ESEMPIO 2

ANALISI DINAMICA DI IMPALCATO SOSTENUTO DA PIEDRITTI VERTICALI

Ipotesi:

1. impalcato infinitamente rigido nel proprio piano; ovvero, la rigidezza del solaio nel suo piano è molto grande rispetto alla rigidezza laterale del pilastri
2. deformabilità assiale dei pilastri trascurabile
3. telai dotati di rigidezza solo nel proprio piano
4. massa concentrata a livello dell'impalcato, piedritti privi di massa

Dalle prime due ipotesi discende che il solaio può solo traslare e ruotare rigidamente nel proprio piano.

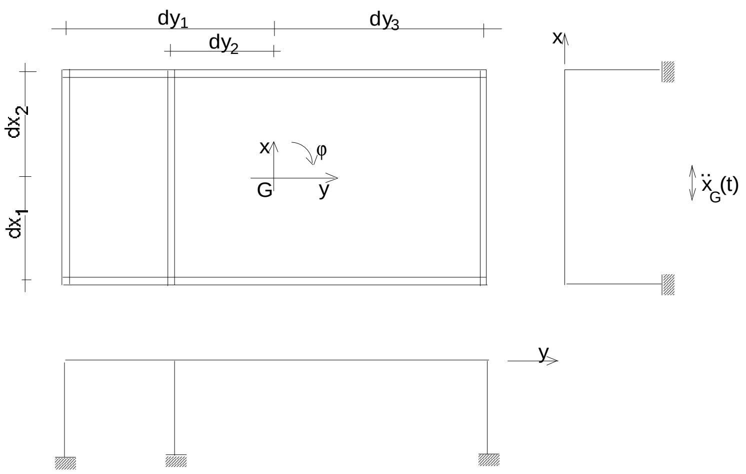
Pertanto sono sufficienti tre parametri per definire univocamente la configurazione del sistema: il sistema è perciò a tre gradi di libertà.

coordinate del sistema: x, y traslazioni orizzontali, φ rotazione, del baricentro G dell'impalcato

m = densità di massa (costante)

M = massa totale

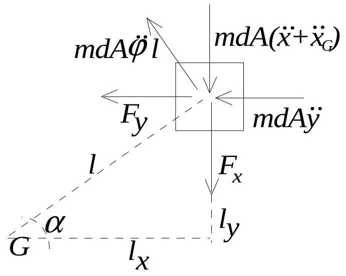
G = baricentro delle masse



Il sistema strutturale spaziale può pensarsi costituito dall'insieme di telai piani orditi secondo x e secondo y; in generale si avranno *s* telai orditi in direzione x di rigidezza laterale K_X e *t* telai orditi in direzione y di rigidezza laterale K_Y. In genere, è lecito trascurare la rigidezza dei telai fuori del loro piano e la rigidezza torsionale dei pilastri, in quanto molto piccole rispetto al contributo fornito dalla rigidezza laterale dei telai piani.

Per risolvere il problema si devono scrivere tre equazioni di equilibrio dinamico: equilibrio alla traslazione in direzione x, in direzione y e equilibrio alla rotazione intorno all'asse verticale per G.

Se si trascura lo smorzamento, per la massa elementare, dM = m·dA, le forze in gioco sono: le forze d'inerzia - provocate dalle tre componenti di accelerazione - e le forze elastiche.



Nell'equilibrio alla traslazione in direzione x, figurano:

- le forze d'inerzia legate all'accelerazione assoluta in direzione x:

$$\int_A m(\ddot{x}+\ddot{x}_G)dA = m(\ddot{x}+\ddot{x}_G)\int_A dA = M(\ddot{x}+\ddot{x}_G)$$

$\ddot{x}$ è la stessa per tutte le masse elementari, per l'ipotesi di piano rigido

