

SCOPO dell'analisi dinamica strutturale è la determinazione delle tensioni e delle deformazioni in una struttura soggetta ad un carico dinamico.

Per dinamico si intende variabile nel tempo; perciò un carico dinamico è qualsiasi carico la cui intensità, direzione o posizione vari nel tempo. Analogamente, la risposta strutturale ad un carico dinamico, cioè le deformazioni e le tensioni risultanti, varia nel tempo e perciò è dinamica.

CARATTERISTICHE ESSENZIALI DI UN PROBLEMA DINAMICO

Se un carico è applicato staticamente su una struttura, le sollecitazioni e la deformata che ne derivano dipendono direttamente dal carico applicato e possono essere valutate dalle condizioni di equilibrio di forze.

Fig. 1.1

Viceversa, se un carico è applicato dinamicamente, gli spostamenti della struttura variano nel tempo e la struttura subisce delle accelerazioni. Tali accelerazioni danno luogo alle forze d'inerzia che si oppongono al moto della struttura. Cosicché, le sollecitazioni interne nella struttura devono equilibrare non solo il carico esterno direttamente applicato, ma anche le forze d'inerzia risultanti dall'accelerazione della struttura.

Le forze d'inerzia quindi sono la caratteristica più importante che distingue il problema dinamico. In generale, se le forze d'inerzia rappresentano una parte significativa del carico totale equilibrato dalle forze interne, allora occorre tener conto del carattere dinamico del problema. Se invece il moto è così lento che le forze d'inerzia sono trascurabili, l'analisi della risposta ad ogni istante può essere effettuata con i metodi della statica anche se il carico e quindi la risposta sono in realtà variabili nel tempo.

In un sistema dinamico, l'analisi è complicata dal fatto che le forze d'inerzia risultano dagli spostamenti strutturali che a loro volta sono influenzati dalla grandezza delle forze d'inerzia. Quindi il problema deve essere formulato in termini di equazioni differenziali.

Inoltre, poiché la massa della struttura è distribuita con continuità, gli spostamenti e le accelerazioni devono essere definiti per ciascun punto dell'asse strutturale per poter definire in modo completo le forze d'inerzia. In questo caso, l'analisi deve essere formulata in termini di equazioni differenziali parziali perché sia la posizione lungo l'asse che il tempo devono essere considerate variabili indipendenti.

Affrontare il problema nella sua generalità risulta quindi notevolmente complicato; è necessario perciò rappresentare la struttura con un modello quanto più possibile semplice, ma che rifletta tuttavia in modo adeguato le sue proprietà dinamiche.

Se, ad esempio, la massa di una struttura potesse essere concentrata in una serie finita di punti, il problema analitico sarebbe estremamente semplificato perché le forze d'inerzia potrebbero svilupparsi solo in questi punti: quindi sarebbe sufficiente determinare gli spostamenti ed accelerazioni solo di questi punti per descrivere compiutamente il moto di tutto il sistema.

Si definisce come numero di **GRADI DI LIBERTÀ DINAMICI** della struttura "g.d.l." (degrees of freedom "DOF") il numero di componenti di spostamento indipendenti che devono essere considerate per determinare la posizione nello spazio di tutte le masse del sistema in qualsiasi istante del suo movimento.

Esempio:

Fig. 1.2

Se la trave è vincolata in modo che le masse possano muoversi solo in verticale, allora il sistema è a 3 g.d.l. (3 DOF)

Se le masse non fossero concentrate in punti ma avessero anche inerzia rotazionale, allora anche la rotazione dei tre punti dovrebbe essere considerata ed il sistema sarebbe a 6 DOF.

Se le deformazioni assiali della trave fossero significative, allora occorrerebbe considerare anche gli spostamenti assiali dei punti ed il sistema risulterebbe a 9 DOF.

Più in generale, se la struttura potesse deformarsi nello spazio, ciascuna massa avrebbe 6 DOF e quindi la struttura globalmente 18 DOF.

Un sistema con massa distribuita ha un numero infinito di gradi di libertà.

La modellazione di una struttura come un sistema a masse concentrate è uno dei possibili metodi di discretizzazione di una struttura reale, che è adatto a modellare strutture in cui le masse sono per larga parte concentrate in porzioni limitate della struttura stessa: allora si possono considerare tutte le masse concentrate in tali porzioni ed il resto della struttura come privo di massa e che conserva però le caratteristiche di deformabilità.

