LEZIONE VI

Il quadrivettore Energia - quantità di moto.

Nella lezione precedente abbiamo visto che l'energia totale posseduta da un corpo di massa a riposo m_0 che viaggia con velocità $\boldsymbol{v}$ è pari a

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

D'altra parte, sappiamo anche che la quantità di moto relativistica è pari a :

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Utilizzando le relazioni (1) e (2), si verifica immediatamente che, qualunque sia la velocità $\boldsymbol{v}$ della particella, E e $\boldsymbol{p}$ soddisfano la relazione:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2 c^4 \tag{3}$$

La relazione (3) resta valida in qualunque riferimento inerziale. In particolare, nel riferimento inerziale solidale con il corpo al tempo t, sappiamo che $\boldsymbol{p} = 0$ mentre l'energia E in eq.(1) si riduce all'energia a riposo $E = m_0 c^2$, in accordo con quanto si ottiene ponendo $p = 0$ in eq.(3). Se si sceglie un qualunque altro riferimento inerziale dove la velocità del corpo è $\boldsymbol{v}$, la (3) resta ancora valida. Ricordando che p in eq.(3) rappresenta il modulo del vettore quantità di moto, la (3) può essere anche scritta nella forma equivalente:

$$E^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 = m_0^2 c^4 \tag{4}$$

dove p_x, p_y e p_z sono le componenti x,y e z del vettore quantità di moto. Ma l'equazione (3) è analoga all'equazione di invarianza relativistica che avevamo trovato per il vettore spostamento quadridimensionale $(\Delta\tau,\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ per il quale valeva la relazione generale:

$$\Delta\tau^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=\Delta\tau_0^2 \tag{5}$$

Dove, $\Delta\tau$ è l'intervallo di tempo misurato in metri-luce, Δx, Δy e Δz sono le componenti dello spostamento e $\Delta\tau_0$ è l'intervallo di tempo proprio misurato nel riferimento dove il corpo è fermo. Analogamente, E in eq.(4) rappresenta l'energia totale del corpo , p_x, p_y e p_z rappresentano le componenti della quantità di moto e $m_0^2c^4$ è il quadrato dell'energia a riposo $E_0 = m_0c^2$ del corpo, cioè l'energia del corpo nel riferimento in cui esso è fermo. La (4) stabilisce che, nel passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, i valori di E, p_x, p_y e p_z cambiano ma la combinazione in eq.(4) resta sempre costante. Ora, in eq.(4) compaiono l'energia E della particella e le componenti della quantità di moto che hanno dimensioni fisiche diverse (l'energia è una massa per una velocità al quadrato, mentre la q.m. è una massa per una velocità). Dunque, conviene dividere l'energia per c in modo da ottenere una grandezza che ha le stesse dimensioni fisiche della quantità di moto. Dopodichè si può definire il ***quadrivettore Energia-quantità di moto***

$$\boldsymbol{P} = (E/c,\, p_x,p_y,p_z) \tag{6}$$

La relazione (4) ci assicura che $\boldsymbol{P}$ rappresenta proprio un quadrivettore perchè il modulo quadridimensionale di $\boldsymbol{P}$ risulta invariante in qualunque riferimento inerziale proprio come il modulo quadridimensionale del quadrivettore $(\Delta\tau,\Delta x,\Delta y,\Delta z)$. Infatti, la (4) si può scrivere nella forma equivalente:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \tag{7}$$

che è formalmente identica alla relazione (5) che definisce il quadrivettore spostamento se si sostituisce $\Delta\tau$ con E/c, Δx con p_x e così via. Si noti che E/c gioca lo stesso ruolo della variabile temporale τ mentre p_x, p_y, e p_z quello delle coordinate spaziali x,y,z. Per quanto detto nelle lezioni precedenti, ogni volta che le 4 componenti di una grandezza quadridimensionale soddisfano una relazione di invarianza del tipo in eq.(7), allora tale grandezza rappresenta un quadrivettore relativistico che gode di tutte le proprietà caratteristiche di un quadrivettore. In particolare, se E/c, p_x,p_y e p_z rappresentano i valori delle componenti del quadrivettore in un riferimento inerziale S, allora le componenti in un altro sistema inerziale S' in moto con velocità v_T rispetto a S si possono ottenere utilizzando le relazioni di Lorentz dove E/c sostituisce il tempo τ(espresso in metri-luce), p_x sostituisce x, p_y sostituisce y, p_z sostituisce z e dove v_T è sostituito dalla velocità adimensionale $\beta = v_T/c$. Dunque le nuove componenti del quadrivettore ***P*** nel sistema S' sono legate a quelle in S dalle relazioni:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\frac{E}{c}\right) \tag{8}$$

$$p'_y = p_y \tag{9}$$

$$p'_z = p_z \tag{10}$$

$$\frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p_x\right) \tag{11}$$

La correttezza delle relazioni (8)-(11) può anche essere dimostrata utilizzando le definizioni di energia e quantità di moto in equazioni (1) e (2) e tenendo conto che la velocità si trasforma da un riferimento inerziale ad un altro secondo le relazioni trovate nella lezione III.

L'energia si conserva sempre.

