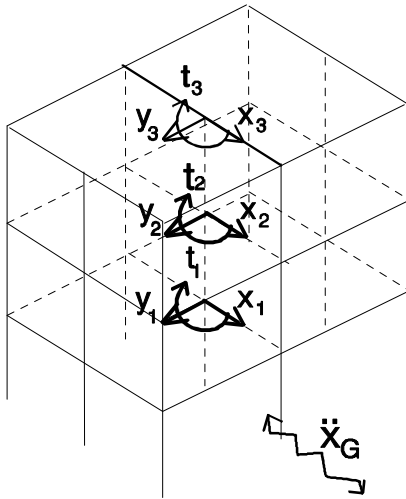


ESEMPIO 3

ANALISI SISMICA DI EDIFICIO PLURIPIANO



Edificio a telai in c.a.

Sisma direzione x

Ipotesi:

solai infinitamente rigidi nel proprio piano

masse concentrate a livello dei solai

pilastrì e travi infinitamente rigidi assialmente

rigidezza dei telai fuori del proprio piano trascurabile

Sotto queste ipotesi, i solai possono solo traslare rigidamente intorno ad un asse verticale.

I gradi di libertà si riducono a 9, 2 traslazioni orizzontali ed 1 rotazione per ciascun piano.

Il vettore delle coordinate risulta:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ t_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ t_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$

Si indicano con:

m_{ix}, m_{iy}, m_{it} rispettivamente: massa traslazionale in direzione x, y, massa rotazionale, del piano i-esimo

k_{ix}, k_{iy}, k_{it} rispettivamente: rigidezza traslazionale in direzione x, y, rigidezza rotazionale, delle strutture comprese fra il piano i-esimo ed il piano (i-1)-esimo.

ANALISI DINAMICA

Equazioni di equilibrio dinamico:

$$\begin{cases} m_{1x}\ddot{x}_1 + k_{1x}x_1 + k_{2x}(x_1 - x_2) = -m_{1x}\ddot{x}_G \\ m_{1y}\ddot{y}_1 + k_{1y}y_1 + k_{2y}(y_1 - y_2) = 0 \\ m_{1t}\ddot{t}_1 + k_{1t}t_1 + k_{2t}(t_1 - t_2) = 0 \\ m_{2x}\ddot{x}_2 + k_{2x}(x_2 - x_1) + k_{3x}(x_2 - x_3) = -m_{2x}\ddot{x}_G \\ m_{2y}\ddot{y}_2 + k_{2y}(y_2 - y_1) + k_{3y}(y_2 - y_3) = 0 \\ m_{2t}\ddot{t}_2 + k_{2t}(t_2 - t_1) + k_{3t}(t_2 - t_3) = 0 \\ m_{3x}\ddot{x}_3 + k_{3x}(x_3 - x_2) = -m_{3x}\ddot{x}_G \\ m_{3y}\ddot{y}_3 + k_{3y}(y_3 - y_2) = 0 \\ m_{3t}\ddot{t}_3 + k_{3t}(t_3 - t_2) = 0 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = -[m]\{T\}\ddot{x}_G \quad (1)$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistema omogeneo:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = 0 \quad (2)$$

soluzione del sistema omogeneo:

$$[\omega^2] \quad [u] = \begin{bmatrix} \{u^{(1)}\} & \{u^{(2)}\} & \dots & \dots & \{u^{(9)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1x}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & u_{1x}^{(9)} \\ u_{1y}^{(1)} & & & & u_{1y}^{(9)} \\ u_{1t}^{(1)} & & & & u_{1t}^{(9)} \\ u_{2x}^{(1)} & & & & u_{2x}^{(9)} \\ u_{2y}^{(1)} & & & & u_{2y}^{(9)} \\ u_{2t}^{(1)} & & & & u_{2t}^{(9)} \\ u_{3x}^{(1)} & & & & u_{3x}^{(9)} \\ u_{3y}^{(1)} & & & & u_{3y}^{(9)} \\ u_{3t}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & u_{3t}^{(9)} \end{bmatrix}$$

Il vettore delle coordinate del sistema ad ogni istante può essere visto come sovrapposizione dei modi normali; cioè combinazione lineare delle coordinate modali (che non dipendono dal tempo) per il vettore delle coordinate generalizzate (che dipendono dal tempo):

