

2. SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTA' MDOF

Un sistema con un numero finito n di gradi di libertà può essere schematizzato come in figura.

Applicando la II legge di Newton alla massa m_i si può scrivere l'equazione differenziale del moto:

$$Q_i(t) + c_{i+1}[\dot{q}_{i+1}(t) - \dot{q}_i(t)] + k_{i+1}[q_{i+1}(t) - q_i(t)] - c_i[\dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i-1}(t)] - k_i[q_i(t) - q_{i-1}(t)] = m_i \ddot{q}_i(t) \quad (2.1)$$

$$m_i \ddot{q}_i(t) - c_{i+1} \dot{q}_{i+1}(t) + (c_i + c_{i+1}) \dot{q}_i(t) - c_i \dot{q}_{i-1}(t) - k_{i+1} q_{i+1}(t) + (k_i + k_{i+1}) q_i(t) - k_i q_{i-1}(t) = Q_i(t) \quad (2.2)$$

Le (2.2) costituiscono un sistema di n equazioni in n incognite. In generale le n equazioni non sono disaccoppiate.

Ponendo:

$$m_{ij} = \delta_{ij} m_i \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases} \quad \delta \text{ di Kronecker}$$

$c_{ij} = 0$	$k_{ij} = 0$	$j = 1, 2, \dots, i-2, i+2, \dots, n$
$c_{ij} = -c_{i+1}$	$k_{ij} = -k_{i+1}$	$j = i+1$
$c_{ij} = c_i + c_{i+1}$	$k_{ij} = k_i + k_{i+1}$	$j = i$
$c_{ij} = -c_i$	$k_{ij} = -k_i$	$j = i-1$

il sistema può essere scritto:

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{q}_j(t) + c_{ij} \dot{q}_j(t) + k_{ij} q_j(t)] = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

oppure, in forma matriciale:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.4)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & m_i & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle masse o d'inerzia}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -c_i & c_i + c_{i+1} & -c_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{matrice di smorzamento}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -k_i & k_i + k_{i+1} & -k_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{matrice di rigidezza}$$

$$[m] = [m]^T$$

Tutte e tre sono matrici simmetriche perciò

$$[c] = [c]^T$$

$$[k] = [k]^T$$

In generale non sono diagonali. Conviene fare una trasformazione in modo che lo diventino, cosicché le equazioni del sistema risultino disaccoppiate e possano essere risolte ciascuna per proprio conto ed a ciascuna si possano applicare i risultati relativi al sistema SDOF.

2.1 OSCILLAZIONI LIBERE DI UN SISTEMA MDOF NON SMORZATO

Nell'equazione del moto (2.4) è $\{Q(t)\} = 0$

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

- il sistema è omogeneo, perciò se $q_1(t), \dots, q_n(t)$ rappresentano una soluzione, allora anche $\alpha q_1(t), \dots, \alpha q_n(t)$ sono una soluzione (α cost. arbitraria). La soluzione può quindi essere ottenuta a meno di una costante.
- si cerca una particolare soluzione, in cui le coordinate $q_1(t), \dots, q_n(t)$ eseguono lo stesso moto nel tempo $\Rightarrow$ moto sincrono. Poiché in questo caso tutte le $q_i(t)$ dipendono dal tempo allo stesso modo, allora i rapporti $\frac{q_i(t)}{q_j(t)}$ sono indipendenti dal tempo. Perciò la configurazione del sistema non cambia nel tempo, cambia solo l'ampiezza.

Si può esprimere:

$$q_j(t) = u_j f(t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

u_j costanti

Sostituendo nella (2.6) ($f(t)$ non dipende da j):

$$\ddot{f}(t) \sum_{j=1}^n m_{ij} u_j + f(t) \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} \text{ non dipende da } i, \quad \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j} \text{ non dipende da } t; \text{ perciò:}$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j} = \text{costante} = \lambda$$

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \lambda m_{ij}) u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

Consideriamo una soluzione del tipo:

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \ddot{f}(t) = -A \omega^2 \sin \omega t$$

Sostituendo nella (2.9):

$$-\omega^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \omega^2$$

Sostituendo nelle equazioni (2.10):

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$[k]\{u\} = \omega^2 [m]\{u\} \quad (2.11)$$

sistema omogeneo di n equazioni in n incognite in cui ω^2 è un parametro.

