LEZIONE V

LA DINAMICA RELATIVISTICA.

La quantità di moto relativistica..

La legge fondamentale della Dinamica Classica per il moto dei corpi materiali è la II legge di Newton che si scrive:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (1)$$

dove $\boldsymbol{p}$ è un vettore, detto quantità di moto definito come:

$$\boldsymbol{p} = m_0 \boldsymbol{v} \qquad (2)$$

dove m_0 è una costante, detta *massa inerziale* del corpo e $\boldsymbol{v}$ è la velocità del corpo. Nel corso dei secoli, la legge di Newton si è dimostrata in grado di descrivere in modo accurato il moto dei corpi oggetto della nostra esperienza comune (proiettili, automobili, pianeti). Per questo motivo, fino all'enunciazione della Relatività Ristretta (1905), si è sempre pensato che essa rappresentasse una legge esatta della Natura. Ora, le considerazioni svolte nelle lezioni precedenti, ci hanno mostrato che alcune deduzioni della Fisica Classica come le trasformazioni di Galileo rappresentano delle leggi approssimate valide solamente nel limite di corpi che si muovono con velocità trascurabili rispetto alla velocità della luce nel vuoto. Sembra, perciò, naturale pensare che anche la II legge di Newton rappresenti una legge approssimata applicabile solamente a corpi che si muovono con velocità piccole rispetto a quella della luce. Il problema è, quindi, di trovare una forma più generale della (1) che possa risultare in accordo con il Principio di Relatività.

In meccanica Classica, utilizzando la II legge di Newton e la III legge di Newton (principio di azione e reazione), si dimostra che in un urto fra due corpi la quantità di moto totale del sistema dei due corpi si deve conservare, cioè la quantità di moto totale che avevano i corpi prima dell'urto deve essere la stessa dopo l'urto. Se indichiamo con i suffissi 1 e 2 i due corpi e con i suffissi i e f i valori iniziali (subito prima dell'urto) e finali (subito dopo l'urto), il principio di conservazione della quantità di moto si scrive:

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} + m_2 \boldsymbol{v}_{2i} = m_1 \boldsymbol{v}_{1f} + m_2 \boldsymbol{v}_{2f} \qquad (3)$$

Ovviamente, poichè tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti, la legge di conservazione della quantità di moto deve valere in qualunque riferimento inerziale. Nell'ambito della Fisica Classica questo è proprio quello che accade. In effetti, se si utilizzano le leggi di trasformazione delle velocità di Galileo, è facile mostrare che, se la (3) vale in un riferimento inerziale S, allora essa vale anche in qualunque altro riferimento S' che si muove con velocità $\boldsymbol{v}_T$ rispetto ad S. Nel sistema di riferimento S', la conservazione della quantità di moto si scrive:

$$m_1 \boldsymbol{v'}_{1i} + m_2 \boldsymbol{v'}_{2i} = m_1 \boldsymbol{v'}_{1f} + m_2 \boldsymbol{v'}_{2f} \qquad (4)$$

dove il simbolo ' indica che le velocità sono misurate nel sistema S'. Sostituendo nella (4) i valori delle velocità dati dalla legge di trasformazione delle velocità di Galileo $\boldsymbol{v'} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_T$, la (4) diventa:

$$m_1\left(\boldsymbol{v}_{1i} - \boldsymbol{v}_T\right) + m_2\left(\boldsymbol{v}_{2i} - \boldsymbol{v}_T\right) = m_1\left(\boldsymbol{v}_{1f} - \boldsymbol{v}_T\right) + m_2\left(\boldsymbol{v}_{2f} - \boldsymbol{v}_T\right) \qquad (5)$$

Si vede immediatamente che i contributi omologhi a destra e sinistra contenenti $\boldsymbol{v}_T$ in eq.(5) si semplificano e che, dopo questa semplificazione, la (5) diventa identica alla (3). Ciò significa che, in Meccanica Classica, se è soddisfatta la conservazione della quantità di moto in un dato riferimento S [eq.(3)], allora essa è necessariamente soddisfatta anche in un diverso riferimento S' in moto uniforme rispetto al precedente, in accordo con il Principio di Relatività. Dunque, *la legge di conservazione della quantità di moto Classica* [eq.(3)] *è consistente con la legge di trasformazione delle velocità di Galileo e con il Principio di Relatività di Galileo*.

D'altra parte, abbiamo visto che, quando le velocità dei riferimenti non sono più trascurabili rispetto alla velocità della luce, le leggi di trasformazione di Galileo non sono più valide neppure approssimativamente e vanno sostituite con le leggi esatte previste dalla Relatività. In particolare, la velocità di un corpo misurata nel riferimento S' è legata a quella misurata nel riferimento S e a quella di trascinamento dalle relazioni (27),(30)e (31) trovate nella lezione

