$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=ky_0\,\text{sen}\,\overline{\omega}t+c\overline{\omega}y_0\cos\overline{\omega}t$$

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_0\,\text{sen}(\overline{\omega}t+\beta)$$

L'equazione del moto ha la stessa forma di quella relativa alla struttura eccitata dal carico armonico in cui:

$$F_0=y_0\sqrt{k^2+(c\overline{\omega})^2}=y_0k\sqrt{1+(2\xi r)^2}$$

$$\tan\beta=\frac{c\overline{\omega}}{k}=2\xi r$$

RISPOSTA IN TERMINI DI SPOSTAMENTO ASSOLUTO DELLA MASSA

La risposta per lo stato permanente, in termini di spostamento assoluto della massa, è quindi ricavabile dalla (1.16):

$$y(t)=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\text{sen}(\overline{\omega}t+\beta-\theta) \qquad (1.24)$$

ovvero, sostituendo:

$$\frac{y(t)}{y_0}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\text{sen}(\overline{\omega}t+\beta-\theta) \qquad (1.25)$$

rappresenta la risposta assoluta dell'oscillatore smorzato ad un moto armonico della sua base, ovvero la trasmissione del moto del sostegno all'oscillatore.

Tale espressione è applicabile a problemi di isolamento da vibrazioni: ad esempio, isolamento di strumentazioni che debbano essere protette da vibrazioni nocive della struttura di sostegno, isolamento delle costruzioni dalle vibrazioni del terreno essenzialmente di origine sismica.

Il grado di isolamento relativo è detto **TRASMISSIBILITÀ** ed è definito come il rapporto fra l’ampiezza del moto dell’oscillatore e l’ampiezza del moto del supporto:

$$T_r = \frac{Y}{y_0} = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \tag{1.26}$$

Sia la trasmissibilità del moto dalla base alla struttura, (1.26), sia la trasmissibilità della forza della struttura alla base, (1.21), sono fornite dalla stessa funzione. Quindi la curva di trasmissibilità della fig. 1.13 rappresenta entrambi i tipi di trasmissibilità.

RISPOSTA IN TERMINI DI SPOSTAMENTO RELATIVO DELLA MASSA RISPETTO AL SOSTEGNO

Si può risolvere l'equazione del moto in termini di spostamento relativo tra la massa m ed il sostegno:

$$u = y - y_s$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y}_s \tag{1.27}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m y_0 \overline{\omega}^2 \operatorname{sen} \overline{\omega} t \tag{1.28}$$

$$u(t) = \frac{m y_0 \overline{\omega}^2 / k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \operatorname{sen}(\overline{\omega} t - \theta)$$

$$\frac{u(t)}{y_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \operatorname{sen}(\overline{\omega} t - \theta) \tag{1.29}$$

Se il sistema è eccitato da una accelerazione armonica alla base:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y}_0 \operatorname{sen} \overline{\omega} t \tag{1.30}$$

la risposta per lo stato permanente è:

$$\frac{u(t)}{\ddot{y}_0} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \operatorname{sen}(\overline{\omega} t - \theta) \tag{1.31}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO: rapporto tra l'ampiezza della risposta del sistema e la funzione eccitatrice.

$$\frac{u}{y_0} = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \tag{1.32}$$

$$\frac{u}{\ddot{y}_0} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}} \tag{1.33}$$

Fig. 1.15

Fig. 1.16

STRUMENTI A RIFERIMENTO INERZIALE (SISMICI)

Fig. 1.17

Strumenti in cui un solo terminale (la base dello strumento) è fissato al punto dove deve essere eseguita la misura.

Le caratteristiche del moto sono ricavate dalla misura dello spostamento relativo della massa sismica rispetto alla base dello strumento.

La massa è montata su molle ed in generale il moto è smorzato per mezzo di un fluido o di correnti elettriche.

Lo strumento può essere impiegato per misure di spostamento o di accelerazione a seconda delle caratteristiche costruttive e del campo di frequenza in cui si opera.