Ammette soluzioni, diverse da quella banale, solo se il determinante dei coefficienti è = 0:
problema di autovalori.

La soluzione banale rappresenta la configurazione di equilibrio statico.

$$\Delta(\omega^2) = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0 \quad (2.12)$$

equazione di ordine $n \Rightarrow$ possiede n radici, in generale distinte: $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$.

$\omega_1, \dots, \omega_n$ frequenze naturali del sistema

La minore frequenza, ω_1 , è detta "prima frequenza naturale" o "frequenza fondamentale".

Da ciò che precede si deduce che esistono n frequenze ω_r in cui è possibile un moto armonico.

Associato a ciascuna frequenza ω_r , esiste un vettore $\{u^{(r)}\}$ non nullo, i cui elementi $u_i^{(r)}$ sono numeri reali, e che rappresenta una soluzione del problema agli autovalori:

$$[k]\{u^{(r)}\} = \omega_r^2 [m]\{u^{(r)}\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

$\{u^{(r)}\} \Rightarrow$ autovettori o vettori modali

fisicamente rappresentano le forme modali o modi naturali

Se il vettore $\{u^{(r)}\}$ è una soluzione, allora anche $\alpha_r \{u^{(r)}\}$ lo è, perciò la forma modale è unica ma non l'ampiezza.

Se si assegna un valore ad uno degli elementi dell'autovettore, tutti gli altri risultano determinati, per il fatto che sono costanti i rapporti fra gli elementi.

Normalizzazione: procedimento per cui si fissa l'ampiezza di un autovettore. Il vettore risultante rappresenta il modo normale.

Si può, ad esempio, normalizzare ponendo il maggiore degli elementi = 1.

Una normalizzazione conveniente è quella per cui risulta:

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(r)}\} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

e per la quale è anche:

$$\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(r)}\} = \omega_r^2 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

Infine, le equazioni del moto hanno la soluzione:

$$\{q^{(r)}(t)\} = C_r \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

C_r e ϕ_r , costanti, ampiezza e angolo di fase; dipendono dalle condizioni iniziali.

Poiché per un sistema lineare la soluzione generale è la somma delle singole soluzioni, la soluzione generale del sistema (2.5) è:

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \{q^{(r)}(t)\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad (2.17)$$

CONDIZIONI DI ORTOGONALITA' DEI VETTORI MODALI

I modi naturali possiedono una proprietà detta "ortogonalità" rispetto alla matrice d'inerzia e alla matrice di rigidezza.

Non è una ortogonalità ordinaria fra vettori ($\{u\}^T \cdot \{v\} = 0$) ma lo è rispetto alla matrice d'inerzia (o anche di rigidezza).

Siano:

$$\begin{aligned} \omega_r^2 & \quad \{u^{(r)}\} \\ \omega_s^2 & \quad \{u^{(s)}\} \end{aligned}$$

due distinte soluzioni del problema agli autovalori.

$$\begin{aligned} [k]\{u^{(r)}\} &= \omega_r^2 [m]\{u^{(r)}\} \quad \text{premultiplicando x } \{u^{(s)}\}^T \Rightarrow \\ \{u^{(s)}\}^T [k]\{u^{(r)}\} &= \omega_r^2 \{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} [k]\{u^{(s)}\} &= \omega_s^2 [m]\{u^{(s)}\} \quad \text{premultiplicando x } \{u^{(r)}\}^T \Rightarrow \\ \{u^{(r)}\}^T [k]\{u^{(s)}\} &= \omega_s^2 \{u^{(r)}\}^T [m]\{u^{(s)}\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si ricorda:

$$[m] \text{ e } [k] \text{ sono simmetriche perciò } [m]^T = [m] \quad [k]^T = [k]$$

$$\text{se } \{c\} = \{a\}\{b\} \Rightarrow \{c\}^T = \{b\}^T \{a\}^T$$

Si traspone la (2.19), si sottrae la (2.19) trasposta dalla (2.18); si ottiene:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} = 0 \quad (2.20)$$