III che sono decisamente più complesse delle relazioni di Galileo. Se ora, al posto delle componenti della velocità $\boldsymbol{v}'$ che appaiono in eq.(4) sostituiamo le loro espressioni in termini delle velocità $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_T$ come dato dalle leggi relativistiche, si ottiene un'equazione contenente le velocità $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}_T$ che non è più riconducibile alla (3). Questo significa che, se la quantità di moto di un corpo fosse data esattamente dalla (2) e se in un dato riferimento inerziale S fosse verificata la conservazione della quantità di moto [eq.(3)], questa legge non sarebbe più verificata negli altri riferimenti inerziali. Ma questo è in aperta contraddizione con il Principio di Relatività che assicura che le stesse leggi della Fisica devono essere verificate in tutti i sistemi inerziali. Dunque, se vogliamo che la conservazione della quantità di moto soddisfi il Principio di Relatività, allora l'espressione della quantità di moto non può essere data dalla (2). Il problema è, quindi: come deve essere modificata la definizione di quantità di moto (2) se vogliamo che il principio di conservazione della quantità di moto risulti soddisfatto in ogni riferimento inerziale? Ovviamente, poichè la (2) descrive con buona precisione il moto di corpi che viaggiano a velocità molto minori di quella della luce, la nuova espressione della quantità di moto dovrà ridursi alla (2) nel limite di basse velocità. In conclusione, la nuova espressione da cercare deve soddisfare i seguenti requisiti:

1) La legge di conservazione della quantità di moto deve continuare a valere in ogni sistema di riferimento inerziale quando si applicano le trasformazioni delle velocità Relativistiche.

2) Nel limite di basse velocità ($v << c$) la quantità di moto $\boldsymbol{p}$ deve ridursi all'espressione classica $\boldsymbol{p} = m_0\, \boldsymbol{v}$.

Analizzando gli urti elastici fra due corpi, si può dimostrare che la forma della quantità di moto che soddisfa le condizioni 1) e 2) è:

$$\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v} \tag{6}$$

L'espressione (6) è simile a quella Classica, ma, a differenza del caso classico [eq.(2)], il coefficiente m, che viene detto ancora *massa inerziale*, non è costante ma dipende dalla velocità v del corpo secondo la legge:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0 \gamma \tag{7}$$

dove m_0 è una costante che viene detta *massa a riposo* del corpo poichè essa rappresenta la massa del corpo quando esso è fermo [$v = 0 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow m = m_0$ in eq.(7)]. La dimostrazione della (6) con m dato dalla (7) è piuttosto noiosa e viene omessa, comunque, gli studenti interessati la possono trovare in uno qualunque dei testi consigliati. Ovviamente, per $v << c$, il fattore relativistico γ diventa indistinguibile da 1 e la massa inerziale m definita in eq.(7) diventa praticamente uguale alla massa a riposo m_0. Dunque, in questo caso, la quantità di moto si riduce all'espressione classica $\boldsymbol{p} = m_0\, \boldsymbol{v}$ con m_0=costante, come richiesto dalla condizione 2). La massa a riposo m_0 è quella che si misura nel sistema di riferimento in cui essa è ferma, ad esempio, utilizzando una bilancia a due bracci.

Una forma alternativa per la quantità di moto relativistica.

Come visto sopra, la nuova espressione della quantità di moto relativisticamente corretta $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m_0\gamma\, \boldsymbol{v}$ contiene una massa $m = m_0\, \gamma$ che dipende dalla velocità. In realtà, la stessa espressione potrebbe anche essere riscritta in una forma del tutto equivalente ma concettualmente diversa senza dover definire una massa dipendente dalla velocità. Infatti, la velocità $d\boldsymbol{r}/dt$ che appare nella (6) rappresenta il rapporto fra lo spostamento infinitesimo $d\boldsymbol{r}$ di un corpo in un dato riferimento e l'intervallo di tempo dt misurato nello stesso riferimento, cioè da due orologi distinti posti, rispettivamente, nel punto iniziale e finale del vettore spostamento $d\boldsymbol{r}$. D'altra parte, sappiamo che il corrispondente intervallo di tempo misurato da un orologio solidale con il corpo è l'intervallo di tempo proprio dt_0 che è legato a dt dalla relazione $dt = dt_0\, \gamma$. Ma allora, la (6) si può scrivere nella forma equivalente:

$$\boldsymbol{p} = m_0 \gamma \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = m_0 \frac{d\boldsymbol{r}}{dt_0} \tag{8}$$

L'ultimo membro a destra rappresenta una definizione alternativa della quantità di moto concettualmente diversa dalla (6). In questa nuova forma, la massa del corpo ha un valore costante m_0 che non cambia con la velocità qualunque sia la velocità del corpo, come avveniva nella Meccanica Newtoniana. Quello che cambia è la definizione della velocità che, ora, è definita in termini dell'intervallo di tempo proprio dt_0, cioè del tempo misurato da un orologio solidale con esso. Le due diverse forme di quantità di moto vengono utilizzate correntemente in letteratura dai diversi autori. Noi, nel seguito, utilizzeremo la (6) che ha il vantaggio di essere molto simile all'espressione classica e, quindi, di più facile memorizzazione.

Il moto di un corpo soggetto all'azione di una forza costante.