Lo spostamento relativo tra massa sismica e base è dato dalle (1.32) o (1.33) a seconda che il moto della base sia espresso in termini di spostamento o di accelerazione; è riportato nei diagrammi delle figg. 1.15, 1.16 in funzione di r e ξ.

Dal primo diagramma si può vedere che la risposta è praticamente uguale al moto della base per rapporti di frequenza $r > 2$ e rapporti di smorzamento $\xi \cong 0.5$. Di conseguenza la risposta di un sistema siffatto è essenzialmente proporzionale all'ampiezza dello spostamento della base per alte frequenze. Il campo di applicabilità dello strumento aumenta col diminuire della frequenza naturale.

Dal secondo diagramma si vede che per $\xi \cong 0.7$ il valore della risposta coincide con quello della base nel campo di frequenze $0 < r < 0.5$. Quindi uno strumento così concepito dà una risposta proporzionale all'accelerazione della base.

$\frac{\overline{\omega}}{\omega} \geq 2$ ω piccolo $\Rightarrow$ massa grande trasduttore di spostamento

$\frac{\overline{\omega}}{\omega} < 0.5$ ω grande $\Rightarrow$ massa piccola accelerometro

Qualora si misuri la velocità relativa tra massa e base, operando al di sopra di ω, si realizza un sismometro, strumento per misurare velocità relative.

1.4 RISPOSTA ALL'ECCITAZIONE ARMONICA SEMPLICE

Studiamo il moto di un oscillatore smorzato con una forzante del tipo:

$$f(t) = e^{i\overline{\omega}t} = \cos\overline{\omega}t + i\,\mathrm{sen}\,\overline{\omega}t \qquad \text{(relaz. di Eulero)} \qquad (1.34)$$

non ha significato fisico, ma è utile per costruire la soluzione per forzanti generiche.

L'equazione del moto è:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = e^{i\overline{\omega}t}$$

ovvero:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\xi\omega y + \omega^2 y = \dfrac{1}{m} e^{i\overline{\omega}t} \\ y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{cases}$$

La soluzione di regime (non dipende dalle condizioni iniziali) è della forma:

$$y(t) = H(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t}$$

derivando e sostituendo nell'equaz. del moto:

$$\dot{y}(t) = i\overline{\omega} H(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t}$$
$$\ddot{y}(t) = i^2 \overline{\omega}^2 H(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t} = -\overline{\omega}^2 H(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t}$$
$$\left(-\overline{\omega}^2 + 2i\xi\omega\overline{\omega} + \omega^2\right) H(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t} = \frac{1}{m} e^{i\overline{\omega}t}$$

da cui:

$$H(\overline{\omega}) = \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} + 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}}$$ <u>funzione di risposta complessa in frequenza</u>

$$y(t) = H(\overline{\omega}) f(t) = H(\overline{\omega}) e^{i\overline{\omega}t} \tag{1.35}$$

$H(\overline{\omega})$ esprime, in condizioni di regime, il rapporto tra risposta ed eccitazione nel caso di forza armonica semplice: **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO**

$H(\overline{\omega})$ è una quantità complessa esprimibile nella forma polare: $H(\overline{\omega}) = \left|H(\overline{\omega})\right| e^{i\varphi}$

$$H(\overline{\omega}) = \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} + 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}} = \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} + 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}} * \frac{1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} - 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}}{1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} - 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}} =$$

$$= \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} - 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}}{\left(1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 - \left(2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2} \left(1 - \dfrac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} - 2i\xi\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)$$

$$\left|H(\overline{\omega})\right| = \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1}{\left(1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2} \sqrt{\left(1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{m\omega^2} * \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}}{1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}}$$

perciò si può scrivere:

$$H(\overline{\omega}) = \left|H(\overline{\omega})\right| e^{-i\theta}$$

$$y(t) = \left|H(\overline{\omega})\right| e^{-i\theta} e^{i\overline{\omega}t} = \left|H(\overline{\omega})\right| e^{i(\overline{\omega}t-\theta)} = \left|H(\overline{\omega})\right| \left[\cos(\overline{\omega}t-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\overline{\omega}t-\theta)\right] \quad (1.36)$$

dove:

$$\left|H(\overline{\omega})\right| = \frac{1}{m\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}}$$

$$\theta = -\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}}{1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}}$$

I casi già studiati di oscillatore, smorzato e non, soggetti a forze sinusoidali o cosinusoidali rappresentano casi particolari della (1.36).