Poiché in generale $\omega_r \neq \omega_s$, si ha la condizione di ortogonalità:

$$\{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} = 0 \quad r \neq s \quad (2.21)$$

inserendo nella (2.18) si ha anche:

$$\{u^{(s)}\}^T [k]\{u^{(r)}\} = 0 \quad r \neq s \quad (2.22)$$

Se i modi sono normalizzati secondo la:

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(r)}\} = 1 \quad (2.14)$$

allora la CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ si può scrivere sinteticamente:

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} = \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

δ_{rs} δ di Kronecker

ANALISI MODALE

I vettori modali possono essere raccolti nella **matrice modale**:

$$[u] = [\{u^{(1)}\} \{u^{(2)}\} \dots \{u^{(n)}\}]$$

così le n soluzioni del problema agli autovalori (2.13) possono essere scritte nella forma compatta:

$$[k][u] = [m][u][\omega^2] \quad (2.24)$$

$[\omega^2]$ è la matrice diagonale dei quadrati delle frequenze naturali.

$[u]$ rappresenta perciò la matrice di trasformazione per disaccoppiare le equazioni del sistema (grazie alla proprietà di ortogonalità).

Per modi normalizzati secondo la (2.14):

$$[u]^T [m][u] = [1] \quad [u]^T [k][u] = [\omega^2] \quad (2.25)$$

Si dimostra che gli autovettori $\{u^{(r)}\}$ formano un sistema linearmente indipendente (si dimostra per assurdo, in quanto verrebbe meno la condizione di ortogonalità). Ciò comporta che ogni vettore ad n dimensioni, e perciò ogni possibile, ma d'altronde arbitraria, configurazione del sistema può essere costruita come combinazione lineare degli autovettori.

$$\{u\} = c_1 \{u^{(1)}\} + c_2 \{u^{(2)}\} + \dots + c_n \{u^{(n)}\} \neq 0 \quad (2.26)$$

Fisicamente ciò significa che qualsiasi possibile movimento del sistema, conseguenza di una arbitraria eccitazione, può essere considerato, ad un certo istante, come la sovrapposizione

dei modi naturali moltiplicati per costanti appropriate, in cui tali costanti misurano il grado di partecipazione di ciascun modo.

La rappresentazione del moto attraverso i modi normali permette la trasformazione di un sistema di equazioni differenziali del moto simultanee in un sistema di equazioni indipendenti, in cui la matrice di trasformazione è la matrice modale $[u]$.

Questo procedimento va sotto il nome di analisi modale.

Considerando la combinazione lineare e la condizione di ortogonalità $\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} = \delta_{rs}$,

i coefficienti c_r possono essere ricavati scrivendo (si premoltiplicano ambo i membri dell'equaz. (2.26) per $\{u^{(r)}\}^T [m]$):

$$c_r = \{u^{(r)}\}^T [m] \{u\} \quad (2.27)$$

Ciascun coefficiente c_r misura il contributo del modo associato $\{u^{(r)}\}$ al moto $\{u\}$.

La (2.26) e la (2.27) costituiscono il TEOREMA DI ESPANSIONE.

Le frequenze naturali ω_r , insieme ai modi naturali associati $\{u^{(r)}\}$, rappresentano una unica caratteristica del sistema. I loro valori dipendono unicamente dalle matrici $[m]$ e $[k]$.

In seguito si mostra che ciascun insieme $\omega_r, \{u^{(r)}\}$ può essere eccitato indipendentemente dagli altri. Ad esempio, se il sistema è eccitato da una forzante armonica di frequenza ω_r , allora la configurazione del sistema sarà simile al modo $\{u^{(r)}\}$. D'altronde, se al sistema viene imposta una eccitazione iniziale simile al modo naturale $\{u^{(r)}\}$, allora il moto che ne deriverà sarà una oscillazione armonica sincrona con frequenza naturale ω_r .

2.2 RISPOSTA DEI SISTEMI AD UNA ECCITAZIONE INIZIALE

Equazione del moto libero di un sistema non smorzato:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.5)$$

Ad un tempo $t=t_1$ qualsiasi, la soluzione dell'equazione (2.5) è $\{q(t_1)\}$.