Le equazioni (8)-(11) sono molto importanti perchè esse mettono in luce il fatto che l'energia e la quantità di moto sono strettamente collegate l'una all'altra. Infatti, dalla (8) si deduce che la quantità di moto misurata nel sistema S' dipende dal valore dell'energia misurato in un diverso sistema S. Analogamente, l'energia misurata in S' dipende dal valore della quantità di moto in S [vedi eq.(11)]. Questo ha una conseguenza molto importante: *la conservazione della quantitità di moto implica necessariamente che si debba anche conservare l'energia*. Infatti, supponiamo per assurdo che, in un dato riferimento S, valga la conservazione della quantità di moto ma non la conservazione dell'energia. Allora vorrebbe dire che nel sistema di riferimento S, valgono le due relazioni:

$$p_{xi} = p_{xf} \qquad \text{e } E_i \neq E_f. \tag{12}$$

dove i suffissi i ed f indicano "iniziale" e " finale". Ma allora, la componente x della quantità di moto non si conserverebbe più in S'. Infatti, utilizzando la (8), si trova

$$p'_{xf} - p'_{xi} = \gamma\beta\,(E_i - E_f)/c \neq 0$$

Dunque, se la conservazione della quantità di moto deve valere in ogni sistema di riferimento inerziale, come richiesto dal PRINCIPIO DI RELATIVITA', allora tutte le componenti del quadrivettore energia-quantità di moto e, in particolare l'energia, si devono conservare. Noi avevamo raggiunto la stessa conclusione analizzando il caso particolare di un urto totalmente anelastico, ma l'analisi fatta sopra mostra che questo è un risultato del tutto generale e strettamente legato al fatto che energia e quantità di moto fanno parte di un unica entità fisica, il quadrivettore energia-quantità di moto. Utilizzando la (3) si trova un' espressione che lega l'energia di un corpo alla quantità di moto:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{13}$$

Questa espressione alternativa alla (1) risulta spesso utile nella risoluzione di problemi fisici.

__Le onde elettromagnetiche e i fotoni__.

Come è noto, la teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell mostra che un campo elettromagnetico oscillante si può propagare nello spazio vuoto con velocità c sotto forma di onda elettromagnetica. Un'onda elettromagnetica monocromatica è costituita da un campo elettrico e un campo magnetico che oscillano nel tempo ad una data frequenza ν. Un tipo particolarmente importante di onda è l'onda piana; in essa il campo elettrico e il campo magnetico giacciono sempre sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione (asse x) e sono fra loro perpendicolari (vedi fig.1). Ad un generico istante t, il campo elettrico e il campo magnetico in tutti i punti di uno stesso piano perpendicolare all'asse x hanno lo stesso valore (onda piana).

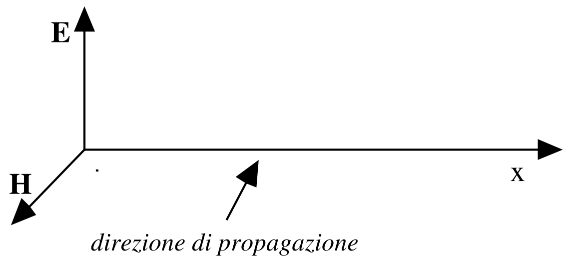

figura 1

Per un'onda piana polarizzata linearmente i campi $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ si mantengono sempre paralleli a due assi ortogonali y e z e i valori del campo elettrico E e di quello di induzione magnetica B ($B = \mu_0 H$) in un generico piano individuato dalla coordinata x ed ad un generico istante t sono dati da:

$$E = E_0 \cos [2\pi(x/\lambda - \nu t)] \tag{14}$$

$$B = B_0 \cos [2\pi(x/\lambda - \nu t)] \tag{15}$$

dove E_0 e B_0 sono, rispettivamente, le ampiezze del campo elettrico E e del campo di induzione magnetica B, mentre λ è la lunghezza d'onda che è legata alla frequenza ν e alla velocità c dell'onda dalla nota relazione:

$$\nu = c/\lambda \tag{16}$$

Al variare del valore della frequenza, cambia il tipo di onda elettromagnetica. Le frequenze tipiche vanno dalle frequenze delle onde radio ($\nu \approx 10^6$ Hz = 1 MHz), delle microonde ($\nu \approx 10^8$-10^{10} Hz), delle onde luminose ($\nu \approx 10^{15}$ Hz), fino ad arrivare a quelle dei raggi X ($\nu \approx 10^{18}$ Hz) e dei raggi γ($\nu \approx 10^{20}$ Hz). Come noto, molte di queste onde elettromagnetiche hanno trovato importanti applicazioni sia nella vita di tutti i giorni (onde radio, onde TV...) che in medicina (radiazione laser, raggi X , raggi γ.....). La teoria Elettromagnetica permette di dedurre tutte le proprietà fondamentali delle onde elettromagnetiche a partire dalle equazioni di Maxwell. In particolare, sulla base di tale teoria, si può dimostrare che un'onda elettromagnetica trasporta energia e quantità di moto. Che un'onda elettromagnetica trasporti energia è evidente per tutti. Infatti, è proprio attraverso i suoi raggi luminosi che il Sole ci riscalda e permette la vita sulla terra. Ma cosa vuol dire che l'onda trasporta quantità di moto? Vuol dire che, se un'onda elettromagnetica incide su una parete e viene da essa assorbita, non solo la parete si scalda (l'energia dell'onda viene assorbita) ma essa acquista anche una quantità di moto $\Delta\boldsymbol{p}$ pari alla quantità di moto che è stata assorbita nel tempo Δt. Ne consegue che la parete subisce una forza $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ (*pressione di radiazione*) che, seppur normalmente piccola, è stata effettivamente misurata negli esperimenti. Per un'onda monocromatica piana che si propaga nel vuoto lungo l'asse x, si dimostra che l'energia per unità di volume (*densità di energia elettromagnetica*) è pari a