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\} \quad \{\ddot{q}(t)\} = [u]\{\ddot{\eta}(t)\} \quad (3)$$

$\{\eta(t)\}$ vettore delle coordinate generalizzate (ciascuna delle nove componenti è relativa ad un modo); ovvero:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u_{1x}^{(1)}\eta_1(t) + u_{1x}^{(2)}\eta_2(t) + \dots + u_{1x}^{(9)}\eta_9(t) \\ y_1(t) &= u_{1y}^{(1)}\eta_1(t) + u_{1y}^{(2)}\eta_2(t) + \dots + u_{1y}^{(9)}\eta_9(t) \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Si sostituiscono le (3) nel sistema (1):

$$[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [k][u]\{\eta(t)\} = -[m]\{T\}\ddot{x}_G$$

si premoltiplica per $[u]^T$:

$$[u]^T [m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [u]^T [k][u]\{\eta(t)\} = -[u]^T [m]\{T\}\ddot{x}_G \quad (5)$$

Poiché $[u]$ è la soluzione del sistema omogeneo (2), si ha:

$$[m][u][\omega^2] - [k][u] = 0$$

$$[u]^T [m][u][\omega^2] = [u]^T [k][u]$$

Sostituendo le precedenti nella (5) e premoltiplicando per $([u]^T [m][u])^{-1}$ si ha:

$$([u]^T [m][u])^{-1}([u]^T [m][u])\{\ddot{\eta}(t)\} + ([u]^T [m][u])^{-1}([u]^T [m][u])[\omega^2]\{\eta(t)\} = -([u]^T [m][u])^{-1}[u]^T [m]\{T\}\ddot{x}_G$$

ovvero:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = \left\{ \frac{L}{M} \right\} \ddot{x}_G \quad \text{in cui} \quad \left\{ \frac{L}{M} \right\} = ([u]^T [m][u])^{-1} [u]^T [m]\{T\} \quad (6)$$

$$[u]^T [m][u] = \begin{bmatrix} \{u^{(1)}\}^T \\ \{u^{(2)}\}^T \\ \dots \\ \{u^{(9)}\}^T \end{bmatrix} [m] \begin{bmatrix} \{u^{(1)}\} \\ \{u^{(2)}\} \\ \dots \\ \{u^{(9)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u^{(1)}\}^T [m] \\ \{u^{(2)}\}^T [m] \\ \dots \\ \{u^{(9)}\}^T [m] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u^{(1)}\} \\ \{u^{(2)}\} \\ \dots \\ \{u^{(9)}\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{u^{(1)}\}^T [m] \{u^{(1)}\} & \{u^{(1)}\}^T [m] \{u^{(2)}\} & \dots & \dots & \dots \\ \{u^{(2)}\}^T [m] \{u^{(1)}\} & \{u^{(2)}\}^T [m] \{u^{(2)}\} & \{u^{(2)}\}^T [m] \{u^{(3)}\} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (7)$$

Per le condizioni di ortogonalità:

$$\begin{aligned} \{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} &= 0 \quad \text{per } r \neq s \\ u_{1x}^{(r)} m_{1x} u_{1x}^{(s)} + u_{1y}^{(r)} m_{1y} u_{1y}^{(s)} + \dots + u_{3t}^{(r)} m_{3t} u_{3t}^{(s)} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

perciò la (7) è una matrice diagonale; ricordando che il termine i-esimo della inversa di una matrice data è uguale al rapporto fra il determinante della matrice complementare di detto termine per il determinante della matrice completa, l'inversa della matrice (7) è ancora una matrice diagonale i cui termini sono l'inverso dei termini della matrice (7).

$$([u]^T [m] [u])^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\{u^{(1)}\}^T [m] \{u^{(1)}\}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{\{u^{(2)}\}^T [m] \{u^{(2)}\}} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{\{u^{(9)}\}^T [m] \{u^{(9)}\}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{u^{(1)}\}^T [m] \{u^{(1)}\} &= \{u_1^{(1)} u_2^{(1)} \dots\} \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \dots \end{bmatrix} = \{u_1^{(1)} m_1 \quad u_2^{(1)} m_2 \dots\} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \dots \end{bmatrix} = \\ &= m_1 (u_1^{(1)})^2 + m_2 (u_2^{(1)})^2 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i (u_i^{(1)})^2 \end{aligned}$$