Per l'equazione (2.26), $\{q(t_1)\}$ può essere vista come sovrapposizione dei modi normali.

Chiamando i coefficienti c_r per questa particolare configurazione $\eta_r(t_1)$ ($r = 1, 2, \dots, n$):

$$\{q(t_1)\} = \eta_1(t_1)\{u^{(1)}\} + \eta_2(t_1)\{u^{(2)}\} + \dots + \eta_n(t_1)\{u^{(n)}\} \quad (2.28)$$

dove, per la (2.27):

$$\eta_r(t_1) = \{u^{(r)}\}^T [m]\{q(t_1)\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

Poiché t_1 è arbitrario, le equazioni (2.29) valgono per qualsiasi t .

Perciò

$$\eta_r(t) = \{u^{(r)}\}^T [m]\{q(t)\} \quad (2.30)$$

sono dei coefficienti espressi come combinazioni lineari delle coordinate generalizzate $q_i(t)$

e quindi funzioni del tempo.

Di conseguenza si può scrivere:

$$\begin{aligned} \{q(t)\} &= \eta_1(t)\{u^{(1)}\} + \eta_2(t)\{u^{(2)}\} + \dots + \eta_n(t)\{u^{(n)}\} = \\ &= \sum_{r=1}^n \eta_r(t)\{u^{(r)}\} = [u]\{\eta(t)\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

dove $[u]$ è la matrice modale e $\{\eta(t)\}$ è il vettore delle funzioni $\eta_r(t)$.

L'equazione (2.31) è una trasformazione lineare fra i vettori $\{q(t)\}$ e $\{\eta(t)\}$ dove la matrice di trasformazione $[u]$ è costante.

Derivando si ha:

$$\{\ddot{q}(t)\} = [u]\{\ddot{\eta}(t)\} \quad (2.32)$$

inserendo nella (2.5) e premoltiplicando per $[u]^T$:

$$\begin{aligned} \underbrace{[u]^T [m] [u]}_{=1} \{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[u]^T [k] [u]}_{=[\omega^2]} \{\eta(t)\} &= \{0\} \\ \{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2] \{\eta(t)\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

che è un sistema di equazioni indipendenti in cui le variabili $\eta_r(t)$ sono chiamate coordinate normali del sistema.

Ciascuna di queste equazioni: $\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = 0$ può essere interpretata come l'equazione del moto di un sistema SDOF non smorzato, per cui ammette le stesse soluzioni ricavate per quel sistema:

$$\eta_r(t) = C_r \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

Inserendo queste soluzioni nella trasformazione (2.31) si ha:

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \{u^{(r)}\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad (2.35)$$

cosicché la vibrazione libera di un sistema MDOF consiste nella sovrapposizione di n moti armonici con frequenze uguali alle frequenze naturali del sistema, e con ampiezze e fasi dipendenti dalle condizioni iniziali.

Se $\{q(0)\} = \{q_0\}$ e $\{\dot{q}(0)\} = \{\dot{q}_0\}$ si ha:

$$\begin{aligned} \{q_0\} &= \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} \cos \phi_r \\ \{\dot{q}_0\} &= \sum_{r=1}^n C_r \omega_r \{u^{(r)}\} \sin \phi_r \end{aligned} \quad (2.36)$$

Premoltiplicando per $\{u^{(s)}\}^T [m]$ e considerando le condizioni di ortogonalità:

$$\left. \begin{aligned} C_r \cos \phi_r &= \{u^{(r)}\}^T [m] \{q_0\} \\ C_r \sin \phi_r &= \frac{1}{\omega_r} \{u^{(r)}\}^T [m] \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \right\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.37)$$

Sostituendo si ha l'espressione generale:

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \left(\{u^{(r)}\}^T [m] \{q_0\} \cos \omega_r t + \{u^{(r)}\}^T [m] \{\dot{q}_0\} \frac{1}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \{u^{(r)}\} \quad (2.38)$$