$$u = \varepsilon_0 E^2 \tag{17}$$

dove ε_0 = 8.854 10^{-12} F/m è la costante dietettrica del vuoto. La quantità di moto per unità di volume (*densità di quantità di moto*) è, invece, data da

$$p_v = u/c \tag{18}$$

In un famoso lavoro pubblicato nel 1905, Einstein mostrò che l'effetto fotoelettrico, cioè l'emissione di elettroni da un conduttore investito da radiazione luminosa (vedi Parte II del corso), può essere spiegato assumendo che l'onda luminosa sia costituita da un insieme di corpuscoli, detti ***fotoni***, che si muovono lungo la direzione di propagazione dell'onda con velocità c e aventi un'energia pari a

$$\varepsilon = h\,\nu \tag{19}$$

dove h è una costante caratteristica che viene detta costante di Planck ed è pari a $h = 6.626\ 10^{-34}$ Js . I fotoni sono distribuiti in tutti i punti dello spazio dove è presente l'onda con una densità n (n = numero di fotoni per unità di volume). Poichè ciascun fotone trasporta l'energia $h\nu$, allora la densità di energia, cioè l'energia per unità di volume, sarà anche uguale ad $u = n\,h\nu$. Dunque, il numero di fotoni per unità di volume può essere facilmente calcolato se si conosce la densità di energia elettromagnetica u utilizzando la relazione:

$$n = u/(h\nu) \tag{20}$$

Tenendo conto che la densità d'energia u è proporzionale al quadrato del campo [eq.(17)], si deduce che i fotoni si addensano maggiormente nei punti dello spazio dove il campo elettrico dell'onda elettromagnetica è più intenso. D'altra parte, se p è la quantità di moto trasportata da un singolo fotone, la quantità di moto per unità di volume p_v dell'onda, si otterrà moltiplicando p per n. Dunque

$$p_v = n\,p = up/(h\nu) \tag{21}$$

Confrontando p_v in eq.(21) con quello in eq.(18) si trova:

$$\frac{u}{c} = \frac{up}{h\nu} \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\varepsilon}{c} \tag{22}$$

In conclusione, i fotoni sono particelle con energia ε e quantità di moto p pari a:

$$\varepsilon = h\nu \quad , \quad p = \frac{h\nu}{c} \tag{23}$$

Ma come è possibile che una particella abbia velocità pari a quella della luce? In effetti, avevamo visto in precedenza che, per poter far acquistare la velocità della luce ad un corpo materiale di massa a riposo m_0 è necessario fornire al corpo un'energia infinita, mentre l'energia di un fotone ha il valore finito in eq.(23). La risposta a questo quesito è che il fotone è una particella molto diversa da tutte le altre particelle che sono oggetto delle nostre osservazioni perchè esso ha massa a riposo $m_0 = 0$. Infatti, se sostituiamo i valori di ε e p dati dalla (23) nell'equazione (3), si trova $m_0 = 0$. Ciò vuol dire che, l'energia del fotone è solamente energia cinetica (non è possibile osservare un fotone fermo). Più in generale, qualunque particella che viaggi con velocità uguale a c è necessariamente una particella con massa a riposo nulla. Conseguentemente, per tale particella , l'energia E deve essere legata alla quantità di moto p dalla relazione $E = pc$ [(vedi eq.(13)].

L'effetto Doppler.

Le considerazioni precedenti ci permettono di trovare facilmente le relazioni che descrivono un importante fenomeno riguardante le onde elettromagnetiche: ***l'effetto Doppler***. Questo effetto si presenta quando un'onda elettromagnetica di frequenza ν_0 viene emessa da una sorgente che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ rispetto ad un dato "osservatore" (ν_0 rappresenta la frequenza misurata nel riferimento dove la sorgente è ferma). In tal caso, la frequenza che viene misurata dall'osservatore è maggiore di ν_0 se la sorgente si sta avvicinando all'osservatore, mentre è minore di ν_0 se essa si sta allontanando. Un fenomeno qualitativamente simile ma quantitativamente diverso si verifica anche per le onde non di tipo elettromagnetico come le onde sonore. Tutti noi, infatti, possiamo facilmente osservare che il fischio di un treno appare più acuto (alta frequenza) se esso ci viene incontro e diventa, invece più basso (bassa frequenza) quando esso si allontana da noi. Lo stesso avviene per la sirena di un'atombulanza o dei pompieri. Nel caso delle onde elettromagnetiche si devono distinguere due casi:

1) Effetto Doppler longitudinale.

Questo caso si presenta quando la direzione di propagazione della radiazione è lungo lo stesso asse x su cui si sposta la sorgente come mostrato schematicamente in figura 2, dove A rappresenta il punto dove si trova l'osservatore che riceve la radiazione e B rappresenta la sorgente. Se v_T è la velocità della sorgente lungo l'asse x nel riferimento S

dell'osservatore, allora v_T è anche la velocità di trascinamento del riferimento S' solidale con la sorgente rispetto ad S. Qui v_T indica la componente della velocità lungo x e, quindi, $v_T > 0$ se la sorgente si allontana dall'osservatore in A e $v_T < 0$ nel caso opposto.