$$([u]^T [m][u])^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1)})^2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2)})^2} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(9)})^2} \end{bmatrix}$$

$$([u]^T [m][u])^{-1} [u]^T = \begin{bmatrix} \frac{u_{1x}^{(1)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1)})^2} & \frac{u_{1y}^{(1)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1)})^2} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{u_{1x}^{(2)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2)})^2} & \frac{u_{1y}^{(2)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2)})^2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \frac{u_{1x}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1x)})^2} & \frac{u_{1y}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1x)})^2} & \dots \\ \frac{u_{1x}^{(1y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1y)})^2} & \frac{u_{1y}^{(1y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1y)})^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{u_{3t}^{(3t)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(3t)})^2} & \dots \end{array} \right] [m] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \frac{m_{1x} u_{1x}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1x)})^2} & \frac{m_{1y} u_{1y}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1x)})^2} & \dots \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(1y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1y)})^2} & \frac{m_{1y} u_{1y}^{(1y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1y)})^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \frac{L}{M} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_{1x} u_{1x}^{(1x)} + m_{2x} u_{2x}^{(1x)} + m_{3x} u_{3x}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1x)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(1y)} + m_{2x} u_{2x}^{(1y)} + m_{3x} u_{3x}^{(1y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1y)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(1t)} + m_{2x} u_{2x}^{(1t)} + m_{3x} u_{3x}^{(1t)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1t)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(2x)} + m_{2x} u_{2x}^{(2x)} + m_{3x} u_{3x}^{(2x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2x)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(2y)} + m_{2x} u_{2x}^{(2y)} + m_{3x} u_{3x}^{(2y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2y)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(2t)} + m_{2x} u_{2x}^{(2t)} + m_{3x} u_{3x}^{(2t)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2t)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(3x)} + m_{2x} u_{2x}^{(3x)} + m_{3x} u_{3x}^{(3x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(3x)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(3y)} + m_{2x} u_{2x}^{(3y)} + m_{3x} u_{3x}^{(3y)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(3y)})^2} \\ \frac{m_{1x} u_{1x}^{(3t)} + m_{2x} u_{2x}^{(3t)} + m_{3x} u_{3x}^{(3t)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(3t)})^2} \end{array} \right\}$$

A questo punto si tratta di risolvere le nove equazioni disaccoppiate (6). Queste possono essere risolte nel dominio del tempo ricavando istante per istante l'andamento degli $\eta_i(t)$. Dopo di che, si possono ricavare le componenti di spostamento, di accelerazione, le forze e tutte le quantità che dipendono linearmente da queste utilizzando le relazioni (4) ed analoghe.

Se invece si opera con gli spettri di risposta, si ottengono per η i valori massimi, che allora è opportuno combinare con metodi di tipo statistico (v. in seguito).

ANALISI DINAMICA SEMPLIFICATA

In casi particolari l'analisi dinamica può essere semplificata.

In un edificio regolare i modi propri sono, con buona approssimazione, o di pura traslazione in una direzione o di pura rotazione. Perciò con buona approssimazione si può ritenere che, in ciascun modo, le componenti nelle direzioni diversa da quella principale del modo siano nulle:

$$\begin{array}{llll} u_{1y}^{(1x)} \cong 0 & u_{1t}^{(1x)} \cong 0 & \dots\dots\dots & u_{3t}^{(1x)} \cong 0 \\ u_{1x}^{(1y)} \cong 0 & u_{1t}^{(1y)} \cong 0 & \dots\dots\dots & u_{3t}^{(1y)} \cong 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & \end{array}$$

perciò, nel caso dell'esempio, risulta:

$$\left\{ \frac{L}{M} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{m_{1x}u_{1x}^{(1x)} + m_{2x}u_{2x}^{(1x)} + m_{3x}u_{3x}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(1x)})^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{m_{1x}u_{1x}^{(2x)} + m_{2x}u_{2x}^{(2x)} + m_{3x}u_{3x}^{(2x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(2x)})^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{m_{1x}u_{1x}^{(3x)} + m_{2x}u_{2x}^{(3x)} + m_{3x}u_{3x}^{(3x)}}{\sum_{i=1}^9 m_i (u_i^{(3x)})^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