Nel caso classico, l'equazione del moto di un corpo è data dalla II legge di Newton. Sembra naturale assumere che l'equazione del moto di un corpo relativistico sia data ancora dalla legge di Newton (1) ma con la nuova espressione della quantità di moto in eq.(6) e (7). La correttezza di questa ipotesi e' stata ampiamente confermata da un gran numero di risultati sperimentali nel corso del secolo precedente. Vediamo, ora, cosa prevede la nuova teoria relativistica nel caso di un corpo sottoposto ad una forza costante (ad esempio una particella carica sottoposta ad un campo elettrico uniforme diretto lungo un dato asse x). Supponiamo che la particella sia inizialmente ferma in $x = 0$ ($v = 0$ al tempo $t = 0$). In questo caso il moto avviene interamente lungo l'asse x e l'equazione del moto lungo tale asse è:

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{9}$$

Integrando entrambi i membri della (9) rispetto al tempo fra l'istante iniziale $t = 0$ ed un generico tempo t e tenendo conto che la forza è costante, cioè indipendente dal tempo, si trova

$$\int_0^t F dt = \int_0^t \frac{dp}{dt} dt \qquad \Longrightarrow \qquad Ft = p(t) - p(0) \tag{10}$$

dove $p(t)$ e $p(0)$ sono i valori della quantità di moto al tempo t e all'istante iniziale $t = 0$. La (10) è la nota legge della meccanica classica che stabilisce che l'impulso della forza (Ft) è uguale alla variazione della quantità di moto. Dunque, questa importante legge resta valida nella Fisica relativistica. Poichè, per ipotesi, il corpo era inizialmente fermo [$p(0)=0$ in eq.(10)], il valore della quantità di moto al generico istante t è pari a:

$$p(t) = F\,t \tag{11}$$

Adesso, consideriamo separatamente i due casi Classico e Relativistico:

I) ***Caso Classico***.

In tal caso, $p = m_0 v$, dunque sostituendo tale espressione in equazione (11) si ottiene che la velocità del corpo aumenta linearmente nel tempo con accelerazione costante e pari ad $a = F/m_0$ come in eq.(12):

$$v(t) = \frac{F}{m_0} t \tag{12}$$

L'equazione (12) prevede che, al passare del tempo la particella aumenti continuamente la sua velocità senza nessun limite come mostrato dalla retta tratteggiata in figura 1. In particolare, per $t > t_0 = m_0 c/F$, la velocità $v(t)$ diventa magiore della velocità della luce nel vuoto.

II) ***Caso Relativistico***

In tal caso, se si sostituisce $p = m_0 \gamma v$ in eq.(11), si trova $v(t) = (F\,t)/(m_0\,\gamma)$, cioè l'equazione implicita nell'incognita $v(t)$ e nel tempo t:

$$v(t) = \frac{F\sqrt{1-\left(v(t)/c\right)^2}}{m_0} t \tag{13}$$

Per trovare l'espressione esplicita della velocità $v(t)$ ad un generico istante t, si deve risolvere l'equazione (13) ricavando il valore di v (t) in funzione del tempo t. Elevando al quadrato entrambi i membri della (13) si trova:

$$m_0^2 v^2 = F^2 t^2 - \frac{F^2 t^2}{c^2} v^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 + \frac{F^2 t^2}{c^2}}} \qquad (14)$$

la (14) mostra che, contrariamente alle previsioni della Fisica Classica, la velocità non varia linearmente con il tempo e resta sempre inferiore al valore della velocità della luce nel vuoto, come avevamo già anticipato nelle lezioni precedenti. In particolare, l'accelerazione del corpo (pendenza istantanea della curva $v(t)$ in figura 1) non è costante nel tempo ma decresce all'aumentare della velocità. Infatti, man mano che la particella aumenta la sua velocità, la massa inerziale $m = m_0\,\gamma$ aumenta. L'andamento qualitativo di v/c in funzione del tempo (espresso in unità arbitrarie) è mostrato in figura 1. L'unità di tempo in figura 1 corrisponde al valore di tempo $t_0 = m_0 c/F$ in corrispondenza del quale il denominatore in equazione (14) diventa pari a $\sqrt{2m_0^2}$, cioè si riduce di $1/\sqrt{2}$ rispetto al valore che aveva all'istante iniziale $t = 0$. Per tempi sufficientemente piccoli (t <<1 nelle unità arbitrarie in fig.1 che corrisponde al tempo in secondi pari a $t << m_0 c/F$) , la curva continua $v\ (t\ )$ in figura 1 è praticamente coincidente con la retta tratteggiata che descrive il comportamento previsto dalla Fisica Classica. Infatti, se il tempo è piccolo ($Ft << m_0 c$), il contributo dipendente dal tempo nel denominatore in eq.(14) è trascurabile rispetto a m_0^2. In tal caso il denominatore diventa circa uguale a $\sqrt{m_0^2} = m_0$ e la (14) si riduce alla previsione classica in eq.(12) con la velocità che cresce linearmente nel tempo (accelerazione costante). Questo è proprio quanto ci si aspetta perchè, per tempi piccoli, la velocità del corpo è molto minore della velocità della luce e, quindi, è ben descritta dalle leggi della Fisica Classica. Man mano che aumenta la velocità del corpo, però, a causa dell'aumento della massa inerziale, l'accelerazione diminuisce e la velocità cresce più lentamente avvicinandosi sempre più al valore limite $v = c$ che viene raggiunto solo nel limite di tempi infiniti. Infatti, per t molto grande, possiamo trascurare m_0^2 nel denominatore in eq.(14) e v in eq.(14) diventa $v \approx Ft/(Ft/c) = c$. Cioè, la velocità v diventa praticamente uguale a c anche se sempre leggermente inferiore (il valore $v = c$ rappresenta un limite asintotico). Dunque, si può concludere che *la velocità di qualunque corpo materiale che abbia una massa inerziale a riposo diversa da zero non può mai raggiungere valori uguali o superiori a c*.