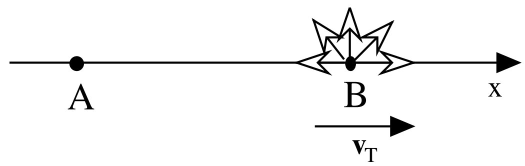

figura 2

Per trovare il valore incognito della frequenza ν misurata dall'osservatore che si trova nel punto A, possiamo applicare la legge di trasformazione in eq.(11). Infatti, l'energia dei fotoni luminosi nel riferimento della sorgente (S') è $\varepsilon' = h\nu_0$, mentre nel riferimento S sarà $\varepsilon = h\nu$, dove ν è la frequenza che vogliamo trovare. Qui siamo interessati a calcolare la frequenza dei fotoni che sono emessi dalla sorgente (punto B in fig.2) e raggiungono l'osservatore posto in A. Questi fotoni si muovono, ovviamente, nel verso negativo delle x. La quantità di moto dei fotoni nel riferimento S è un vettore di modulo $p = h\nu/c$ diretto lungo l'asse x nel verso negativo, dunque la componente x della quantità di moto è $p_x = -h\nu/c$. Ma allora, sostituendo questi valori nella (11) ($\varepsilon' = h\nu_0$ al posto di E' , $\varepsilon = h\nu$ al posto di E e $p_x = -h\nu/c$), si trova immediatamente la formula fondamentale dell'effetto Doppler longitudinale:

$$\frac{h\nu_0}{c} = \gamma\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{v_T}{c}\frac{h\nu}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \nu = \nu_0 \frac{1 - \dfrac{v_T}{c}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v_T}{c}\right)^2}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v_T}{c}}{1 + \dfrac{v_T}{c}}} \qquad (24)$$

Per ottenere l'ultima espressione a destra, abbiamo utilizzato le relazioni:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \dfrac{v_T}{c}}\right)\left(\sqrt{1 + \dfrac{v_T}{c}}\right)}$$

e

$$1 - \frac{v_T}{c} = \left(\sqrt{1 - \frac{v_T}{c}}\right)\left(\sqrt{1 - \frac{v_T}{c}}\right)$$

Nella maggior parte dei casi di interesse, la velocità v_T della sorgente è, in modulo, molto minore di c. Dunque, le radici in eq. (24) possono essere approssimate utilizzando l' approssimazione ($1+x)^{\alpha} \approx 1+ax$. In tal caso, la (24) diventa semplicemente:

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v_T}{c}\right) \qquad (24)$$

Se la sorgente si allontana dall'osservatore [$v_T > 0$ in eq.(23) e (24)], allora la frequenza ν misurata è minore di quella emessa dalla sorgente, l'opposto avviene se la sorgente si avvicina all'osservatore ($v_T < 0$). L'espressione approssimata in eq.(24) coincide con il risultato che si ottiene classicamente utilizzando le trasformazioni di Galileo al posto di quelle di Lorentz.

Dalla (24) si deduce che la velocità con cui si muove la sorgente può essere facilmente ottenuta da una misura delle frequenze ν e ν_0. In particolare, dalla (24) si deduce $v_T = c\ (\nu - \nu_0)/\nu_0$. L'effetto Doppler viene oggi correntemente utilizzato per misurare la velocità di un corpo in movimento (*velocimetria Doppler*). Infatti, le tecniche sperimentali per misurare le differenze di frequenze sono oggi estremamente accurate e permettono di determinare con precisione la velocità dei corpi utilizzando l'effetto Doppler.

2) Effetto Doppler trasversale.

In questo caso, si considera ancora una sorgente B che si muove con velocità v_T lungo l'asse x rispetto ad un osservatore posto in A. stavolta, però, l'osservatore si trova lungo un asse y perpendicolare all'asse x come mostrato schematicamente in figura 3.

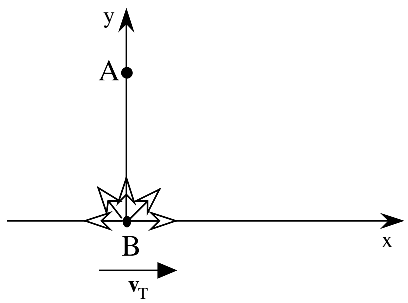

Figura 3

La radiazione elettromagnetica che raggiunge l'osservatore è quella che si propaga, perciò, nel verso positivo dell'asse y in direzione perpendicolare al moto della sorgente. Dunque, a differenza del caso precedente, la componente x della quantità di moto dei fotoni è $p_x = 0$. Le energie dei fotoni in S' e S sono ancora date, rispettivamente, da $\varepsilon' = h\nu_0$ e $\varepsilon = h\nu$. Sostituendo queste espressioni (con p_x =0) nella (11) si trova immediatamente la formula dell'effetto Doppler trasversale:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma} = \nu_0\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}} \tag{25}$$

Dunque, in questo caso, qualunque sia il verso di moto della sorgente, la frequenza ν misurata dall'osservatore è sempre minore di ν_0. In questo caso, invece, il risultato che si ottiene utilizzando le trasformazioni classiche di Galileo è $\nu = \nu_0$ che si ottiene dalla (25) nel limite $v_T/c \rightarrow 0$.