ed il sistema si semplifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\eta}_{1x}(t) + \omega_{1x}^2 \eta_{1x}(t) = - \frac{m_{1x}u_{1x}^{(1x)} + m_{2x}u_{2x}^{(1x)} + m_{3x}u_{3x}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^3 m_i (u_i^{(1x)})^2} \ddot{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^3 m_{ix} u_{ix}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^3 m_{ix} (u_{ix}^{(1x)})^2} \ddot{x}_G \\ \ddot{\eta}_{2x}(t) + \omega_{2x}^2 \eta_{2x}(t) = - \frac{m_{1x}u_{1x}^{(2x)} + m_{2x}u_{2x}^{(2x)} + m_{3x}u_{3x}^{(2x)}}{\sum_{i=1}^3 m_i (u_i^{(2x)})^2} \ddot{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^3 m_{ix} u_{ix}^{(2x)}}{\sum_{i=1}^3 m_{ix} (u_{ix}^{(2x)})^2} \ddot{x}_G \\ \ddot{\eta}_{3x}(t) + \omega_{3x}^2 \eta_{3x}(t) = - \frac{m_{1x}u_{1x}^{(3x)} + m_{2x}u_{2x}^{(3x)} + m_{3x}u_{3x}^{(3x)}}{\sum_{i=1}^3 m_i (u_i^{(3x)})^2} \ddot{x}_G = \frac{\sum_{i=1}^3 m_{ix} u_{ix}^{(3x)}}{\sum_{i=1}^3 m_{ix} (u_{ix}^{(3x)})^2} \ddot{x}_G \end{array} \right. \quad (10)$$

le cui soluzioni sono, utilizzando lo spettro di risposta in termini di accelerazione:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\eta}_{1x,\max} &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_{ix} u_{ix}^{(1x)}}{\sum_{i=1}^3 m_{ix} (u_{ix}^{(1x)})^2} S_a(\tau_1, \xi_1) \\
 \ddot{\eta}_{2x,\max} &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_{ix} u_{ix}^{(2x)}}{\sum_{i=1}^3 m_{ix} (u_{ix}^{(2x)})^2} S_a(\tau_2, \xi_2) \\
 \ddot{\eta}_{3x,\max} &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_{ix} u_{ix}^{(3x)}}{\sum_{i=1}^3 m_{ix} (u_{ix}^{(3x)})^2} S_a(\tau_3, \xi_3)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Le forze ai piani possono essere ricavate come somma dei quadrati dei contributi forniti da ciascun modo (v. 2.70):

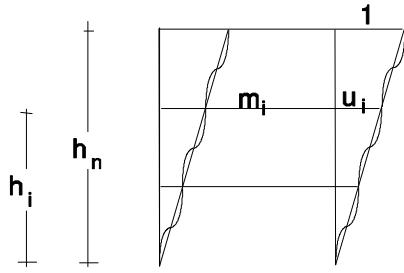
$$\begin{aligned}
 f_{1,\max} &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (m_{ix} u_{ix}^{(1x)} \ddot{\eta}_{ix,\max})^2} \\
 f_{2,\max} &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (m_{ix} u_{ix}^{(2x)} \ddot{\eta}_{ix,\max})^2} \\
 f_{3,\max} &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (m_{ix} u_{ix}^{(3x)} \ddot{\eta}_{ix,\max})^2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Se è lecito tener conto solo del primo modo di vibrare, nelle (9) rimane solo il primo termine e delle (10) solo la prima equazione. Le (12) risultano così semplificate:

$$\begin{aligned}
 f_{1,\max} &= m_{1x} u_{1x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1x,\max} \\
 f_{2,\max} &= m_{2x} u_{2x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1x,\max} \\
 f_{3,\max} &= m_{3x} u_{3x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1x,\max}
 \end{aligned} \tag{13}$$

ANALISI STATICA

Supponiamo di considerare solo la prima forma modale e che questa sia lineare con l'altezza (ciò è abbastanza ben approssimato per edifici a telai molto regolari in pianta ed in altezza); allora



$$\frac{1}{h_n} = \frac{u_i}{h_i}$$

$$u_i = \frac{h_i}{h_n}$$

$$\ddot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta_1(t) = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3}{\sum_{i=1}^3 m_i (u_i)^2} \ddot{x}_G = h_n \cdot \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3}{m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_3 h_3^2} \ddot{x}_G = h_n \cdot \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} \ddot{x}_G$$

$$\ddot{\eta}_{1,\max} = h_n \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a$$

$$\ddot{x}_{i,\max} = u_i \ddot{\eta}_{1,\max} = \frac{h_i}{h_n} \cdot h_n \cdot \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a = h_i \cdot \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a$$