Supponiamo che il vettore dello spostamento iniziale sia simile ad un certo modo normale $\{u^{(s)}\}$ ed il vettore velocità iniziale sia 0. Sostituendo:

$\{q_0\} = q_0 \{u^{(s)}\}$ e $\{\dot{q}_0\} = \{0\}$ nell'equazione generale, si ottiene la risposta:

$$\begin{aligned} \{q(t)\} &= \sum_{r=1}^n \left(q_0 \{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} \cos \omega_r t \right) \{u^{(r)}\} \\ &= \sum_{r=1}^n q_0 \delta_{rs} \{u^{(r)}\} \cos \omega_r t = q_0 \{u^{(s)}\} \cos \omega_s t \end{aligned} \quad (2.39)$$

che rappresenta una oscillazione armonica sincrona alla frequenza naturale ω_s , con la configurazione del sistema che a ciascun istante è simile al modo s -esimo. Ciò che dimostra come ciascun modo naturale può essere eccitato indipendentemente dagli altri, imponendo

una deformata iniziale simile ad una forma modale e lasciando quindi il sistema libero di vibrare.

2.3 RISPOSTA DEI SISTEMI LINEARI AD UNA ECCITAZIONE GENERICA

2.3.1 SISTEMI NON SMORZATI

L'equazione del moto (2.4) diventa:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.40)$$

Per ottenere la soluzione tramite l'analisi modale, occorre prima risolvere il problema di autovalori associato con le matrici $[m]$ e $[k]$. La soluzione può essere scritta in forma generale:

$$[m][u]\omega^2 = [k][u] \quad (2.41)$$

Poi si considera la trasformazione lineare:

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\} \quad (2.42)$$

poiché $[u]$ è una matrice di costanti, si ha anche:

$$\{\ddot{q}(t)\} = [u]\{\ddot{\eta}(t)\} \quad (2.43)$$

Sostituendo nella (2.40), premoltiplicando per $[u]^T$ e ponendo

$$[u]^T [m][u] = [M] \quad \text{MASSA GENERALIZZATA}$$

$$[u]^T [k][u] = [K] = \omega^2 [M] \quad \text{RIGIDEZZA GENERALIZZATA}$$

si ha:

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \{N(t)\} \quad (2.44)$$

dove:

$$\{N(t)\} = [u]^T \{Q(t)\} \quad (2.45)$$

è un vettore ad n dimensioni di forze generalizzate associate al vettore di coordinate generalizzate $\{\eta(t)\}$.

Le (2.44) rappresentano un sistema di n equazioni indipendenti della forma:

$$M_r \ddot{\eta}_r(t) + K_r \eta_r(t) = N_r(t) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.46)$$

dove $\{\eta_r(t)\}$ sono le coordinate normali del sistema con lo stesso significato che si è visto per la risposta del sistema all'eccitazione iniziale e $N_r(t)$ sono le forze generalizzate associate.

Le equazioni (2.46) hanno la stessa struttura dell'equazione differenziale del moto di un sistema SDOF con massa M_r , frequenza naturale ω_r e forza eccitante $N_r(t)$.

Quindi le soluzioni del sistema possono essere trovate con gli stessi metodi visti per il sistema SDOF.

In particolare, se la forza eccitante $N_r(t)$ è armonica di frequenza ω_r , la risposta $\{\eta_r(t)\}$ risulta notevolmente amplificata (nel caso teorico di assenza di smorzamento si ha la risonanza). Perciò nella (2.31) il termine $\{\eta_r(t)\}\{u^{(r)}\}$ prevale nettamente sugli altri cosicché $q(t)$ risulta molto simile ad $\{u^{(r)}\}$. Anche per questa via è perciò possibile eccitare un solo modo proprio indipendentemente dagli altri.

La determinazione sperimentale delle caratteristiche dinamiche delle strutture MDOF (frequenze e modi propri di vibrare) viene effettuata utilizzando le proprietà descritte qui sopra ed alla fine del punto precedente.

In sintesi:

Oscillazioni libere: si impone alla struttura una deformata statica e si rilascia liberamente, si registra la frequenza di oscillazione che rappresenta la frequenza propria del modo, la cui forma è uguale alla deformata statica impressa inizialmente.