Altri metodi sono quello degli spostamenti generalizzati e degli elementi finiti. Il secondo di questi combina aspetti delle due procedure precedenti ed attualmente è quello che meglio si presta per esprimere gli spostamenti di una qualsiasi configurazione strutturale per mezzo di un numero discreto di coordinate.

Nel seguito si studiano solo modelli a masse concentrate.

1. SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTA' SDOF

Fig. 1.3

Un sistema ad un grado di libertà (SDOF) - oscillatore semplice - può essere descritto mediante un modello matematico con le seguenti caratteristiche (v. fig. 1.3):

- 1) massa m : rappresenta le caratteristiche inerziali e di massa della struttura
- 2) molla k : rappresenta la forza elastica di richiamo e l'energia potenziale della struttura
- 3) smorzatore c : rappresenta le caratteristiche di attrito e le perdite di energia della struttura
- 4) forza di eccitazione $F(t)$: rappresenta le forze esterne che agiscono sul sistema nel tempo.

Nella fig. 1.4 sono riportati altri modelli di oscillatore semplice, rappresentativi di strutture elementari, in cui, rispetto al modello di fig. 1.3, la molla è sostituita da una struttura elastica

la cui rigidezza è pari al rapporto fra la forza necessaria a produrre un determinato spostamento e lo spostamento stesso.

Fig. 1.4

1.1 VIBRAZIONI LIBERE

1.1.1 SISTEMA NON SMORZATO

Schema di equilibrio:

sistema spostato dalla posizione
di equilibrio statico

equilibrio dinamico direzione y :

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

principio di d'Alembert dell'equilibrio dinamico: istante per istante la massa m è in equilibrio (in direzione y) sotto l'azione della forza d'inerzia, $m\ddot{y}$, e della forza di richiamo elastica, ky , entrambe dirette in senso opposto allo spostamento.

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad \text{equaz. del moto} \quad (1.1)$$

Risposta del sistema: descrizione del moto del sistema che ha subito uno spostamento dalla posizione di equilibrio statico.

Si ottiene risolvendo l'equazione del moto che è una equazione differenziale lineare del II ordine, omogenea, a coefficienti costanti.

Ci si aspettano soluzioni del tipo:

$$y = A \cos \omega t$$

$$y = B \sin \omega t$$

se entrambe sono soluzioni anche la loro somma è una soluzione:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Derivando e sostituendo nella (1.1):

$$\dot{y} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t$$

$$\underbrace{(-m\omega^2 + k)}_{\substack{=0 \\ \downarrow \\ \omega^2 = \frac{k}{m}}} \underbrace{(A \cos \omega t + B \sin \omega t)}_{\substack{=0 \\ \text{soluzione banale} \\ \text{corrisponde all'equi-} \\ \text{librio statico } y=0}} = 0$$

La soluzione generale è:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

Imponendo le condizioni iniziali:

$$y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

L'equazione del moto risulta:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1.3)$$

quindi la risposta è un moto armonico con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{pulsazione naturale del sistema}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{periodo proprio}$$

Si può anche scrivere:

$$y = C \cos(\omega t - \beta) \quad (1.3')$$

$$C = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}} \quad \text{ampiezza}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{y}_0 / \omega}{y_0} \quad \text{fase}$$

Fig. 1.5

1.1.2 SISTEMA SMORZATO

Al punto precedente si è visto che l'oscillatore semplice non smorzato, una volta spostato dalla posizione di equilibrio statico oscillerà indefinitamente con ampiezza costante alla sua frequenza naturale.

In realtà sistemi siffatti non esistono: sono sempre presenti forze d'attrito o di smorzamento a causa delle quali parte dell'energia meccanica, cinetica o potenziale, viene trasformata in altre forme di energia, ad es. calore.

Si ammette che queste forze siano proporzionali all'ampiezza della velocità e opposte alla direzione del moto.