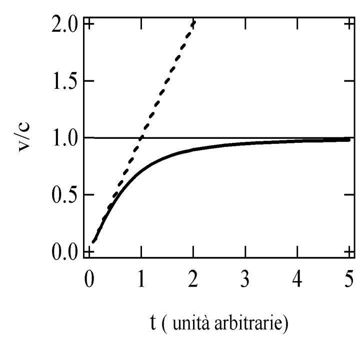

Figura 1

Con gli ordinari corpi macroscopici (proiettili, automobili, aerei ....) le velocità raggiunte per effetto delle forze agenti sono di gran lunga minori della velocità della luce ($v/c << 10^{-5}$) e gli effetti relativistici sono trascurabili. In questa regione di velocità, che corrisponde ad istanti di tempo molto piccoli ($t << 10^{-5}$ u.a. in fig.1), la curva continua è praticamente coincidente con la retta prevista dalla Fisica di Newton (retta tratteggiata in fig.1). Ben diversa è la situazione per quanto riguarda particelle elementari come elettroni e protoni. Queste particelle hanno masse a riposo piccolissime (massa a riposo dell'elettrone $m_e = 9.109\ 10^{-31}$ kg, massa a riposo del protone $m_p = 1.672\ 10^{-27}$ kg), ed è possibile, utilizzando opportuni acceleratori di particelle che sfruttano forze elettriche e magnetiche, accelerarle fino a raggiungere velocità prossime a quelle della luce. In tal modo è stato possibile verificare con notevole accuratezza che il moto di queste particelle è ben descritto dalla (14) anche per velocità prossime a quella della luce nel vuoto. Questi risultati confermano pienamente la validità della legge $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ con la quantità di moto $\boldsymbol{p}$ data dall'espressione relativistica $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$.

Differenze qualitative e quantitative fra la legge della dinamica Relativistica e quella Classica.

Come abbiamo visto, per velocità confrontabili con quella della luce, la legge $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ della dinamica relativistica fornisce risultati quantitativamente molto diversi da quelli previsti dalla II legge di Newton. E' importante anche sottolineare che la nuova legge prevede anche nuovi effetti qualitativamente diversi. Infatti, nella meccanica

Classica, una particella di massa $\boldsymbol{m}_0$ sottoposta ad una forza $\boldsymbol{F}$ si muove con accelerazione proporzionale alla forza e data da:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m_0 \qquad (15)$$

Dunque, in meccanica Classica, il vettore accelerazione $\boldsymbol{a}$, che rappresenta la variazione di velocità nell'unità di tempo, è sempre parallelo al vettore forza $\boldsymbol{F}$. Questa proprietà non è più verificata in Meccanica Relativistica. Infatti, se il modulo della velocità del corpo varia nel tempo allora anche la massa $m = m_0\gamma$ varia nel tempo e, quindi,

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v}\right) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v} \qquad (16)$$

ma *dv/dt* è proprio l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ del corpo e, quindi, dalla (16) si deduce:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v} \qquad (17)$$

Dunque, in tutti i casi in cui la velocità $\boldsymbol{v}$ di un corpo non è parallela alla forza $\boldsymbol{F}$, l'accelerazione non è parallela ad $\boldsymbol{F}$. Questo avviene, ad esempio, nel caso di una particella carica che si muove iniziamente lungo una direzione parallela alle armature di un condensatore piano e, ad un dato istante, entra nello spazio compreso fra le armature. Ovviamente, anche questo nuovo effetto previsto dalla Meccanica Relativistica diventa apprezzabile solamente se le velocità del corpo non sono troppo piccole rispetto a quelle della luce. In caso contrario, $m \approx m_0$ ed è facile mostrare che il contributo $1/m$ (dm/dt) $\mathbf{v}$ in eq.(17) può essere trascurato rispetto a $\boldsymbol{F}/m$. Quindi, in questo limite, la (17) torna a coincidere con il risultato classico in eq.(15).

In conclusione, la descrizione "esatta" del moto di un corpo materiale si può ottenere solamente utilizzando la legge relativistica in eq.(16) che è certamente più complicata della legge di Newton e prevede comportamenti quantitativamente e qualitativamente diversi per velocità delle particelle confrontabili con c. Tuttavia, per corpi che si muovono con velocità molto più piccole di quella della luce, l'equazione relativistica è quasi coincidente con l'equazione Classica. In tali casi, siccome le leggi Classiche sono decisamente più semplici, conviene utilizzare queste leggi per descrivere il moto del corpo. In particolare, nel caso degli ordinari corpi che sono oggetto della nostra esperienza quotidiana (automobili, aerei, proiettili....), il rapporto v/c è estremamente piccolo ($<< 10^{-5}$) e le leggi classiche, seppur approssimate, forniscono risultati estremamente accurati. Questo è il motivo per cui, per lo studio del moto dei corpi ordinari, si continuano ancora oggi ad utilizzare con successo le leggi di Newton.