Le forze di piano si ottengono dalle (13):

$$\begin{aligned} f_{1,\max} &= m_1 \frac{h_1}{h_n} h_n \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a = m_1 h_1 \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a \\ f_{2,\max} &= m_2 \frac{h_2}{h_n} h_n \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a = m_2 h_2 \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a \\ f_{3,\max} &= m_3 \frac{h_3}{h_n} h_n \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a = m_3 h_3 \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i h_i^2} S_a \end{aligned} \quad (14)$$

ANALISI STATICA SECONDO LA NORMATIVA

Per edifici molto regolari, sia in pianta che in elevazione, l'analisi sismica può essere condotta per via statica applicando ad ogni piano dell'edificio forze orizzontali valutate attraverso le seguenti formule:

$$F_i = K_{hi} W_i$$

in cui W_i sono i pesi di ciascun piano e K_{hi} coefficienti così definiti:

$$K_{hi} = C \cdot R \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot \gamma_i \cdot I$$

$C, R, \varepsilon, \beta, I$ sono coefficienti che definiscono lo spettro di progetto in termini di accelerazione rapportata all'accelerazione di gravità, in funzione del livello di sismicità della zona (C), della forma dello spettro di risposta (R), delle caratteristiche del terreno (ε), della duttilità della struttura (β) e del livello di protezione legato all'importanza strategica dell'opera (I). Si può quindi definire:

$$S_a = C \cdot R \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot I$$

γ_i è il coefficiente che definisce la distribuzione delle forze ai vari piani:

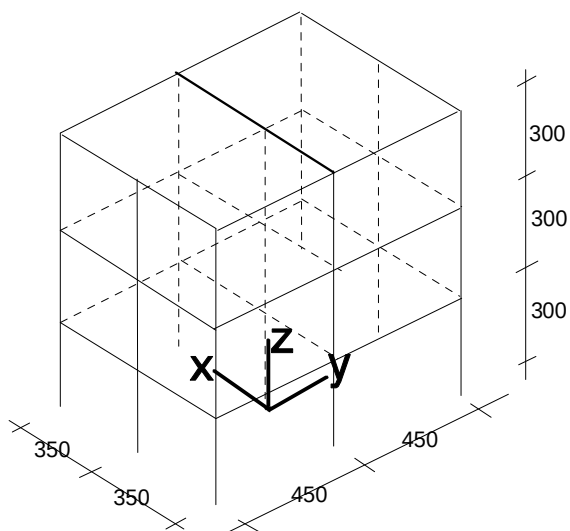
$$\gamma_i = h_i \frac{\sum_{j=1}^N W_j}{\sum_{j=1}^N W_j h_j}$$

in definitiva:

$$F_i = W_i h_i \frac{\sum_{j=1}^N W_j}{\sum_{j=1}^N W_j h_j} S_a$$

che risultano simili alle (14) e forniscono valori in eccesso rispetto a queste.

APPLICAZIONE NUMERICA



dimensioni elementi strutturali:

pilastri: cm 25 x 30 (lato di 30 cm parallelo ad x)

travi direz. x: h = 40 cm b = 25 cm

travi direz. y: h = 25 cm b = 25 cm

carico totale sui solai: 600 kg/mq

Analisi condotta con SAP90

unità di misura: kgf cm sec

si utilizza l'opzione di piano rigido: i nodi master coincidono con i baricentri dei tre orizzontamenti; tali nodi sono liberi e ad essi sono applicate le masse; gli altri nodi (dependent) hanno gli spostamenti in direzione x ed y e la rotazione intorno a z impediti (v. blocco dati RESTRAINTS) in quanto questi vengono valutati in base agli spostamenti dei nodi master tramite le relazioni del piano rigido.