Oscillazioni forzate: si impone alla struttura un carico sinusoidale a frequenza variabile con continuità; si registra la frequenza per la quale si hanno notevoli amplificazioni della risposta ed in corrispondenza si rileva la forma del modo di vibrare.

2.3.2 SISTEMI SMORZATI

La risposta di un sistema ad n gradi di libertà genericamente smorzato rappresenta un problema molto più difficile; questo perché solo in determinati casi è possibile disaccoppiare le equazioni con il metodo dell'analisi modale. Qui ci si limita ad analizzare questi casi.

Le equazioni differenziali del moto di un sistema ad n gradi di libertà con smorzamento viscoso possono essere scritte in forma matriciale:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.4)$$

dove $[c]$ è la matrice di smorzamento, simmetrica di ordine $n \times n$.

Usando la trasformazione (2.42), la (2.4) si può anche scrivere nella forma (per modi normalizzati secondo la (2.14):

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [C]\{\dot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = \{N(t)\} \quad (2.47)$$

dove

$$[C] = [u]^T [c] [u] \quad (2.48)$$

è una matrice simmetrica $n \times n$, generalmente non diagonale. Perciò, in generale, l'analisi modale classica non conduce ad un sistema di equazioni differenziali del moto indipendenti.

Nel caso particolare in cui $[c]$ è una combinazione lineare delle matrici $[m]$ e $[k]$, cioè:

$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$ con α e β costanti, la matrice $[C]$ diventa diagonale:

$$[C] = [u]^T [c] [u] = \alpha[u]^T [m] [u] + \beta[u]^T [k] [u] = \alpha[1] + \beta[\omega^2] \quad \text{per le (2.25)}$$

ed il sistema risulta indipendente.

Introducendo la notazione $[C] = [2\xi\omega]$, il sistema di n equazioni indipendenti può essere scritto:

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi\omega_r \dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = N_r(t) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.49)$$

il cui studio può essere ricondotto a quello dei sistemi SDOF.

In tale situazione si ha anche:

$$\xi_r = \frac{c_r}{c_{cr_r}} = \frac{\alpha m_r + \beta k_r}{2 m_r \omega_r} = \frac{\alpha}{2 \omega_r} + \frac{\beta \omega_r}{2}$$

Se $[c]$ è proporzionale semplicemente a $[k]$ cioè $\alpha=0$, il rapporto di smorzamento $[\zeta]$ è direttamente proporzionale ad $[\omega]$: i modi superiori risultano perciò tanto più smorzati quanto più sono lontani dal primo. Se invece $[c]$ è proporzionale semplicemente a $[m]$ cioè $\beta=0$, il rapporto di smorzamento $[\zeta]$ è inversamente proporzionale ad $[\omega]$: i modi superiori risultano in tal caso meno smorzati dei primi.

Le osservazioni sperimentali indicano come più realistica la prima ipotesi. In effetti, eccitando con una forza pulsante una struttura e incrementando via via la frequenza della eccitatrice, si nota che le amplificazioni della risonanza sono sempre meno accentuate in corrispondenza dei modi successivi al primo, fino talvolta a perderle del tutto. I modi superiori sono cioè talmente smorzati che anche in condizioni di risonanza non portano un contributo apprezzabile alla risposta complessiva. Per questo motivo l'analisi modale si arresta di solito ai primi modi trascurando del tutto i modi superiori al terzo o al quarto.

Ci sono altri casi, ma rari, in cui la matrice $[C]$ diventa diagonale. Un caso che si presenta di frequente è invece quello in cui lo smorzamento è molto piccolo. In questi casi l'accoppiamento delle equazioni dovuto ai termini fuori diagonale della matrice $[C]$ può essere considerato come un effetto del secondo ordine e trascurando questi termini si ottengono soluzioni accettabilmente approssimate.

