

1.2 RISPOSTA ALL'ECCITAZIONE ARMONICA

Struttura soggetta a forze o spostamenti la cui grandezza può essere rappresentata nel tempo da una funzione sen o cos.

1.2.1 SISTEMA NON SMORZATO

Forza impressa $F(t) = F_0 \text{ sen } \bar{\omega}t$

equaz. del moto:

$$m\ddot{y} + ky = F_0 \text{ sen } \bar{\omega}t \quad (1.10)$$

la soluzione può essere espressa come somma dell'integrale generale che soddisfa all'equazione omogenea $y_c(t)$ e di un integrale particolare $y_p(t)$

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

L'integrale generale è espresso dalla (1.3):

$$y_c(t) = A \cos \omega t + B \text{ sen } \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si ricerca un integrale particolare della forma:

$$y_p(t) = Y \text{ sen } \bar{\omega}t$$

derivando e sostituendo nella (1.10):

$$\begin{aligned}\dot{y}_p &= \bar{\omega}Y \cos \bar{\omega}t \\ \ddot{y}_p &= -\bar{\omega}^2 Y \sin \bar{\omega}t \\ -m\bar{\omega}^2 Y \sin \bar{\omega}t + kY \sin \bar{\omega}t &= F_0 \sin \bar{\omega}t \\ (-m\bar{\omega}^2 + k)Y &= F_0\end{aligned}$$

si ricava:

$$Y = \frac{F_0}{k - m\bar{\omega}^2} = \frac{F_0/k}{1 - r^2} \quad r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad \text{rapporto di frequenza}$$

Quindi:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_0/k}{1 - r^2} \sin \bar{\omega}t \quad (1.11)$$

per $y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 0$

$$y(t) = \frac{F_0/k}{1 - r^2} (\sin \bar{\omega}t - r \sin \omega t) \quad (1.12)$$

La risposta è la sovrapposizione di due termini armonici di differenti frequenze: perciò il moto non è armonico.

Quando la frequenza della forzante si avvicina alla frequenza naturale del sistema, $r \approx 1$, la

(1.12) si può trasformare:

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{F_0/k}{1 - r^2} (\sin \bar{\omega}t - r \sin \omega t) \cong \frac{F_0/k}{1 - r^2} (\sin \bar{\omega}t - \sin \omega t) = \\ &= \frac{F_0/k}{1 - r^2} * 2 * \sin\left(\frac{\bar{\omega} - \omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\bar{\omega} + \omega}{2} t\right) \cong \frac{F_0/k}{1 - r^2} * 2 * \sin\left(\frac{\bar{\omega} - \omega}{2} t\right) \cos \bar{\omega}t\end{aligned}$$

il cui grafico, rappresentato nella fig. 1.9, illustra il fenomeno dei **BATTIMENTI**:

Fig. 1.9

Quando la frequenza della forzante è uguale alla frequenza naturale del sistema, $r = 1$, l'ampiezza del moto aumenta gradualmente fino all'infinito: si ha la **RISONANZA**.

Infatti, la (1.12) può essere scritta nella forma (regola di L'Hospital):

$$y(t) = \frac{F_0}{2k} (-\bar{\omega}t \cos \bar{\omega}t + \text{sen } \bar{\omega}t) \cong -\frac{F_0}{2k} \bar{\omega}t \cos \bar{\omega}t$$

che rappresenta un'oscillazione armonica la cui ampiezza cresce all'infinito.

Fig. 1.10

1.2.2 SISTEMA SMORZATO

equaz. del moto:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \text{sen } \bar{\omega}t \quad (1.13)$$

La soluzione generale per il sistema sottosmorzato ($c < c_{cr}$) è espressa dalla (1.9):

$$y_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \text{sen } \omega_D t)$$

si ricerca una soluzione particolare del tipo

$$y_p(t) = Y \text{sen}(\bar{\omega}t - \theta)$$

derivando e sostituendo nella (1.13):

$$\dot{y}_p = \bar{\omega}Y \cos(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\ddot{y}_p = -\bar{\omega}^2 Y \text{sen}(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$-m\bar{\omega}^2 Y \text{sen}(\bar{\omega}t - \theta) + c\bar{\omega}Y \cos(\bar{\omega}t - \theta) + kY \text{sen}(\bar{\omega}t - \theta) = F_0 \text{sen } \bar{\omega}t$$

ponendo $c = 2m\omega\xi$ $r = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ e dividendo per $m\omega^2$