***Moto di una carica elettrica in un campo magnetico uniforme*.**

Gli esperimenti effettuati nei secoli precedenti alla formulazione della Teoria della Relatività hanno mostrato che la forza elettromagnetica agente su una carica elettrica q che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ in presenza di un campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e di un campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ è data dalla famosa forza di Lorentz:

$$\boldsymbol{F} = q(\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,) \qquad (18)$$

Questa espressione della forza era stata dedotta studiando il moto di cariche elettriche che si muovono a velocità molto piccole rispetto a quelle della luce. Gli esperimenti effettuati nel secolo scorso, però, hanno mostrato che essa è esatta, cioè continua a valere anche nel caso di cariche che si muovano a velocità comparabili con c. Più in generale, si può dimostrare che le leggi di Maxwell dell'elettromagnetismo sono relativisticamente corrette, cioè la loro forma non cambia se esse sono scritte in sistemi di riferimento inerziali diversi. Analizziamo, ora, il caso particolarmente importante di un corpo puntiforme con carica elettrica q e massa a riposo m_0 che si muove con una data velocità $\boldsymbol{v}$ perpendicolarmente ad un campo di induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B}$. Supponiamo, ad esempio, che il campo di induzione magnetica sia diretto lungo l'asse z e che, ad un dato istante t =0, la particella si muova lungo l'asse x. Non essendo presenti campi elettrici, la Forza di Lorentz in eq.(18) si riduce alla sola forza magnetica:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad (19)$$

questa forza è sempre perpendicolare alla velocità del corpo e, quindi, non compie lavoro. Ne consegue che l'energia cinetica deve restare costante durante tutto il moto. Dunque, il modulo della velocità resta costante e , con esso, il valore della massa relativistica. Ma allora, dm/dt =0 e l'equazione del moto (17) si riduce alla forma classica $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

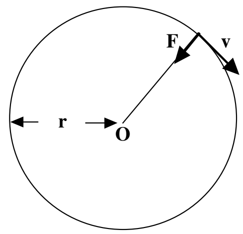

figura 2.

Ma un moto con velocità costante e accelerazione costante sempre perpendicolare al vettore velocità è un moto circolare ed uniforme. Quindi il moto è lo stesso previsto dalla Meccanica Classica con l'unica differenza che, ora, la massa del corpo è $m = m_0\,\gamma$. Come è noto, in un moto circolare ed uniforme (vedi figura 2) l'accelerazione è solamente centripeta diretta verso il centro e di modulo $\omega^2 r$, dove ω è la velocità angolare e r è il raggio del cerchio. L'equazione del moto $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ diventa, perciò:

$$q\omega rB = m_0\gamma\omega^2 r \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{qB}{m_0\gamma} \tag{20}$$

dove abbiamo utilizzato l'identità $v = \omega r$. Nel caso di velocità piccole rispetto a c, γ in eq.(20) può essere sostituito con $\gamma = 1$ e la (20) si riduce alla nota espressione classica $\omega = q/(m_0 B)$. Nel caso di velocità grandi, invece, γ può essere anche molto maggiore di 1 e, conseguentemente, le velocità angolari previste dalla Fisica relativistica [eq.(20)] possono essere anche molto più piccole di quelle previste dalla Fisica classica e dipendono dal valore della velocità della particella. Analogamente, dalla (20) si deduce che il raggio dell'orbita circolare descritta dalla particella è:

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{m_0\gamma\ v}{qB} = \frac{p}{qB}$$

L'energia Cinetica Relativistica.

Nella Fisica Classica risulta molto utile introdurre la grandezza *Energia Cinetica K* per descrivere il moto di un corpo. L'energia cinetica è uno scalare definito come il lavoro che deve essere fatto da un operatore per portare un corpo dallo stato di quiete ($\boldsymbol{v} = 0$) a quello di moto ($\boldsymbol{v} \neq 0$), quindi:

$$K = \int_0^{tf} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{s} = \int_0^{tf} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}.d\boldsymbol{s} \tag{21}$$

dove $\boldsymbol{F}$ è la forza che viene applicata dall'operatore, $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}dt$ è lo spostamento infinitesimo del corpo nell'intervallo infinitesimo di tempo dt e gli estremi di integrazione 0 e t_f indicano, rispettivamente, l'istante iniziale $t = 0$ in cui il corpo è fermo ($\boldsymbol{v} = 0$) e finale $t = t_f$ in cui il corpo ha raggiunto la velocità finale $\boldsymbol{v}$. Come è noto, sostituendo al posto di $\boldsymbol{p}$ in eq. (21) l'espressione classica della quantità di moto $\boldsymbol{p} = m_0\,\boldsymbol{v}$, si trova che l'energia cinetica è data dall'espressione:

$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{22}$$

Per ottenere la (22) abbiamo utilizzato l'espressione $\boldsymbol{p} = m_0\,\boldsymbol{v}$ che, come abbiamo visto, risulta corretta solamente se $v <<$ c. Ma allora, ci dobbiamo aspettare che la (22) rappresenti una forma approssimata della vera energia cinetica di un corpo. Per ottenere la nuova forma relativisticamente corretta dell'energia cinetica, possiamo partire ancora dalla definizione in eq.(21) ma, stavolta, dobbiamo sostituire al posto di $\boldsymbol{p}$ la forma relativistica $\boldsymbol{p} = m_0\,\gamma\boldsymbol{v}$. Per semplicità, consideriamo il caso in cui l'operatore spinga il corpo sempre nella stessa direzione di modo che il moto avvenga sempre lungo un dato asse x e si possa sostituire ai vettori $\boldsymbol{p}$ e $d\boldsymbol{s}$ in equazione (21) le componenti p e dx lungo l'asse x. In questo caso, la (21) diventa:

$$K = \int_0^{tf} \frac{d\left(m_0 \gamma v\right)}{dt} dx \quad \Longrightarrow \quad K = \int_0^{tf} \frac{d\left(m_0 \gamma v\right)}{dt} v dt\,. \tag{23}$$