Non sempre questa schematizzazione interpreta efficacemente le caratteristiche del sistema, però consente un'analisi matematica relativamente semplice.

equaz. del moto:
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (1.4)$$

soluzione del tipo:
$$y = Ce^{pt}$$

derivando e sostituendo nella (1.4) si ottiene:

$$\dot{y} = Cpe^{pt} \quad \ddot{y} = Cp^2e^{pt} \quad e^{pt}(mCp^2 + cCp + kC) = 0$$

$$mp^2 + cp + k = 0 \quad \text{equaz. caratteristica}$$

da cui:
$$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

per cui l'equazione del moto è:

$$y(t) = C_1e^{p_1t} + C_2e^{p_2t}$$

C_1 C_2 cost. d'integrazione, si ricavano dalle condizioni iniziali.

La forma finale dell'equazione dipende dal segno dell'espressione sotto radice nell'eq. (1.5). Si hanno tre casi: il primo caso è il caso limite in cui la quantità sotto radice è = 0: lo smorzamento presente in questo caso è detto "smorzamento critico".

1° caso: sistema con smorzamento critico

$$\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} \quad (1.6)$$

$$p_1 = p_2 = -\frac{c_{cr}}{2m}$$

Le due radici sono uguali perciò la soluzione generale potrebbe fornire solo una costante d'integrazione e quindi una sola soluzione indipendente.

Un'altra soluzione indipendente può essere trovata usando la funzione:

$$y_2(t) = C_2 t e^{-\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)t}$$

che soddisfa all'equazione differenziale. La soluzione generale del sistema criticamente smorzato è data dalla sovrapposizione delle due soluzioni:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)t} \quad \text{moto non periodico} \quad (1.7)$$

Fig. 1.6

2° caso: sistema ipersmorzato $c > c_{cr}$

L'espressione sotto radice è > 0

Il moto è non periodico come nel 1° caso ma il tempo per tornare alla posizione neutra è più lungo.

SMORZAMENTO CRITICO: per un dato sistema (m e k dati) è il più piccolo valore dello smorzamento per il quale non si hanno oscillazioni libere.

3° caso: sistema sottosmorzato $c < c_{cr}$

radici dell'equazione caratteristica complesse coniugate:

$$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (1.8)$$

soluzione generale del sistema sottosmorzato:

$$y(t) = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1 e^{i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}t} + C_2 e^{-i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}t} \right)$$

utilizzando le relazioni di Eulero:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$y(t) = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \left(\underbrace{A \cos \omega_D t}_{\substack{\text{parte reale} \\ A=C_1+C_2}} + \underbrace{B \sin \omega_D t}_{\substack{\text{parte immaginaria} \\ B=i(C_1-C_2)}} \right) \quad (1.9)$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad \text{frequenza smorzata del sistema}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}} < 1 \quad \text{rapporto di smorzamento del sistema}$$

$$y(t) = C e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad (1.9')$$

condizioni iniziali: $y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$

$$C = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + y_0 \xi \omega)^2}{\omega_D^2}} \quad \tan \alpha = \frac{\dot{y}_0 + y_0 \xi \omega}{\omega_D y_0}$$

Fig. 1.7 –
Risposta di un
sistema libero
sottosmorzato

Il moto è oscillatorio ma non periodico. L'ampiezza non è costante, ma le oscillazioni si verificano ad intervalli uguali di tempo:

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{periodo smorzato}$$

Per le strutture reali $0.02 < \frac{c}{c_{cr}} < 0.20$ circa, perciò al max $\omega_D \cong 0.98\omega$.

In pratica la frequenza naturale può essere considerata uguale alla frequenza naturale non smorzata.

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLA FREQUENZA PROPRIA E DELLO SMORZAMENTO: metodo delle oscillazioni libere

Si provoca una vibrazione libera e si registra il movimento oscillatorio.

Dal grafico che si ottiene, la distanza fra due picchi fornisce il periodo proprio, T_D , da cui si ricava ω_D .

La diminuzione dell'ampiezza del moto permette di valutare ξ .

Misurati y_1 e y_2 (valori di due picchi successivi) si calcola:

Fig. 1.8

$$\delta = \ln \frac{y_1}{y_2} \quad \text{decremento logaritmico}$$

Poiché è:

$$y_1 = Ce^{-\xi\omega t_1} \quad y_2 = Ce^{-\xi\omega(t_1+T_D)}$$

$$\delta = \ln \frac{y_1}{y_2} = \xi\omega T_D$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2\pi\xi$$

misurato sperimentalmente δ , si può valutare ξ :

$$\xi \cong \frac{\delta}{2\pi}$$