$$-r^2 Y \sin(\bar{\omega}t - \theta) + 2\xi r Y \cos(\bar{\omega}t - \theta) + Y \sin(\bar{\omega}t - \theta) = \frac{F_0}{k} \sin \bar{\omega}t$$

$$(1-r^2)Y(\sin \bar{\omega}t \cos \theta - \cos \bar{\omega}t \sin \theta) + 2\xi r Y(\cos \bar{\omega}t \cos \theta + \sin \bar{\omega}t \sin \theta) = \frac{F_0}{k} \sin \bar{\omega}t$$

$$[(1-r^2)Y(-\sin \theta) + 2\xi r Y \cos \theta] \cos \bar{\omega}t + [(1-r^2)Y \cos \theta + 2\xi r Y \sin \theta] \sin \bar{\omega}t = \frac{F_0}{k} \sin \bar{\omega}t$$

l'equazione si risolve uguagliando i coefficienti di $\cos \bar{\omega}t$ e $\sin \bar{\omega}t$; si ha:

$$(1-r^2)Y(-\sin \theta) + 2\xi r Y \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{(1-r^2)}$$

$$(1-r^2)Y \cos \theta + 2\xi r Y \sin \theta = \frac{F_0}{k} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{F_0/k}{(1-r^2)\cos \theta + 2\xi r \sin \theta}$$

ricordando:

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

si ricava:

$$y_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2} \quad (1.14)$$

La risposta del sistema per $f(t) = F_0 \sin \bar{\omega}t$ è quindi:

$$y(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta)}_{\text{risposta permanente}} \quad (1.15)$$

La presenza del fattore esponenziale fa sparire rapidamente la parte transitoria cosicché il moto rimane descritto dalla sola risposta permanente:

$$y(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2} \quad (1.16)$$

Se la forza eccitatrice fosse $f(t) = F_0 \cos \bar{\omega}t$

La risposta permanente avrebbe la forma:

$$y(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2} \quad (1.17)$$

Le (1.16) e (1.17) possono essere scritte, rispettivamente:

$$y(t) = F_0 * H(\bar{\omega}) * \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2} \quad (1.16')$$

$$y(t) = F_0 * H(\bar{\omega}) * \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2} \quad (1.17')$$

in cui

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{m\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2}}$$

"FATTORE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA":

Poiché è: $y_{st} = \frac{F_0}{k}$, deflessione statica del sistema su cui agisce la F_0 statica, si può

scrivere:

$$y(t) = \frac{y_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (1.18)$$

Si definisce "fattore di amplificazione dinamica" il rapporto fra l'ampiezza della vibrazione e la corrispondente deflessione statica:

$$D = \frac{Y}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (1.19)$$

D e $\tan \theta$ variano con ξ ed r .

Il picco si ottiene derivando rispetto ad r e ponendo $= 0 \Rightarrow r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

Si vede che il picco si verifica per $r < 1$; per $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7$ non c'è picco.

Per sistemi leggermente smorzati, l'ampiezza max si verifica per r vicino ad uno.

Alla risonanza:

$$D(r = 1) = \frac{1}{2\xi}$$
$$\theta = 90^\circ \quad \text{per qualsiasi } \xi$$

Fig. 1.11

Fig. 1.12

Nei diagrammi delle figg. 1.11 e 1.12, sono riportati rispettivamente l'andamento del fattore di amplificazione e dell'angolo di fase in funzione del rapporto di frequenza r per diversi valori del fattore di smorzamento ξ .

Si nota:

per $\xi = 0$ e $r = 1$, D diventa infinitamente grande, cioè il moto si amplifica indefinitamente

per r grande, cioè per $\bar{\omega} \gg \omega$, risulta $D \ll 1$, cioè il sistema non risente praticamente dell'effetto di forzanti con pulsazione relativa, $\frac{\bar{\omega}}{\omega}$, elevata.

FORZA TRASMESSA ALLA FONDAZIONE

Consideriamo l'oscillatore smorzato soggetto ad una forza armonica $f(t) = F_0 \sin \bar{\omega}t$

La risposta per lo stato permanente è espressa dalla (1.16):

$$y(t) = Y \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad Y = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \tan \theta = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

La forza trasmessa al sostegno attraverso la molla è ky e attraverso l'elemento smorzante è $c\dot{y}$. Quindi la forza totale trasmessa è:

$$f_T = ky + c\dot{y}$$

derivando la (1.16) e sostituendo, si ottiene:

$$f_T = Y[k \sin(\bar{\omega}t - \theta) + c\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta)]$$

$$f_T = Y\sqrt{k^2 + c^2\bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega}t - \theta + \beta) \quad \tan \beta = \frac{c\bar{\omega}}{k} = 2\xi r$$

quindi il valore massimo della forza trasmessa alla base risulta:

$$F_T = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (1.20)$$

La **TRAMISSIBILITÀ** T_r è definita come il rapporto tra la forza trasmessa alla base e l'ampiezza della forza applicata:

$$T_r = \frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (1.21)$$

Fig. 1.13

Tale espressione risulta utile, ad esempio, in problemi di isolamento dalle vibrazioni prodotte da motori.