2.4 RISPOSTA DEI SISTEMI LINEARI ALL'ECCITAZIONE SISMICA

Nel caso in cui la struttura MDOF sia soggetta ad un'azione alla base, nota ad esempio come andamento dell'accelerazione del terreno nel tempo $\ddot{x}_G(t)$, le equazioni del moto (2.4) possono essere scritte:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = -[m]\{T\}\ddot{x}_G(t) \quad (2.50)$$

Il vettore $\{T\}$, VETTORE DI TRASCINAMENTO, è composto da tutti "1" e "0", a seconda che l'azione sismica spira o meno nella direzione della componente di moto considerata.

Con le stesse modalità ed alle stesse condizioni esposte ai punti precedenti (in particolare se le condizioni di ortogonalità possono applicarsi anche alla matrice di smorzamento), al sistema (2.50) può essere applicata l'analisi modale.

Si perviene ad n equazioni disaccoppiate, ciascuna per ciascun modo, aventi la forma:

$$\{u_i\}^T [m] \{u_i\} \ddot{\eta}_i(t) + \{u_i\}^T [c] \{u_i\} \dot{\eta}_i(t) + \{u_i\}^T [k] \{u_i\} \eta_i(t) = -\{u_i\}^T [m] \{T\} \ddot{x}_G(t)$$

$$M_i \ddot{\eta}_i(t) + C_i \dot{\eta}_i(t) + K_i \eta_i(t) = L_i \ddot{x}_G(t) \quad (2.51)$$

in cui	$M_i = \{u_i\}^T [m] \{u_i\}$	sono rispettivamente massa,
	$C_i = \{u_i\}^T [c] \{u_i\} = 2\xi_i \omega_i M_i$	smorzamento, rigidità e
	$K_i = \{u_i\}^T [k] \{u_i\} = \omega_i^2 M_i$	carico generalizzati associati
	$P_i(t) = L_i \ddot{x}_G(t) = -\{u_i\}^T [m] \{T\} \ddot{x}_G(t)$	al modo i .

Le (2.51) possono scriversi:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = -g_i \ddot{x}_G(t) \quad (2.52)$$

in cui:

$$g_i = \frac{\{u_i\}^T [m] \{T\}}{\{u_i\}^T [m] \{u_i\}} = -\frac{L_i}{M_i} \quad \text{COEFFICIENTE DI PARTECIPAZIONE DEL MODO } i\text{-ESIMO}$$

e possono essere risolte, ciascuna indipendentemente, con i metodi noti per i sistemi SDOF.

2.4.1 ANALISI DELLA RISPOSTA NEL TEMPO (TIME HISTORY)

Le (2.51) hanno la stessa forma dell'equazione del sistema SDOF soggetto all'accelerazione sismica:

$$M_i \ddot{\eta}_i(t) + C_i \dot{\eta}_i(t) + K_i \eta_i(t) = L_i \ddot{x}_G(t)$$

e possono essere risolte con l'integrale di Duhamel ponendo $F(t) = L_i \ddot{x}_G(t)$.

La risposta risulta (v. (1.54), (1.55):

$$\eta_i(t) = \frac{L_i}{M_i \omega_i} V_i(t) \quad V_i(t) = \int_0^t \ddot{x}_G(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Una volta risolte le (2.51), cioè conosciuto l'andamento nel tempo delle coordinate η_i , è possibile valutare, istante per istante, gli spostamenti, velocità ed accelerazioni della struttura, sommando i contributi di ciascun modo: per gli spostamenti, ad esempio:

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\} = [u]\left\{\frac{L}{M\omega} V(t)\right\} \quad (2.53)$$

ovvero:
$$q_r(t) = \sum_{i=1}^n u_r^{(i)} \cdot \frac{L_i}{M_i \omega_i} V_i(t) \quad (2.53')$$

Di qui appare che quanto più grande risulta g_i tanto più grande è la partecipazione del modo i -esimo al moto del sistema; ciò che giustifica il nome del coefficiente g_i .

E' da notare che, per la maggior parte dei carichi, i contributi dei vari modi sono maggiori per le frequenze più basse e tendono a diminuire per le frequenze più alte. Di conseguenza, spesso non è necessario includere tutti i modi di vibrare nella sovrapposizione modale e si può troncare la somma quando è stato raggiunto un sufficiente grado di approssimazione; tanto più in quanto la modellazione matematica di un sistema strutturale complesso è in genere meno affidabile per la valutazione dei modi di vibrare più alti.