Per ottenere l'espressione a destra in eq.(23), abbiamo sfruttato il fatto che lo spostamento infinitesimo dx di un corpo che si muove con velocità v è $dx = v\, dt$. Dunque l'energia cinetica è pari all'integrale nel tempo della funzione

$$P(t) = Fv = \frac{d\left(m_0 \gamma v\right)}{dt} v \tag{24}$$

che rappresenta la *potenza istantanea* sviluppata dall'operatore. Ora, sfruttando la definizione di γ($\gamma=1/((1-(v/c)^2)^{1/2})$, si può mostrare che $P(t)$ è la derivata temporale della funzione $f(t)=m_0\gamma(t)\, c^2$ e , quindi, per il Teorema Fondamentale dell'integrazione, l' integrale di $P(t)$ in eq.(23) è pari a $f(t_f)-f(0)$. Si tratta, perciò, di dimostrare l'identità:

$$\frac{d\left(m_0 \gamma \;\; v\right)}{dt} v = \frac{d\left(m_0 \gamma \;\; c^2\right)}{dt} \tag{25}$$

Esercizio: Utilizzando la definizione di γ in termini della velocità v e tenendo conto che $v = v(t)$ è una funzione del tempo t, lo studente verifichi l'identità (25).

Sostituendo il secondo membro della (25) al posto dell'integrando nel membro a destra in eq.(23) e utilizzando il Teorema Fondamentale dell'integrazione $\left[\int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}(A)dt = A(t_f) - A(t_i)\right]$ si trova

$$K = m_0 \gamma(v) c^2 - m_0 \gamma(0) c^2 \tag{26}$$

dove v è la velocità del corpo al tempo finale $t = t_f$, mentre $\gamma(0)=1$ è il valore di γ all'inizio quando il corpo ha velocità $v = 0$. Dunque, in definitiva, l'energia cinetica relativistica di un corpo di massa a riposo m_0 e velocità v dipende solamente dal modulo della velocità del corpo (come avveniva in Fisica Classica) ed è pari a:

$$K = mc^2 - m_0c^2 \tag{27}$$

dove m è la massa relativistica

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{28}$$

Apparentemente, potrebbe sembrare che la (27) sia completamente diversa dall'espressione classica dell'energia cinetica $K = m_0v^2/2$ in eq.(22). In realtà, è facile mostrare che la (27) si riduce alla (22) nel limite $v/c \to 0$. Per dimostrare questo importante aspetto, utilizzeremo una importante relazione matematica che lo studente dovrebbe cercare di memorizzare perchè essa risulta utilissima sia nello studio della Relatività che in molti altri campi della Fisica (Elettromagnetismo, Ottica ...). Si può, infatti, dimostrare che, se $x << 1$, allora la funzione $(1+x)^{\alpha}$ soddisfa la relazione (sviluppo di Taylor della funzione):

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + O(x^2) \tag{29}$$

dove $O(x^2)$ è un contributo infinitesimo di ordine superiore, cioè un contributo che diventa trascurabile rispetto a αx se $x << 1$. Dunque, se $x << 1$, al posto della funzione $(1+x)^{\alpha}$ si può sostituire il valore approssimato $1 + \alpha x$. Per esempio, se $x = 0.01$, il valore esatto di $(1+x)^{1/2}$ è 1.00498, mentre il valore che si ottiene con la formula approssimata è $1+\alpha x=1+0.01/2=1.00500$ che, come si vede è molto vicino al valore esatto. L'approssimazione diventa ancora migliore quanto più si riduce il valore di x. Ad esempio, per x =0.0001, il valore esatto di $(1+x)^{1/2}$ è 1.000049999, mentre il valore fornito dalla formula approssimata è 1.00005 che è praticamente uguale al precedente (la differenza fra i due valori è solamente nella nona cifra decimale).

La funzione γ che appare nelle formule relativistiche è proprio del tipo descritto in precedenza. Infatti, se si pone $x = -(v/c)^2$, la funzione γ si scrive $\gamma = (1+x)^{-1/2}$ che corrisponde a $(1+x)^{\alpha}$ con α =-1/2. Per x <<1, la funzione γ è praticamente uguale a :

$$\gamma = 1 + x/2 = 1 + \frac{(v/c)^2}{2} \tag{30}$$

Dunque, nel limite $v << c$ (limite classico), la massa relativistica m in eq.(28) diventa

$$m = m_0 \gamma = m_0 \left(1 + \frac{(v/c)^2}{2} \right) \tag{31}$$

che, sostituita nell'espressione dell'energia cinetica in eq.(27) diventa

$$mc^2 - m_0 c^2 = m_0 \left(1 + \frac{(v/c)^2}{2} \right) c^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{32}$$

che è proprio la forma nota dell'energia cinetica classica di un corpo di massa m_0. Dunque, l'energia cinetica relativistica in eq.(27) si riduce alla nota forma dell'energia cinetica Classica nel limite $v/c \rightarrow 0$.