Osserviamo che le espressioni caratteristiche dell'Effetto Doppler potevano essere anche ottenute direttamente a partire dalle espressioni dei campi di un'onda piana [equazioni (14) e (15)] andando a vedere come si trasformano i campi E e B nel sistema di riferimento S' in moto rispetto alla sorgente. In questo sistema di riferimento, le coordinate spazio-temporali diventano x' e t' e la nuova frequenza dell'onda risulta data dalle espressioni (24) e (25).

Esercizio: lo studente ritrovi la formula dell'effetto Doppler longitudinale (24) seguendo questa diversa procedura. In particolare, dimostri che, se il campo elettrico nel sistema S della sorgente dipende da x e t come $\cos[2\pi(x/\lambda_0 - \nu_0 t)]$ allora, nel sistema S' in moto rispetto alla sorgente, il campo dipende da x' e t' come $\cos[2\pi(x'/\lambda - \nu\, t')]$ dove $\nu\lambda = c$ e dove ν è legata a ν_0 dalla relazione (24) . Analogamente, l'effetto Doppler trasversale si ritrova facilmente applicando le trasformazioni di Lorentz ad un'onda che si propaga lungo l'asse y. In tal caso, nel sistema S, il campo elettrico dipende da y e t come $\cos[2\pi(y/\lambda_0 - \nu_0 t)]$.

CONSEGUENZE DELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO E DELL'ENERGIA.

In quest'ultima parte della lezione, analizziamo alcune conseguenze della legge di conservazione della quantità di moto e dell'energia e della legge $E = mc^2$.

La massa a riposo di un corpo dipende dalla sua temperatura.

Una prima conseguenza della conservazione dell'energia è il fatto che, in via di principio, la massa a riposo di un corpo dipende dalla temperatura del corpo. Infatti, se m_0 è la massa a riposo del corpo ad una temperatura T_0, allora l'energia da esso posseduta è m_0c^2. Se, però, il corpo viene scaldato portandolo ad una temperatura $T > T_0$, allora la sua energia dovrà aumentare perche' la sua energia termica è aumentata di una quantità pari a $C\ (T\text{-}T_0)$, dove C è la capacità termica del corpo. Dunque, dopo essere stato scaldato, il corpo avrà l'energia $E = m_0c^2 + C\ (T\text{-}T_0)$ e, quindi, una massa a riposo $M_0 = E/c^2 = m_0 + C\ (T\text{-}T_0)/c^2$. L'aumento della massa a riposo è facilmente spiegabile se si pensa che un corpo macroscopico fermo è in realtà costituito da molecole che si muovono caoticamente con energia cinetica che cresce all'aumentare della temperatura. Il centro di massa del corpo resta fermo ma i singoli costituenti (atomi e molecole) si muovono sempre più all'aumentare della temperatura. Dato l'alto valore di c, però, il contributo termico all'energia dei corpi macroscopici è sempre trascurabile. Ad esempio, consideriamo 1 kg di acqua a temperatura iniziale T_0 = 20 °C che viene scaldato fino a raggiungere la temperatura T = 90°C. Ricordando che la capacità termica di 1 Kg di acqua è C = 4186 J/kg °C , la variazione di massa è $\Delta M = C\ (T\text{-}T_0)/c^2 \approx 3.17\ 10^{-12}$ Kg che è, ovviamente, trascurabile rispetto a m_0 = 1 kg.

In una reazione chimica la massa a riposo dei prodotti non è uguale alla massa a riposo dei reagenti.

Una delle leggi fondamentali della Chimica è la nota legge di conservazione della massa di Lavoisier. Secondo tale legge, ad esempio, se due sostanze reagiscono insieme per formare una nuova sostanza, la somma delle masse dei reagenti è uguale alla massa totale dei prodotti della reazione. La relatività mostra che questa legge è vera solamente in prima approssimazione perchè, in via di principio, la somma delle masse a riposo dei reagenti può essere sia maggiore che minore di quella dei prodotti. Ad esempio, possiamo considerare il caso di due molecole di idrogeno (H_2) che reagiscono con una molecola di ossigeno (O_2) per formare due molecole di acqua (H_2O). Come è noto, questa reazione è esotermica, cioè c'è sviluppo di calore che può essere utilizzato per la produzione di energia (motore a idrogeno). Dopo la reazione, i prodotti di reazione si trovano a temperatura più alta di quella iniziale dell'ambiente circostante, cioè l'energia di agitazione termica dei prodotti di reazione è più alta. Per la conservazione dell'energia, dunque, una parte delle masse a riposo dei reagenti si è trasformata in energia cinetica dei prodotti di reazione. Dunque, la massa finale del prodotto della reazione, dopo che esso ha raggiunto nuovamente la temperatura iniziale, deve essere minore della somma delle masse dei reagenti prima della reazione.
Sapendo che il calore sviluppato in una reazione in cui sono presenti 2 moli di H_2 e 1 mole di O_2 è ΔE = 572 KJ, mentre la loro massa totale è M = 36 g, si stima che la variazione relativa di massa è $\Delta M/M = \Delta E/(Mc^2) \approx 1.8\ 10^{-10}$. Anche nel caso delle reazioni chimiche, dunque, l'energia termica prodotta è molto minore di quella iniziamente associata con le masse a riposo e, quindi, seppur approssimata, la legge di Lavoisier descrive in modo più che soddisfacente le reazioni chimiche.