valutazione elementi per il file di input:

masse m_x m_y :

primo e secondo orizzontamento:

solaio	$600E-04 \times 700 \times 900 / 981 =$	38,53 [kgf sec ² /cm]
pilastrì	$25 \times 30 \times 300 \times 2500E-06 \times 9 / 981 =$	5,16
travi // y	$25 \times 25 \times 900 \times 2500E-06 \times 2 / 981 =$	2,87
travi // x	$25 \times 40 \times 700 \times 2500E-06 \times 3 / 981 =$	5,35
totale		51,91

terzo orizzontamento:

solaio	$600E-04 \times 700 \times 900 / 981 =$	38,53 [kgf sec ² /cm]
pilastrì	$25 \times 30 \times 150 \times 2500E-06 \times 9 / 981 =$	2,58
travi // y	$25 \times 25 \times 900 \times 2500E-06 \times 2 / 981 =$	2,87
travi // x	$25 \times 40 \times 700 \times 2500E-06 \times 3 / 981 =$	5,35
totale		49,33

momenti delle masse m_t :

primo e secondo orizzontamento:

$600E-04 \times (700^3 \times 900/12 + 700 \times 900^3/12) / 981 =$	4174312 [kgf cm sec ²]
$25 \times 30 \times 300 \times 2500E-06 \times [4 \times (350^2 + 450^2) + 2 \times 350^2 + 2 \times 450^2] / 981 =$	1118119
$25 \times 25 \times 900 \times 2500E-06 \times 2 \times 350^2 / 981 =$	351204
$25 \times 40 \times 700 \times 2500E-06 \times 2 \times 450^2 / 981 =$	722477
totale	6366112

terzo orizzontamento:

$600E-04 \times (700^3 \times 900/12 + 700 \times 900^3/12) / 981 =$	4174312 [kgf cm sec ²]
$25 \times 30 \times 150 \times 2500E-06 \times [4 \times (350^2 + 450^2) + 2 \times 350^2 + 2 \times 450^2] / 981 =$	559059
$25 \times 25 \times 900 \times 2500E-06 \times 2 \times 350^2 / 981 =$	351204
$25 \times 40 \times 700 \times 2500E-06 \times 2 \times 450^2 / 981 =$	722477
totale	5807053

I file di input K3 e K9 sono listati nel seguito: i file sono identici salvo che K3 richiede la valutazione dei primi tre modi di vibrare, K9 ne richiede nove.

I file di output contengono:

K*.EIG: i risultati dell'analisi dinamica: periodi propri, fattori per determinare il taglio alla base, le masse modali partecipanti al moto (v. 3.17);

K*.SOL: le forme dei modi propri (normalizzate secondo la (2.14));

K*.SPC: i risultati dell'analisi sismica con spettro di risposta in termini di reazioni alla base determinate con la combinazione quadratica;

K*.F3F: le sollecitazioni negli elementi.

Nel seguito sono riportati solo i primi tre file di output per entrambe le versioni.

SINTESI ED ANALISI DEI RISULTATI

Nota: nel seguito, per abbreviare i calcoli, si sono operate alcune lievi approssimazioni; pertanto i risultati non coincidono perfettamente con quelli forniti dal programma.

forme modali (ricavato da K9.SOL)

$$[u] = \begin{bmatrix} 0 & 0.0411 & 0 & 0 & 0.0989 & 0 & 0.0882 & 0 & 0 \\ 0.0298 & 0 & 0 & -0.0864 & 0 & 0 & 0 & -0.1044 & 0 \\ 0 & 0 & .1116E-3 & 0 & 0 & .2728E-3 & 0 & 0 & .2650E-3 \\ 0 & 0.0826 & 0 & 0 & 0.0530 & 0 & -0.0981 & 0 & 0 \\ 0.0774 & 0 & 0 & -0.0769 & 0 & 0 & 0 & 0.0857 & 0 \\ 0 & 0 & .2375E-3 & 0 & 0 & .1657E-3 & 0 & 0 & -.2706E-3 \\ 0 & 0.1063 & 0 & 0 & -0.0837 & 0 & 0.0442 & 0 & 0 \\ 0.1141 & 0 & 0 & 0.0786 & 0 & 0 & 0 & -0.0324 & 0 \\ 0 & 0 & .3110E-3 & 0 & 0 & -.2460E-3 & 0 & 0 & .1224E-3 \end{bmatrix}$$

