverso i metodi statici, per ciascun istante t , si può poi valutare qualsiasi forza risultante.

Per esempio, il taglio alla base in un generico telaio ad N piani (numero dei gradi di libertà n = numero dei piani N) è dato dalla somma delle forze ai piani, cioè:

$$Y_0(t) = \sum_{p=1}^N f_p(t) = \{1\}^T \{f_p(t)\} = \{1\}^T [m][u] \left\{ \frac{L_i}{M_i} \omega_i V_i(t) \right\} \quad (3.5)$$

Poiché per questo caso si ha $\{T\} = \{1\}$, risulta (v. (2.51):

$$\begin{aligned} \{L\} &= [u]^T [m] \{1\} \\ \{L\}^T &= \{1\}^T [m][u] \end{aligned} \quad (3.6)$$

e la (3.5) può essere scritta:

$$Y_0(t) = \{L\}^T * \left\{ \frac{L_i}{M_i} \omega_i V_i(t) \right\}$$

$$Y_0(t) = \sum_{i=1}^N \frac{L_i^2}{M_i} \omega_i V_i(t) \quad (3.7)$$

La quantità $\frac{L_i^2}{M_i}$ ha le dimensioni di una massa e viene chiamata massa modale efficace

perché può essere interpretata come la quota parte della massa totale che, per ciascun modo, risponde al terremoto (questa interpretazione è valida a rigore solo per strutture con masse concentrate lungo un asse verticale).

Quindi il contributo di ciascun modo al taglio alla base può essere visto come la reazione della massa modale efficace alla accelerazione modale efficace del terreno $\omega_i V_i(t)$.

Per semplificare l'analisi della risposta al terremoto, può essere lecito tenere conto solo dei primi modi di vibrare, che sono quelli che danno il maggior contributo alla vibrazione totale e che di solito sono anche quelli meno smorzati.

Se si considerano solo i primi Z modi di vibrare, una misura del contributo al taglio alla base fornito dai modi considerati rispetto al taglio che si otterrebbe considerando tutti i modi, si ha dal rapporto della somma delle masse modali efficaci relative ai modi considerati rispetto alla stessa somma estesa a tutti i modi (v. (3.7):

$$\frac{\sum_{n=1}^Z \frac{L_n^2}{M_n}}{\sum_{n=1}^N \frac{L_n^2}{M_n}} \quad (3.8)$$

Si dimostra che, per strutture con masse concentrate lungo un asse verticale, la somma di tutte le masse modali efficaci è uguale alla massa totale:

$$\sum_{n=1}^N \frac{L_n^2}{M_n} = M_T \quad (3.9)$$

Infatti, per tali strutture la massa totale è data da

$$M_T = \{1\}^T [m] \{1\} \quad (3.10)$$

Considerato che (v. (2.26) e (2.42)) un qualunque vettore di spostamenti di un sistema può essere espresso come somma degli autovettori moltiplicati ciascuno per una certa ampiezza (v. fig. 3.6 (a)), anche uno spostamento unitario può essere espresso come somma di

componenti modali (v. fig. 3.6 (b)); ovvero, il vettore unitario può essere scritto in termini di coordinate modali:

$$\{1\} = [u] \{\eta\} \quad (3.11)$$

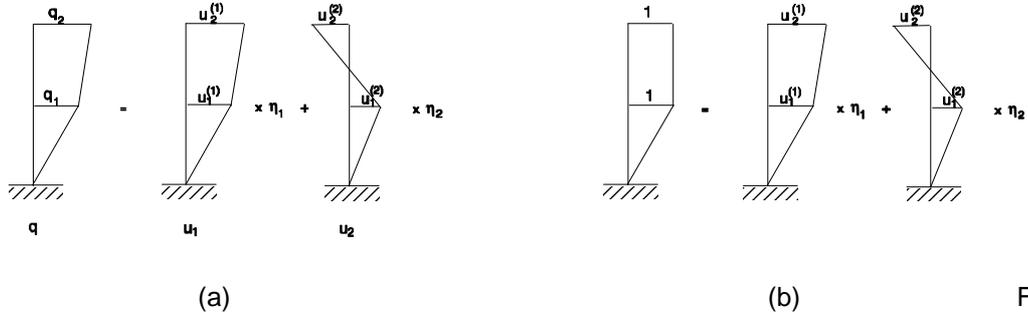


Fig. 3.6

Per determinare le ampiezze modali η_n che soddisfano la (2.62), si premoltiplicano entrambi i membri della (3.11) per $\{u_n\}^T [m]$:

$$\{u_n\}^T [m] \{1\} = \{u_n\}^T [m] [u] \{\eta\} \quad (3.12)$$

per la (3.6):

$$\{u_n\}^T [m] \{1\} = L_n \quad (3.13)$$

e per le condizioni di ortogonalità:

$$\{u_n\}^T [m] [u] \{\eta\} = M_n \eta_n \quad (3.14)$$

Sostituendo nella (3.12) si ha:

$$L_n = M_n \eta_n \quad (3.15)$$

sostituendo la (3.15) nella (3.11) e successivamente nella (3.10):

$$\{1\} = [u] \left\{ \frac{L_n}{M_n} \right\}$$

$$M_T = \{1\}^T [m] \{1\} = \{1\}^T [m] [u] \left\{ \frac{L_n}{M_n} \right\} = \{L_n\}^T \left\{ \frac{L_n}{M_n} \right\} = \sum_{n=1}^N \frac{L_n^2}{M_n} \quad (3.16)$$

Perciò la (3.8) si può scrivere:

$$\frac{\sum_{n=1}^Z \frac{L_n^2}{M_n}}{\sum_{n=1}^N \frac{L_n^2}{M_n}} = \frac{\sum_{n=1}^Z \frac{L_n^2}{M_n}}{M_T} \quad (3.17)$$

Utilizzando la (3.17) si può quindi valutare la quota del taglio totale che si prende in conto quando si limiti l'analisi ai primi Z modi di vibrare.

ANALISI MODALE CON SPETTRO DI RISPOSTA

Per l'esempio di fig. 3.3, l'analisi modale con spettro di risposta porta ai seguenti risultati.

- ◆ in termini di coordinate generalizzate (v. 2.67):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{1,\max} &= g_1 \cdot S_a(T_1, \xi_1) \\ \dot{\eta}_{2,\max} &= g_2 \cdot S_a(T_2, \xi_2) \\ \dot{\eta}_{3,\max} &= g_3 \cdot S_a(T_3, \xi_3) \end{aligned} \quad (3.18)$$

- ◆ in termini di accelerazioni (v. 2.70):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{1,\max} &= \sqrt{[u_1^{(1)} g_1 S_a(T_1, \xi_1)]^2 + [u_1^{(2)} g_2 S_a(T_2, \xi_2)]^2 + [u_1^{(3)} g_3 S_a(T_3, \xi_3)]^2} \\ \ddot{q}_{2,\max} &= \sqrt{[u_2^{(1)} g_1 S_a(T_1, \xi_1)]^2 + [u_2^{(2)} g_2 S_a(T_2, \xi_2)]^2 + [u_2^{(3)} g_3 S_a(T_3, \xi_3)]^2} \\ \ddot{q}_{3,\max} &= \sqrt{[u_3^{(1)} g_1 S_a(T_1, \xi_1)]^2 + [u_3^{(2)} g_2 S_a(T_2, \xi_2)]^2 + [u_3^{(3)} g_3 S_a(T_3, \xi_3)]^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

- ◆ in termini di forze di piano:

$$\begin{aligned} f_{1,\max} &= m_1 * \ddot{q}_{1,\max} \\ f_{2,\max} &= m_2 * \ddot{q}_{2,\max} \\ f_{3,\max} &= m_3 * \ddot{q}_{3,\max} \end{aligned} \quad (3.20)$$

- ◆ in termini di taglio alla base (v. (2.72):

$$Y_{0,\max} = \sqrt{\left[\frac{L_1^2}{M_1} S_a(T_1, \xi_1) \right]^2 + \left[\frac{L_2^2}{M_2} S_a(T_2, \xi_2) \right]^2 + \left[\frac{L_3^2}{M_3} S_a(T_3, \xi_3) \right]^2} \quad (3.21)$$