Le forze elastiche associate con gli spostamenti possono essere valutate direttamente premoltiplicando per la matrice delle rigidezze:

$$\{f(t)\} = [k]\{q(t)\} = [k][u]\{\eta(t)\}$$

Più spesso, si esprimono queste forze in termini di forze d'inerzia. La relazione che si usa è quella del problema agli autovalori (vibrazioni libere non smorzate) $[k][u] = [m][u][\omega^2]$, ma

il risultato è di validità generale:

$$\{f(t)\} = [m][u][\omega^2]\{\eta(t)\} = [m][u]\left\{\frac{L_i}{M_i} \omega_i V_i(t)\right\} \quad (2.54)$$

Le forze sopra definite possono vedersi come somma dei contributi forniti da ciascun modo:

$$\{f(t)\} = \left\{\sum_{i=1}^n f_i(t)\right\} \quad (2.55)$$

in cui il vettore delle forze elastiche associate a ciascun modo risulta:

$$\{f_i(t)\} = [m]\{u_i\} \frac{L_i}{M_i} \omega_i V_i(t) \quad (2.56)$$

Quando la distribuzione delle forze elastiche ad ogni istante t durante il terremoto è stata determinata, allora il valore di qualsiasi forza risultante o sollecitazione allo stesso istante t può essere calcolato con i metodi statici.

2.4.2 ANALISI CON SPETTRO DI RISPOSTA

L'analisi delle (2.52) nel tempo (time history) comporta la valutazione degli integrali di Duhamel per ciascun modo significativo e per ciascun istante. Comporta quindi un onere computazionale notevole.

Per ridurre l'onere dei calcoli, spesso, ai fini della progettazione, si ricorre alla soluzione tramite gli spettri di risposta, in genere in termini di accelerazione (v. (1.50)).

Per ciascun modo di vibrare della struttura, la risposta massima può essere ottenuta direttamente dallo spettro di risposta come descritto per i sistemi SDOF.

Per esempio:

$$\ddot{q}_{i,\max} = \frac{L_i}{M_i} \cdot S_a(T_i, \xi_i) \quad (2.67)$$

dove $S_a(T_i, \xi_i)$ è l'accelerazione spettrale per l' i -esimo modo (funzione del periodo e del coefficiente di smorzamento corrispondenti); pertanto, se i valori max dei contributi di tutti i modi si verificano nello stesso istante, la risposta massima in termini di accelerazione (assoluta) risulta:

$$\ddot{q}_{r,\max} = \sum_{i=1}^n \left| u_r^{(i)} \frac{L_i}{M_i} S_a(T_i, \xi_i) \right| \quad (2.68)$$

e la forza massima:

$$f_{r,\max} = \sum_{i=1}^n \left| (f_{r,i})_{\max} \right| \quad (2.69)$$

Poiché è abbastanza improbabile che i valori massimi si verifichino contemporaneamente e tutti con lo stesso segno (se i modi di vibrare hanno frequenze abbastanza diverse fra loro sono in generale sfasati), è più opportuno determinare la risposta massima attraverso combinazioni probabilistiche. Il metodo più diffuso è quello della combinazione mediante

radice della somma dei quadrati (SRSS); la massima accelerazione totale è approssimata da:

$$\ddot{q}_{r,\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[u_r^{(i)} \frac{L_i}{M_i} S_a(T_i, \xi_i) \right]^2} \quad (2.70)$$

Con lo stesso criterio si possono calcolare tutte le grandezze che dipendono linearmente da q . Così le forze d'inerzia

$$f_{r,\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_{ri,\max})^2} \quad (2.71)$$

ed il taglio alla base:

$$Y_{0,\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_{0,i})_{\max}^2} \quad (2.72)$$

in cui (v. 2.70)

$$(Y_{0,i})_{\max} = \frac{L_i^2}{M_i} S_a(T_i, \xi_i) \quad (2.73)$$

Si noti che il massimo valore del taglio alla base non è semplicemente la somma delle massime forze ai piani perché queste non sono concorrenti.