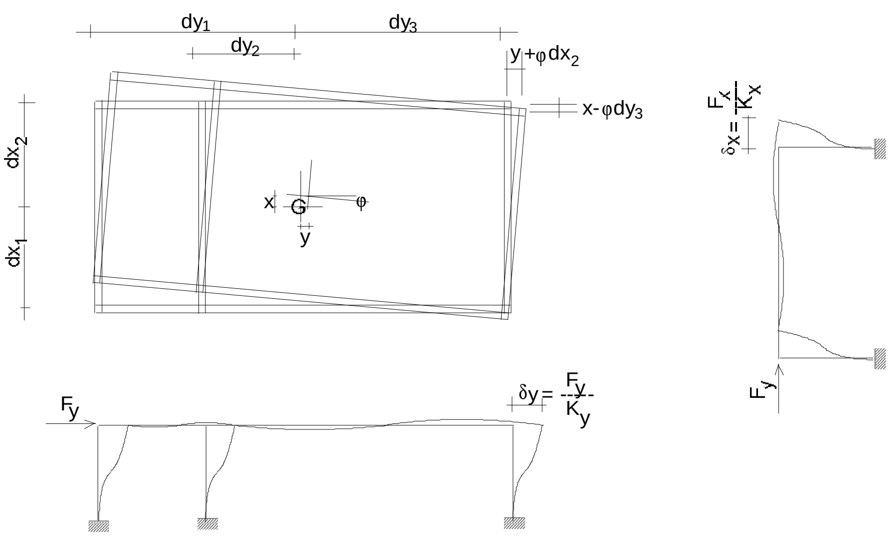
- le componenti in direzione x delle forze d'inerzia legate all'accelerazione angolare:

$$\int_A mdA\ddot{\varphi}l\cos\alpha = m\ddot{\varphi}\int_A l_y dA = 0$$

$\int_A l_y dA = 0$ momento statico rispetto all'asse x

- le forze elastiche in direzione x, somma delle forze di richiamo elastiche esercitate da ciascun telaio ordito secondo x; la forza esercitata da ciascun telaio è proporzionale alla rigidezza traslazionale K_{xi} ed allo spostamento in direzione x del telaio stesso:

$$F_{x_i} = K_{x_i}\left(x - \varphi d_{y_i}\right)$$



L'equazione di equilibrio dinamico è:

$$M\left(\ddot{x}+\ddot{x}_G\right)+\sum_{i=1}^{s} K_{x_i}\left(x-\varphi d_{y_i}\right)=0$$

In analogia alla precedente, si scrive l'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione y:

$$M\ddot{y}+\sum_{i=1}^{t} K_{y_i}\left(y+\varphi d_{x_i}\right)=0$$

Nell'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a G il momento delle forze d'inerzia può scriversi:

$$\int_A mdA\left(\ddot{x}+\ddot{x}_G\right)\cdot l_y-\int_A mdA\ddot{y}\cdot l_x+\int_A mdA\ddot{\varphi}l^2=\int_A mdA\ddot{\varphi}l^2=\ddot{\varphi}J_G=M\rho^2\ddot{\varphi}$$

L'equazione risulta:

$$M\rho^2\ddot{\varphi}-\sum_{i=1}^{s} K_{x_i}\left(x-\varphi d_{y_i}\right)d_{y_i}+\sum_{i=1}^{t} K_{y_i}\left(y+\varphi d_{x_i}\right)d_{x_i}=0$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} M\ddot{x}+x\cdot\sum_{i=1}^{s} K_{x_i}-\varphi\cdot\sum_{i=1}^{s} K_{x_i}d_{y_i}=-M\ddot{x}_G \\ M\ddot{y}+y\cdot\sum_{i=1}^{t} K_{y_i}+\varphi\cdot\sum_{i=1}^{t} K_{y_i}d_{x_i}=0 \\ M\rho^2\ddot{\varphi}-x\cdot\sum_{i=1}^{s} K_{x_i}d_{y_i}+y\cdot\sum_{i=1}^{t} K_{y_i}d_{x_i}+\varphi\left(\sum_{i=1}^{s} K_{x_i}d_{y_i}^2+\sum_{i=1}^{t} K_{y_i}d_{x_i}^2\right)=0 \end{cases}$$

è un sistema di equazioni differenziali del II ordine nelle incognite x, y, φ.

Tramite l'analisi modale è possibile disaccoppiare le equazioni e risolverle separatamente utilizzando i risultati noti per l'oscillatore semplice.