Se $f(t) = \cos\overline{\omega}t$ la forzante è rappresentata dalla sola parte reale della (1.34). Perciò anche la risposta consiste della sola parte reale:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}} \left[\cos(\overline{\omega}t-\theta)\right] \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}}{1-\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}}$$

coincidente con la (1.17)

Se, al contrario, è $f(t) = \operatorname{sen}\overline{\omega}t$, la forzante, e quindi anche la risposta, contiene solo la parte immaginaria:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}} \left[\operatorname{sen}\left(\overline{\omega}t - \theta\right)\right] \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\overline{\omega}}{\omega}}{1 - \frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2}}$$

che coincide con la (1.16).

Per oscillatore non smorzato le risposte si possono ottenere dalle precedenti per ξ=0.

1.5 RISPOSTA ALL'ECCITAZIONE PERIODICA: SERIE DI FOURIER

Per i sistemi lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti:

se $\quad F(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t)\quad$ somma di un certo numero di forze eccitatrici

allora $\quad x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} H_i F_i(t)$

la risposta è data dalla somma delle risposte alle singole eccitazioni.

eccitazione periodica: si ripete uguale a uguali intervalli di tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

eccitazione armonica: è un caso particolare di eccitazione periodica.

Ogni funzione periodica può essere rappresentata, sotto certe condizioni, da una serie di funzioni armoniche le cui frequenze sono multipli interi di una frequenza fondamentale ω_0.

frequenza fondamentale $\rightarrow$ prima armonica

multipli interi $\rightarrow$ armoniche

SERIE DI FOURIER

Una funzione periodica può essere espressa dalla Σ di un numero infinito di termini sen e cos cioè come somma di un numero infinito di funzioni armoniche.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty}\{a_p \cos p\omega_0 t + b_p \operatorname{sen} p\omega_0 t\} \tag{1.37}$$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ $\qquad\qquad$ T periodo della funzione

$p = 1,2,3,...$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos p\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos p\omega_0 t\, dt \qquad p = 0,1,2,...$$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\operatorname{sen} p\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen} p\omega_0 t\, dt \qquad p = 1,2,...$$

a_p , b_p rappresentano una misura della partecipazione delle componenti armoniche $\cos p\omega_0 t$ e $\operatorname{sen} p\omega_0 t$ nella funzione $f(t)$.

La rappresentazione in serie di Fourier evidenzia quindi le frequenze dominanti ovvero il “contenuto in frequenza” della vibrazione.

La rappresentazione in serie di Fourier è possibile ammesso che gli integrali che definiscono a_p e b_p esistano. Per i problemi fisici che ci interessano tali integrali esistono.

$\frac{1}{2}a_0$ rappresenta il valor medio di $f(t)$: è una costante, perciò, per sistemi lineari, la risposta all'eccitazione costante può essere trattata a parte (statica).

La risposta alle componenti armoniche può essere ottenuta come somma delle risposte a ciascuna componente (v. 1.16’; 1.17’):

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty}|H_p|[a_p \cos(p\omega_0 t - \theta_p) + b_p \operatorname{sen}(p\omega_0 t - \theta_p)]$$

$$|H_p| = \frac{1}{m\omega^2}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{p\omega_0}{\omega}\right)^2}} \qquad \theta_p = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{p\omega_0}{\omega}}{1-\left(\frac{p\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

quindi la risposta alla $f(t)$ è anch'essa periodica con lo stesso periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Se il valore di $p\omega_0$ di una delle componenti armoniche è vicino alla frequenza naturale ω del sistema, allora quella particolare armonica tende ad essere particolarmente amplificata e quindi a fornire un contributo relativamente grande alla risposta, specialmente per bassi valori dello smorzamento.