Il fatto che la massa a riposo non sia additiva e, cioè, che la massa a riposo del prodotto finale non sia uguale alla somma delle masse a riposo dei componenti, si spiega facilmente in termini energetici. Consideriamo, ad esempio, due atomi di idrogeno (H) di diametro $D \approx$ 0.1 nm che si trovano a grande distanza come mostrato schematicamente in fig.4a. Sappiamo che che questi atomi tendono a formare una molecola stabile H_2 dove i centri dei due atomi si trovano a distanza d ravvicinata ($d \approx D$) come mostrato schematicamente in figura 4b.

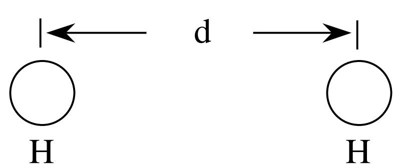

figura 4a

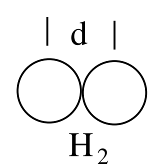

figura 4b

Ovviamente, se gli atomi si legano insieme per formare una molecola stabile, vuol dire che ci sono delle forze che tendono a trattenere i due atomi nella loro posizione finale di equilibrio. In effetti, utilizzando le leggi dell'elettrostatica, si può dimostrare che, se gli atomi di idrogeno si trovano a distanza apprezzabilmente maggiore del loro diametro, essi sono soggetti ad una forza *attrattiva* di origine elettrica che cresce rapidamente al diminuire della distanza (forza di Van der Waals). Ovviamente, se gli atomi fossero sferette rigide, i loro centri non potrebbero avvicinarsi più di un diametro, cioè, quando arrivassero a toccarsi, si svilupperebbero delle forze repulsive estremamente intense che impedirebbero un ulteriore avvicinamento. Si può dimostrare che, effettivamente, quando gli atomi arrivano a distanze confrontabili con il loro diametro, nascono delle nuove forze di tipo repulsivo dovute alle interazioni fra le nuvole elettroniche che tendono a respingerli ed ad impedirne la compenetrazione. Dunque, in condizioni di equilibrio, gli atomi tenderanno a disporsi a quella distanza $d \approx D$ in cui la forza totale è nulla, cioè nel punto dove la forza attrattiva uguaglia esattamente quella repulsiva. Dalla Meccanica sappiamo che una posizione di equilibrio stabile è quella posizione in cui l'energia potenziale assume il minimo valore come avviene, ad esempio, nel caso di una pallina nel fondo di una cunetta. In figura 5 è mostrato l'andamento tipico dell'energia potenziale del sistema dei due atomi in funzione del rapporto $h = d\ /\ L$, dove $L \approx D$ è la distanza fra i centri degli atomi nella molecola in condizioni di equilibrio. Nel rappresentare l'energia potenziale U, abbiamo assunto come zero dell'energia la posizione in cui i due atomi si trovano a distanza infinita. La porzione di curva crescente ($h > 1$) rappresenta la regione dove domina la forza attrattiva, mentre quella decrescente ($h < 1$) è quella dove domina la forza repulsiva. La posizione di equilibrio $h = 1$ è quella dove l'energia è minima ed ha il valore negativo $U = -\Delta E = -0.5$ u.a. in fig.5.

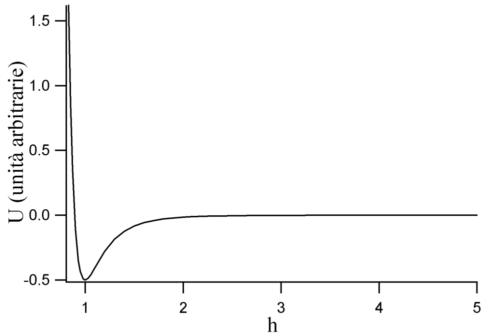

figura 5

Supponiamo, ora, che la massa a riposo di un atomo di idrogeno isolato sia m_0. Allora, quando i due atomi si trovano fermi a distanza molto grande ($h >>1$) l'energia totale del sistema è $E_{Tot} = 2\ m_0c^2$. Invece, nel caso in cui i due atomi si trovino fermi in $h = 1$, cioè si trovino aggregati sottoforma di molecola H_2, l'energia totale è $E'_{Tot}=E_{Tot} - \Delta E = M_0c^2$, dove M_0 è la massa a riposo della molecola H_2. Ovviamente, $E'_{Tot} < E_{Tot}$ e, quindi, in via di principio, $M_0 < 2\ m_0$ anche se la differenza fra le due masse (M_0 e $2\ m_0$) è piccolissima.

***Le reazioni nucleari*.**

Fino ad ora abbiamo mostrato che, in via di principio, in una reazione chimica le somme delle masse a riposo dei ragenti non sono uguali a quelle dei prodotti della reazione. Tuttavia, le energie sviluppate od assorbite nelle reazioni chimiche sono estremamente piccole se confrontate con le energie inizialmente presenti sotto forma di massa a riposo dei reagenti. Questo avviene perchè le forze di interazione fra atomi sono relativamente piccole. Dunque, il contributo di queste forze all'energia totale dei corpi è sempre del tutto trascurabile e la legge di Lavoisier è praticamente "esatta".