La validità della (27) è stata verificata sperimentalmente (Bertoni, 1964). In questo esperimento, un fascio di elettroni, accelerato in un acceleratore lineare, feniva fatto collidere con un bersaglio. L'energia cinetica posseduta dagli elettroni si convertiva, quindi, in energia termica del bersaglio. Nell'esperimento venivano misurate la velocità degli elettroni prima di incidere sul bersaglio e l'energia termica acquistata dal bersaglio (con metodi calorimetrici). In tal modo è stato possibile dimostrare che l'energia acquistata dal bersaglio è proprio uguale al valore K in eq.(26). Numerosi esperimenti successivi utilizzando metodi sempre più precisi hanno sempre confermato pienamente la validità della (27).

Si noti che m tende ad infinito per v che tende a c, dunque l'energia cinetica di un corpo di massa $m_0 \neq 0$ diventa infinita in questo limite. Ne consegue che, per fare acquistare una velocità pari a c ad un corpo, sarebbe necessario fornirgli un'energia infinita. Questo è il motivo per cui la velocità della luce rappresenta una velocità limite per qualunque corpo materiale.

L'energia totale E di un corpo.

La relazione (27) mostra che l'energia cinetica di un corpo è la differenza fra il valore di $E = mc^2$ calcolato quando il corpo si muove con velocità v e quello calcolato quando il corpo è fermo ($E_0 = m_0 c^2$). Einstein propose di interpretare questo risultato assumendo che

$$E = m c^2 \tag{33}$$

rappresenti ***l'energia totale*** posseduta dal corpo, cioè la somma dell'energia interna e di quella cinetica. Con questa interpretazione, un corpo fermo possiede un'energia $E_0 = m_0 c^2$ (**energia a riposo**) proporzionale alla sua massa a riposo m_0 e, se esso acquista una data velocità, la sua energia totale diventa la somma dell'energia a riposo e di quella cinetica. Dunque vale l'uguaglianza:

$$E = m_0 c^2 + K \tag{34}$$

Si noti che, nella Fisica Classica, l'energia totale di un corpo è sempre definita a meno di una costante arbitraria. Al contrario, nel caso della Fisica relativistica, l'equazione (34) fissa univocamente il valore dell'energia di una data particella di massa a riposo m_0 che si muove con velocità v, dunque fissa in modo univoco il valore della costante additiva.

La legge relativistica $E = mc^2$ è sicuramente il risultato più famoso della Teoria della Relatività di Einstein e rappresenta un'idea veramente rivoluzionaria perchè essa stabilisce per la prima volta una relazione diretta fra la massa di un corpo e la sua energia. Il fatto che la massa aumenti all'aumentare della velocità è, quindi, conseguenza del fatto che il corpo aumenta la sua energia cinetica. Risulta spesso conveniente esprimere la massa di un corpo in unità di energia. Se si fa questa scelta, ad esempio, la massa a riposo di un elettrone risulta pari a $M_0=m_0c^2=$ 0.511 MeV=$0.511\text{x}10^6$ eV, dove, ricordiamo che 1 eV rappresenta l'energia acquistata da un elettrone che viene accelerato da una differenza di potenziale di 1 V. A parte la presenza di un fattore costante nella (33) (c^2), la massa e l'energia risultano la stessa cosa. Questo risulta ancora più evidente se decidiamo di misurare il tempo in metri-luce. In questo caso, come abbiamo visto, la velocità della luce diventa un parametro adimensionale pari ad 1 e, in queste unità di misura, $E = m$.

Esercizio: Un elettrone parte da fermo ed è accelerato in una differenza di potenziale pari a ΔV. Per quale valore di ΔV la massa finale dell'elettrone risulta pari al doppio di quella a riposo? Quale è il valore della velocità finale dell'elettrone?

Urti anelastici e conservazione dell'energia in Relatività.

L'ipotesi fatta in eq.(33) trova una interessante interpretazione fisica se si analizzano gli urti fra particelle in cui non si conserva l'energia cinetica (urti anelastici). Ad esempio, possiamo considerare due particelle identiche A e B di massa a riposo m_0 che, in un dato riferimento S' si muovono in verso opposto lungo un asse x' con velocità opposte e, rispettivamente pari a $v'_A=v'_0$ e $v'_B=-v'_0$ (figura 3a).

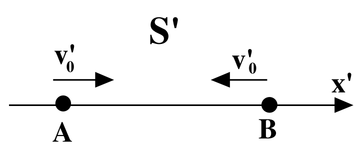

Figura 3a

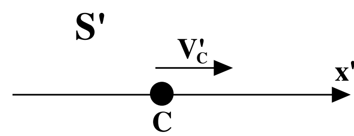

Figura 3 b

Consideriamo, inoltre, un urto ***totalmente anelastico*** dove l'energia cinetica non si conserva e le velocità dei due corpi dopo l'urto sono le stesse. Dunque, dopo l'urto, i corpi si trovano uniti e formano un'unica particella che indicheremo con la lettera C avente massa a riposo M_0 e velocità V'_C (figura 3b). La conservazione della quantità di moto nel sistema S' si scrive:

$$m_0\, \gamma(v'_0)\, v'_0 - m_0\, \gamma(v'_0)\, v'_0 = 0 = M\, V'_C \qquad \Longrightarrow \qquad V'_C = 0 \tag{35}$$

Dunque, nel sistema S', la particella C resta ferma e la sua massa M coincide, perciò, con la massa a riposo M_0. Nella Fisica Classica, la massa della particella risultante è pari alla somma delle masse delle due particelle A e B, cioè $M_0 = 2m_0$. Adesso vedremo che questo non può essere vero in Fisica Relativistica. In particolare, se la conservazione della quantità di moto deve valere in qualunque riferimento inerziale, allora la massa a riposo del corpo C dovrà essere maggiore della somma delle masse a riposo delle particelle A e B. Per dimostrare questa importante proprietà e calcolare il valore della massa a riposo M_0, consideriamo un diverso riferimento inerziale S dove la particella B è inizialmente ferma (figura 4).