Dal grafico che illustra l'andamento di T_r , si vede che per massimizzare l'isolamento si può intervenire sia sullo smorzamento che sulla frequenza propria dell'oscillatore (r grande perciò ω piccolo, ovvero k piccolo e/o m grande). Si nota che lo smorzamento tende a ridurre l'efficacia dell'isolamento dalle vibrazioni per frequenze corrispondenti a $r > \sqrt{2}$.

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLA FREQUENZA PROPRIA E DELLO SMORZAMENTO: metodo delle oscillazioni forzate

Un'altra tecnica per valutare i parametri caratteristici di una struttura si basa sull'osservazione delle risposte per lo stato permanente ad eccitazioni armoniche in un campo di frequenze prossimo alla risonanza.

Si applica una forzante armonica e si traccia la curva di risposta rilevando le ampiezze di spostamento in funzione della frequenza (fig. 1.14). E' utile tracciare anche il grafico dell'angolo di fase in funzione della frequenza.

Fig. 1.14

L'ampiezza della risposta raggiunge il valore max in prossimità della risonanza. Si commettono errori trascurabili se si confonde l'ampiezza massima con l'ampiezza relativa ad $r=1$.

In corrispondenza del massimo della risposta, si può quindi valutare ω , frequenza naturale dell'oscillatore.

Dal grafico dell'angolo di fase, in corrispondenza di $\theta = 90^\circ$ (fig. 1.12), si può altresì ricavare ω ; è opportuno, specialmente se le registrazioni risultano disturbate, eseguire entrambe le rilevazioni.

Metodo dell'ampiezza di banda (mezza-forza) per la valutazione dello smorzamento

E' basato sull'osservazione che la forma delle curve di risposta è controllata dallo smorzamento, cioè le curve sono tanto più strette quanto minore è lo smorzamento (fig. 1.11).

In particolare, la "ampiezza di banda", differenza fra due frequenze che corrispondono allo stesso valore di risposta, è correlata al valore dello smorzamento.

Per comodità di calcolo, conviene misurare la larghezza di banda a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del picco della curva; le frequenze corrispondenti vengono chiamate "punti di mezza forza", f_1 ed f_2 (v. fig. 1.14).

Analiticamente, i valori di f_1 ed f_2 si determinano ponendo la risposta uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ per l'ampiezza di risonanza.

$$\frac{y_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{y_{st}}{2\xi}$$

$$r^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

$$\sqrt{1+\xi^2} \cong 1$$

$$r_1^2 \cong 1 - 2\xi^2 - 2\xi \quad \Rightarrow \quad r_1 \cong 1 - \xi - \xi^2$$

$$r_2^2 \cong 1 - 2\xi^2 + 2\xi \quad \Rightarrow \quad r_2 \cong 1 + \xi - \xi^2$$

Sottraendo la prima dalla seconda delle precedenti, si ottiene:

$$\xi = \frac{1}{2}(r_2 - r_1) = \frac{1}{2} \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{f_2 - f_1}{f} \quad \left(r_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{f_1}{f} ; r_2 = \frac{\bar{\omega}_2}{\omega} = \frac{f_2}{f} \right)$$

poiché è :

$$f \cong \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per la simmetria della} \\ \text{curva di risposta} \end{array} \right.$$

si ha :

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

1.3 RISPOSTA AL MOTO DEL SOSTEGNO

Il sostegno (es: terreno) si muove di moto armonico:

$$y_s(t) = y_0 \text{ sen } \bar{\omega}t \quad (1.22)$$

equaz. del moto dell'oscillatore:

$$\underbrace{m\ddot{y}}_{\substack{\text{forze d'inerzia} \\ \text{dipendono} \\ \text{dall'acceleraz.} \\ \text{assoluta}}} + \underbrace{c(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s)}_{\substack{\text{dipendono da spostamenti e} \\ \text{velocità relative al sostegno:} \\ \text{la forza elastica e l'energia} \\ \text{dissipata dipendono dalla de} \\ \text{formazione della struttura e} \\ \text{non dal suo moto assoluto}}} = 0 \quad (1.23)$$