Nel caso di smorzamento nullo, se $p\omega_0 = \omega$ per un certo p allora si ha una condizione di risonanza. Quindi per un sistema non smorzato si può avere risonanza anche quando l'eccitazione non è armonica ma semplicemente periodica, purché una delle armoniche coincida con la frequenza naturale del sistema.

FORMA ESPONENZIALE DELLA SERIE DI FOURIER

Talvolta conviene considerare la forma complessa, o esponenziale, della serie di Fourier.

Le funzioni trigonometriche sono legate alle funzioni esponenziali dalle relazioni di Eulero:

$$\cos rx = \frac{e^{irx} + e^{-irx}}{2} \qquad \operatorname{sen} rx = \frac{e^{irx} - e^{-irx}}{2i}$$

Sostituendo nella:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty}\left\{a_p \cos p\omega_0 t + b_p \operatorname{sen} p\omega_0 t\right\}$$

si ha:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty}\left\{a_p \frac{e^{ip\omega_0 t} + e^{-ip\omega_0 t}}{2} + b_p \frac{e^{ip\omega_0 t} - e^{-ip\omega_0 t}}{2i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{(a_p - ib_p)e^{ip\omega_0 t} + (a_p + ib_p)e^{-ip\omega_0 t}\right\}$$

ponendo:

$$C_0 = \tfrac{1}{2}a_0$$

$$C_p = \tfrac{1}{2}(a_p - ib_p) \qquad C_{-p} = C_p^* = \tfrac{1}{2}(a_p + ib_p) \qquad p = 1,2,...$$

(C_p^* è il complesso coniugato di C_p); si ha:

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p e^{ip\omega_0 t}$$

in cui:

$$C_p = \tfrac{1}{2}\left(a_p - ib_p\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(p\omega_0 t)dt - i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}(p\omega_0 t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{e^{ip\omega_0 t} + e^{-ip\omega_0 t}}{2}dt - i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{e^{ip\omega_0 t} - e^{-ip\omega_0 t}}{2i}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{e^{ip\omega_0 t} + e^{-ip\omega_0 t} - e^{ip\omega_0 t} + e^{-ip\omega_0 t}}{2}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ip\omega_0 t}dt$$

Riassumendo:

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p e^{ip\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1.38}$$

$$C_p = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ip\omega_0 t}dt \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.39}$$

La risposta alla $f(t))$ espressa dalla (1.38) è:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_p C_p e^{ip\omega_0 t} \tag{1.40}$$

1.6 RISPOSTA ALL'ECCITAZIONE NON PERIODICA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Nel caso di eccitazione periodica con periodo T si è visto che la risposta stazionaria, ottenuta ignorando l'eccitazione iniziale, è periodica di periodo T.

Per eccitazione qualsiasi non si può parlare di risposta stazionaria e l'intera soluzione deve essere considerata transitoria.

Ci sono più modi di risolvere il problema.

INTEGRALE DI FOURIER

Consiste nel rappresentare l'eccitazione con l'integrale di Fourier, derivato dalla serie di Fourier con un procedimento al limite per il periodo T che tende a ∞: così il primo intervallo diventa illimitato e la funzione è non periodica.

Abbiamo visto che una funzione periodica di periodo T può essere rappresentata da una serie infinita di funzioni armoniche di frequenze $p\omega_0$ (p=0,1,2,...) dove $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (frequenza fondamentale).

Al crescere di T, le frequenze discrete tendono ad essere sempre più vicine, fino a diventare continue, e la serie di Fourier diventa l'integrale di Fourier.