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} 7.81^2 & & & & & & & & \\ & 11.45^2 & & & & & & & \\ & & 14.92^2 & & & & & & \\ & & & 28.13^2 & & & & & \\ & & & & 33.83^2 & & & & \\ & & & & & 45.40^2 & & & \\ & & & & & & 52.48^2 & & \\ & & & & & & & 56.97^2 & \\ & & & & & & & & 74.05^2 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 51.91 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & 51.91 & 0 & & & & & & \\ & 0 & 6366112 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 51.91 & 0 & & & & \\ & & & 0 & 51.91 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 6366112 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 49.33 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 49.33 & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 5807053 \end{bmatrix}$$

calcolo coefficienti di partecipazione (v. 9)

$$g_{1x} = \frac{51.91 \cdot 0.0411 + 51.91 \cdot 0.0826 + 49.33 \cdot 0.1063}{51.91 \cdot 0.0411^2 + 51.91 \cdot 0.0826^2 + 49.33 \cdot 0.1063^2} = 11.673$$

$$g_{2x} = \frac{51.91 \cdot 0.0989 + 51.91 \cdot 0.0530 + 49.33 \cdot (-0.0837)}{51.91 \cdot 0.0989^2 + 51.91 \cdot 0.0530^2 + 49.33 \cdot 0.0837^2} = 3.759$$

$$g_{3x} = \frac{51.91 \cdot 0.0882 + 51.91 \cdot (-0.0981) + 49.33 \cdot 0.0442}{51.91 \cdot 0.0882^2 + 51.91 \cdot 0.0981^2 + 49.33 \cdot 0.0442^2} = 1.667$$

ANALISI CON SPETTRO DI RISPOSTA:

$R = 1$ per $T \leq 0.8$ sec

zona sismica II categoria: $C = \frac{S-2}{100} = 0.07$ $\varepsilon = \beta = I = 1$

$S_a = 1 * 0.07 * g = 68.67$

$$\ddot{\eta}_{1x\max} = 11.673 \cdot 68.67 = 801.585 \quad [\text{cm/sec}^2]$$

$$\ddot{\eta}_{2x\max} = 3.759 \cdot 68.67 = 258.130 \quad "$$

$$\ddot{\eta}_{3x\max} = 1.667 \cdot 68.67 = 114.473 \quad "$$

Calcolo delle forze di piano: si valutano dapprima i contributi dei vari modi che poi si sommano con la combinazione quadratica.

$$f_{1,\max}^{(1x)} = m_{1x} u_{1x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1,\max} = 1710 \quad [\text{kg}]$$

$$f_{1,\max}^{(2x)} = m_{2x} u_{1x}^{(2x)} \ddot{\eta}_{2,\max} = 1325$$

$$f_{1,\max}^{(3x)} = m_{3x} u_{1x}^{(3x)} \ddot{\eta}_{3,\max} = 498$$

$$f_{2,\max}^{(1x)} = m_{1x} u_{2x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1,\max} = 3437$$

$$f_{2,\max}^{(2x)} = m_{2x} u_{2x}^{(2x)} \ddot{\eta}_{2,\max} = 710$$

$$f_{2,\max}^{(3x)} = m_{3x} u_{2x}^{(3x)} \ddot{\eta}_{3,\max} = -554$$

$$f_{3,\max}^{(1x)} = m_{1x} u_{3x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1,\max} = 4423$$

$$f_{3,\max}^{(2x)} = m_{2x} u_{3x}^{(2x)} \ddot{\eta}_{2,\max} = -1121$$

$$f_{3,\max}^{(3x)} = m_{3x} u_{3x}^{(3x)} \ddot{\eta}_{3,\max} = 249$$

$$f_{1,\max} = \sqrt{1710^2 + 1325^2 + 498^2} = 2220 \quad [\text{kg}]$$

$$f_{2,\max} = \sqrt{3437^2 + 710^2 + 554^2} = 3553$$

$$f_{3,\max} = \sqrt{4423^2 + 1121^2 + 249^2} = 4570$$

Calcolo del taglio massimo alla base (v. 2.72): si valutano i contributi dei vari modi e si combinano (cfr. file K9.SPC pag. 5):

$$Y_{0,\max}^{(1x)} = \frac{L_{1x}^2}{M_{1x}} = 11.673^2 \cdot 68.67 = 9357 \quad [\text{kg}]$$

$$Y_{0,\max}^{(2x)} = 3.759^2 \cdot 68.67 = 970$$

$$Y_{0,\max}^{(3x)} = 1.667^2 \cdot 68.67 = 191$$

$$Y_{0,\max} = \sqrt{9357^2 + 970^2 + 191^2} = 9409 \quad [\text{kg}]$$

Da notare che il max taglio alla base non può essere ottenuto semplicemente sommando le max forze ai piani perché queste non sono concorrenti.