Ben diverso è ciò che accade nel caso delle reazioni nucleari nelle quali, ad esempio, il nucleo di un atomo si "spacca" dividendosi in particelle più piccole. In questo caso, le forze fra le particelle subnucleari sono molti ordini di grandezza più grandi di quelle che caratterizzano le reazioni chimiche e, di conseguenza, le energie in gioco non sono più completamente trascurabili rispetto alle energie immagazzinate nelle masse a riposo. Queste reazioni risultano, perciò, estremamente promettenti dal punto di vista energetico. Sono possibili due casi diversi:

1- *Fusione Nucleare*

In questo caso due particelle che inizialmente sono separate si avvicinano fino ad aggregarsi per formare una particella più grossa . Le forze che tengono unite le particelle sono forze nucleari. Se l'energia di interazione fra le particelle ha un minimo quando esse si trovano ad una data distanza (vedi, ad esempio, fig.5), l'energia potenziale finale delle due particelle sarà minore di quella iniziale e, quindi, una parte della massa a riposo delle due particelle si sarà convertita in un'altra forma di energia (energia cinetica delle particelle) che può essere sfruttata per la produzione di energia. Fino ad oggi questo processo di fusione nucleare è stato utilizzato solamente per applicazioni belliche (bomba H) ma è tuttora in corso in tutto il mondo un notevole sforzo volto a realizzare centrali che sfruttino la fusione nucleare. Processi di questo tipo avvengono spontaneamente nelle stelle e sono responsabili dell'enorme quantità di energia emessa dal nostro Sole che permette la vita sulla terra. I processi di fusione possibili sono numerosi. Uno particolarmente importante è quello in cui un nucleo di deuterio (^2H) formato da un protone e un neutrone si unisce con un nucleo di Trizio (^3H) formato da un protone e 2 neutroni. Nella reazione si forma un nucleo di Elio ^4He (2 neutroni + 2 protoni) ed un neutrone libero entrambi con un'energia cinetica piuttosto elevata. La reazione nucleare si scrive:

$$^2H + {}^3H \longrightarrow {}^4He\ (3.5\ \text{Mev}) + n\ (14.1\ \text{Mev})$$

Le energie fra parentesi rappresentano le energie cinetiche delle particelle risultanti dopo che è avvenuta la fusione. Come si vede, le energie in gioco non sono più trascurabili rispetto alle masse a riposo delle particelle (dell'ordine di alcune migliaia di Mev). Una parte della massa a riposo inizialmente presente (circa 0.5%) si converte in radiazione che viene assorbita dalla materia del Sole e si trasforma in energia termica o in altre forme di energia (ad esempio energia luminosa).

Queste violente reazioni nucleari possono avvenire solamente negli strati più interni del Sole dove le temperature sono elevatissime (milioni e milioni di gradi). Infatti, i nuclei interagiscono fra loro con due tipi diversi di forza: la forza elettrostatica e l'interazione forte. Ora, l'interazione forte fra i nuclei è una forza nucleare che, come dice il nome stesso, è una forza estremamente intensa che tende a tenere i nuclei uniti, ma questa forza ha la caratteristica di decrescere enormemente all'aumentare della distanza fra i nuclei. Già a distanze di pochi diametri nucleari, la forza diventa trascurabile rispetto a quella elettrica. D'altra parte, la carica elettrica dei nuclei di deuterio e trizio è pari a quella di un protone, dunque essi, avendo la stessa carica elettrica, tendono a respingersi elettricamente. Finchè essi si trovano a distanze apprezzabilmente maggiori del loro diametro, la forza elettrica repulsiva prevale su quella nucleare attrattiva ed essi tendono a respingersi. Se, invece, i nuclei arrivano sufficientemente vicini, allora le forze nucleari attrattive diventano dominanti e i nuclei si avvicinano sempre di più fino a formare un unico nucleo di He. In conclusione, se si vuole che la reazione di fusione avvenga, è necessario che i nuclei riescano a vincere le forze repulsive elettrostatiche fino ad arrivare sufficientemente vicini. Questo avviene, ad esempio, se si "spara" un nucleo contro l'altro con una velocità sufficientemente alta in modo da superare la barriera di potenziale elettrostatica. Questo è il motivo per cui la reazione di fusione necessita il raggiungimento di temperature estremamente alte. Infatti, l'energia cinetica media dei nuclei è proporzionale alla temperatura assoluta. Se la temperatura è sufficientemente elevata, la loro velocità media è sufficientemente alta da permettere loro di superare la barriera di energia potenziale dovuta alla forza repulsiva di origine elettrostatica e la reazione di fusione diventa possibile.

Per realizzare la fusione nucleare per applicazioni civili si dovrebbe prendere una certa quantità di deuterio e trizio e portarli a temperature elevatissime confrontabili con quelle che vengono raggiunte nel nucleo centrale del Sole. Ma, a queste temperature, qualunque materiale diventa gassoso e, quindi, si presenta il problema di contenerlo all'interno di un dato reattore nucleare, portarlo a temperature elevatissime, senza che le pareti del contenitore entrino in contatto con esso evaporando immmediatamente. Questo pone, ovviamente, grossi problemi tecnologici che hanno reso e rendono tuttora molto difficile la realizzazione di reattori nucleari a fusione anche se negli ultimi decenni sono stati fatti molti importanti progressi in questo settore. Questo tipo di reattori nucleari presenterebbero enormi vantaggi rispetto alle centrali nucleari a fissione. Il primo vantaggio è che la materia prima è costituita dal Deuterio e dal Trizio che sono facilmente reperibili (essi sono presenti in piccole percentuali nell'acqua), mentre l' Uranio necessario per i reattori a fissione è molto raro e si trova in aree ristrette del pianeta. Il secondo, ma non meno importante, vantaggio è che le scorie radiattive che si vengono a produrre nella fusione sono decisamente meno pericolose di quelle da fissione poichè esse hanno una vita media molto minore.