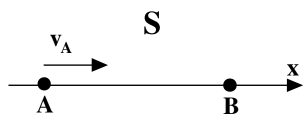

Figura 4a

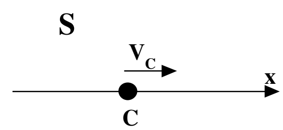

Figura 4c

In questo riferimento la particella B prima dell'urto è ferma e, quindi, la sua velocità è

$$v_B=0 \tag{36}$$

mentre la velocità v_A della particella A si potrà calcolare utilizzando la legge di trasformazione delle velocità Relativistica trovata in precedenza e che riportiamo qui sotto per comodità:

$$v = \frac{v'+v_T}{1+\frac{v'v_T}{c^2}} \tag{37}$$

dove v_T rappresenta la velocità di trascinamento del riferimento S' rispetto ad S, v' è la velocità misurata in S' e v è quella misurata in S. Ora il sistema S è stato scelto in modo tale che, in esso, la particella B appaia ferma prima dell'urto. Dunque esso deve viaggiare rispetto ad S' con la stessa velocità $-v'_0$ della particella B. Ma allora S' viaggia rispetto a S con velocità uguale ed opposta, cioè $v_T = v'_0$. Nel nostro caso, il corpo C è fermo rispetto ad S' [eq.(35)], dunque esso si muove rispetto a S proprio con la velocità di trascinamento v_T come si puo' anche dedurre applicando la (37) con $v' = V'_C = 0$. Dunque

$$V_C = v_T = v'_0 \tag{37}$$

La velocità iniziale v_A del corpo A si calcola sostituendo il valore $v' = v'_0$ in eq.(37) insieme a $v_T = v'_0$. In tal modo si trova:

$$v_A = \frac{2v'_0}{1+\left(\frac{v'_0}{c}\right)^2} \tag{38}$$

Ora, se vogliamo che la conservazione della quantità di moto resti vera anche nel riferimento S, deve risultare:

$$m_0\,\gamma(v_A)\,v_A + m_0\,\gamma(v_B)\,v_B = M_0\,\gamma(V_C)\,V_C \quad\Rightarrow\quad \frac{m_0 v_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v_A}{c}\right)^2}} = \frac{M_0 v'_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v'_0}{c}\right)^2}} \tag{39}$$

dove si è utilizzata la condizione $V'_C = v'_0$ di eq.(37). Sostituendo il valore di v_A trovato in eq.(38) nella (39), dopo semplici passaggi algebrici, si trova:

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v'_0}{c}\right)^2}} \tag{40}$$

Dunque, la massa a riposo del corpo C è più grande della somma delle masse a riposo delle due particelle iniziali ($M_0 > 2m_0$)! Se, con Einstein, assumiamo che il prodotto della massa a riposo per c^2 sia l'energia totale di una particella, allora il risultato trovato in eq. (40) ci dice che l'energia a riposo del corpo C è maggiore della somma delle energie a riposo dei due corpi A e B. D'altra parte, l'equazione (40) è suscettibile di una una semplice interpretazione: *L'energia totale del sistema si è conservata nell'urto!*. Consideriamo, ad esempio, il sistema S' dove le particelle A e B si muovevano in verso opposto con velocità di modulo v'_0 e la particella C restava ferma. In S' l'energia totale del sistema prima dell'urto è pari alla somma delle energie a riposo delle particelle e delle loro energie cinetiche, cioè :

$$E_i = 2\,m_0\,\gamma(v'_0)\,c^2 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v'_0}{c}\right)^2}} \tag{41}$$

Dopo l'urto il corpo C resta fermo in S' e, quindi, l'energia totale finale è l'energia a riposo del corpo C, cioè

$$E_f = M_0 c^2 \tag{42}$$

Si verifica immediatamente che, se vale la (40), allora

$$E_f = E_i \tag{43}$$

dunque, anche negli urti anelastici, l'energia totale del sistema di corpi si conserva.

In conclusione, se vogliamo che la legge di conservazione della quantità di moto valga in qualunque riferimento inerziale, allora anche l'energia totale dei corpi si deve conservare. Dunque, al contrario di quanto avveniva in meccanica Classica, ***in qualunque tipo di urto si deve conservare sia la quantità di moto relativistica che l'energia relativistica***. Dunque la Conservazione dell'Energia rappresenta un principio universale valido per qualunque fenomeno fisico. Inoltre, si può dimostrare che la conservazione dell'energia vale in qualunque riferimento inerziale, in accordo con il Principio di Relatività.

Nella prossima lezione vedremo alcuni importanti esempi di applicazione dell'equazione relativistica $E = mc^2$.