Si valuta il contributo fornito dai modi considerati al taglio totale (cfr. file K9.EIG pag. 4)

Si ricorda che la (2.66) è valida solo per strutture con masse concentrate lungo un asse verticale; la struttura in esame è in realtà assimilabile a queste perché, date le condizioni di simmetria, i modi di vibrare sono puri per cui la sollecitazione in direzione x comporta oscillazioni solo in quella direzione e non vengono quindi chiamate in causa le altre masse, traslazionali in direzione y e rotazionali.

$$\frac{\sum_{n=1}^9 \frac{L_n^2}{M_n}}{M_T} = \frac{(51.91 \cdot 0.0411 + 51.91 \cdot 0.0826 + 49.33 \cdot 0.1063)^2}{51.91 \cdot 0.0411^2 + 51.91 \cdot 0.0826^2 + 49.33 \cdot 0.1063^2} + \frac{(51.91 \cdot 0.0989 + 51.91 \cdot 0.0530 + 49.33 \cdot (-0.0837))^2}{51.91 \cdot 0.0989^2 + 51.91 \cdot 0.0530^2 + 49.33 \cdot 0.0837^2} + \frac{(51.91 \cdot 0.0882 + 51.91 \cdot (-0.0981) + 49.33 \cdot 0.0442)^2}{51.91 \cdot 0.0882^2 + 51.91 \cdot 0.0981^2 + 49.33 \cdot 0.0442^2} = 100\%$$

Considerando solo i primi tre modi di vibrare (1x, 1y, 1t), ovvero, nel nostro caso, solo il primo modo nella direzione x in cui agisce il sisma, si ha:

$$f_{1,\max} = m_{1x} u_{1x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1,\max} = 1710 \quad [\text{kg}]$$

$$f_{2,\max} = m_{1x} u_{2x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1,\max} = 3437$$

$$f_{3,\max} = m_{1x} u_{3x}^{(1x)} \ddot{\eta}_{1,\max} = 4423$$

$$Y_{0,\max} = 11.673^2 \cdot 68.67 = 9357 \quad [\text{kg}] \quad (\text{cfr. file K3.SPC pag. 5})$$

$$\frac{\sum_{n=1}^9 \frac{L_n^2}{M_n}}{M_T} = \frac{(51.91 \cdot 0.0411 + 51.91 \cdot 0.0826 + 49.33 \cdot 0.1063)^2}{51.91 \cdot 0.0411^2 + 51.91 \cdot 0.0826^2 + 49.33 \cdot 0.1063^2} = 88.96\%$$

(cfr. K3.EIG pag. 4)

Per la normativa italiana, che prescrive (§ B.6) di tener conto di un numero di modi di vibrazione sufficiente ad assicurare l'eccitazione di più dell'85% della massa totale, è sufficiente quindi tener conto dei primi tre modi di vibrare, il che equivale ad eseguire l'analisi dinamica semplificata tenendo conto solo del primo modo in direzione dell'azione sismica.

Per l'Eurocodice 8 a rigore non sarebbe possibile (minimo 90%).

ANALISI STATICA

$$\frac{\sum_{j=1}^N W_j}{\sum_{j=1}^N W_j h_j} = \frac{981 \cdot (51.91 + 51.91 + 49.33)}{981 \cdot (51.91 \cdot 300 + 51.91 \cdot 600 + 49.33 \cdot 900)} = 1.681 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_1 = 300 \cdot 1.681 \cdot 10^{-3} = 0.504$$

$$\gamma_2 = 600 \cdot 1.681 \cdot 10^{-3} = 1.008$$

$$\gamma_3 = 900 \cdot 1.681 \cdot 10^{-3} = 1.513$$

$$F_{1x} = 0.07 \cdot 0.504 \cdot 51.91 \cdot 981 = 1796 \quad [\text{kg}]$$

$$F_{2x} = 0.07 \cdot 1.008 \cdot 51.91 \cdot 981 = 3595$$

$$F_{3x} = 0.07 \cdot 1.513 \cdot 49.33 \cdot 981 = 5125$$