2- Fissione nucleare.

In questo caso, un dato nucleo si "spezza" in più parti e la somma delle energie a riposo dei vari " pezzi" è minore di quella iniziale del nucleo. Dunque, le particelle che si formano hanno un'energia cinetica che può essere sfruttata per la produzione di energia per applicazioni civili o per la costruzione di bombe atomiche. Questo avviene per alcuni nuclei pesanti come l'uranio 235 che si indica con ^{235}U. Questi nuclei sono instabili, cioè, tendono a spezzarsi, e vengono detti radiattivi. Per capire cosa voglia dire instabile, consideriamo, il semplice esempio di due nuclei A e B che siano uniti insieme formando in un unico nucleo AB. I due nuclei rimarranno sempre attaccati se la loro energia di interazione a questa distanza è la minima possibile, come avveniva in h =1 nel caso dell'energia rappresentata in figura 5. Nel caso dei nuclei radiattivi, invece, la forma qualitativa dell'energia è quella mostrata in figura 6 dove $h=d/L$ rappresenta il rapporto fra la distanza d fra i centri dei due nuclei A e B e il valore L di questa distanza quando i nuclei si trovano uniti a formare il nucleo AB (h =1 in fig.6) In questo caso la posizione h =1, che corrisponde al caso in cui i nuclei formano un unico nucleo AB, è una posizione di minimo relativo per l'energia ma non di minimo assoluto (l'energia è minima quando A e B si trovano a distanza infinita).

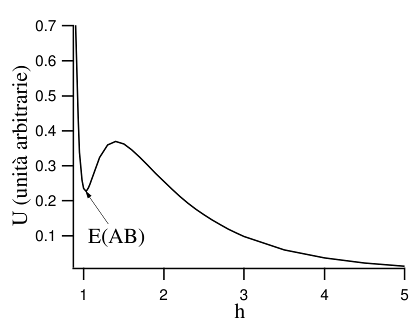

Figura 6

Dunque, se il nucleo si spezza in due pezzi A e B che si allontanano sufficientemente (h >>1), l'energia $E(AB)$ inizialmente presente nel nucleo AB si trasforma in energia cinetica delle particelle A e B. Ciò significa che la massa a riposo del nucleo AB è maggiore di quella dei due nuclei A e B separati e che una parte dell'energia immagazinata nella massa a riposo iniziale si è trasformata in energia cinetica. Ora, dalla figura 6 si comprende facilmente che il processo di separazione dei nuclei A e B non può avvenire spontaneamente. Infatti, la posizione $h = 1$ in figura 6 corrisponde ad un minimo relativo dell'energia e, per poter allontanare i nuclei da tale posizione, è necessario che qualcuno fornisca dall'esterno l'energia necessaria per superare la barriera di potenziale ΔE in figura 6 (ΔE rappresenta la differenza di energia fra i punti di massimo e di minimo relativo in figura 6). Una volta superata la barriera di potenziale, l'energia inizia a decrescere all'aumentare della distanza e ciò significa che i due nuclei iniziano a respingersi allontanandosi sempre più l'uno dall'altro. Nel caso della fissione dell'Uranio 235, l'energia necessaria per innescare la reazione viene fornita da un neutrone che urta l'atomo di Uranio. Dopo l'urto, il nucleo di Uranio si spezza in due nuclei più leggeri e in un certo numero di neutroni liberi che, a loro volta, possono urtare con un altro nucleo di Uranio provocando una nuova fissione e così via. Se il numero di nuclei presenti è piccolo, la probabilità che uno dei neutroni emessi nella reazione di fissione colpisca un altro nucleo è piccola e, quindi, le reazioni di fissione sono in numero limitato. All'aumentare della massa dell' uranio 235, aumenta il numero di nuclei presenti e, quindi, la probabilità che un neutrone emesso in una reazione di fissione colpisca un altro nucleo provocando una nuova fissione. Se la massa di Uranio 235 supera un valore critico M_c, il numero di neutroni emessi in una fissione che provocano mediamente un'altra fissione diventa superiore ad 1. In tal caso, ogni nucleo che si spezza produce mediamente un'altra reazione nucleare e così via (*reazione a catena*) dando luogo ad una enorme quantità di energia prodotta. La condizione $M > M_c$ è quella che caratterizza il funzionamento di una bomba nucleare come quella che venne sganciata sulla città di Hiroshima durante la II guerra mondiale. Nel caso, invece, dei reattori nucleari dove si vuole produrre energia in modo controllato, la massa di Uranio deve essere sempre mantenuta molto prossima ma inferiore al valore critico. Date le elevatissime energie in gioco nelle reazioni nucleari, l'energia che si riesce ad ottenere è estremamente elevata se confrontata con le energie prodotte nelle ordinarie reazioni chimiche. Ad esempio, l'energia prodotta da un grammo di Uranio potrebbe essere ottenuta solamente bruciando diverse tonnellate di petrolio o di carbone (1 tonnellata = 1 miliardo di grammi !). Si noti che questa energia rappresenta ancora una piccola (pochi millesimi) frazione dell'energia contenuta inizialmente nella massa a riposo. Dunque, se fosse possibile trasformare interamente l'energia di massa a riposo in altre forme di energia (termica, elettrica ...), bruciando un solo grammo di materia si potrebbero ottenere energie comparabili con quelle prodotte da diverse migliaia di tonnellate di petrolio !.