

LEZIONE IV

LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO-TEMPO.

I Quadrivettori.

Nella Fisica Classica di Newton-Galileo, il tempo t è lo stesso per ogni osservatore e, quindi, per descrivere il moto di un corpo (punto materiale) in diversi sistemi inerziali è sufficiente trovare come cambiano le coordinate spaziali x , y e z che individuano la posizione del corpo ad un generico istante t . Il problema è, quindi, intrinsecamente tri-dimensionale e completamente descritto dal **vettore tri-dimensionale** $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Nel caso della Fisica Relativistica, invece, anche il tempo dipende dalla posizione in cui esso viene misurato e, quindi, per poter descrivere interamente il moto di un corpo non basta conoscere le sue coordinate spaziali x , y , z in un dato Riferimento inerziale ma si deve anche conoscere il tempo misurato da un orologio che si trovi nel punto di coordinate x, y, z nello stesso Riferimento. Se cambiamo riferimento, non solo cambieranno le coordinate spaziali ma anche quella temporale. Quindi, mentre la Fisica Classica è intrinsecamente tri-dimensionale, **la Fisica Relativistica è quadri-dimensionale**. In particolare, per individuare completamente la posizione di un corpo nello spazio-tempo relativistico rispetto ad una certa origine si dovranno dare 4 coordinate: tre coordinate spaziali x, y, z e una temporale t . Possiamo, perciò, introdurre un oggetto rappresentato da quattro coordinate

$$\mathbf{R} = (x, y, z, t) \quad (1)$$

che viene detto **quadrivettore** nello spazio-tempo [come (x, y, z) rappresentava un vettore nello spazio]. Ora, come abbiamo già osservato, le dimensioni delle coordinate spaziali (metri) sono diverse da quelle delle coordinate temporali (secondi). La differenza ha un'origine storica dovuta al fatto che, prima della Fisica Relativistica, il tempo e lo spazio apparivano entità completamente differenti e, quindi, era apparso naturale definirli utilizzando unità di misura diverse. Adesso, invece, abbiamo trovato che, nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, le coordinate spaziali e temporali si vengono a mescolare le une nelle altre attraverso le Trasformazioni di Lorentz in modo assai simile a quanto avviene per le coordinate spaziali x, y, z in una rotazione. Dunque, in Relatività, risulta più naturale usare per le coordinate spaziali e temporali le stesse unità. In effetti, con questa scelta, le trasformazioni di Lorentz per la variabile spaziale x e per quella temporale risultano totalmente simmetriche. Ad esempio, possiamo usare come unità di tempo il metro-luce che corrisponde al tempo impiegato dalla luce nel vuoto per percorrere un metro. In alternativa, potremmo anche continuare a definire il secondo come unità di tempo e utilizzare come unità di lunghezza il secondo-luce definito come lo spazio percorso dalla luce in un secondo (circa 300.000 km). Qui decidiamo di misurare il tempo in metri-luce. Se il tempo espresso in secondi è t , il corrispondente tempo espresso in metri (metri-luce) è

$$\tau = ct, \quad (2)$$

dove $c \approx 300.000$ Km/s. Con questo nuovo tempo, espresso in metri, la velocità $v = \Delta x / \Delta \tau$ di un corpo risulta un numero puro adimensionale poichè Δx e $\Delta \tau$ hanno le stesse dimensioni. In particolare, $v = \Delta x / \Delta \tau = \Delta x / (c \Delta t) = V/c$ dove V indica la velocità del corpo nelle unità standard (m/s). Dunque, la velocità di un corpo nelle nuove unità di misura viene a coincidere con il parametro relativistico β definito in precedenza. In particolare, nelle nuove unità la velocità della luce è pari a $c/c = 1$. Se utilizziamo queste nuove unità di misura, quando diremo che un corpo viaggia con velocità $v = 0.1$, significherà che esso viaggia con una velocità pari a 0.1 volte quella della luce, cioè circa 30.000 km/s. Per ottenere la forma delle equazioni di Lorentz con il tempo misurato in metri-luce, basterà, perciò, sostituire in esse al posto di t il nuovo tempo τ ($\tau = ct$), e al posto di c il valore $c=1$ ricordandosi che, ora, la velocità v rappresenta il parametro adimensionale $\beta = V/c$. Per ritornare alle relazioni scritte nelle solite unità, basterà sostituire al posto di τ il valore ct e al posto di v il valore V/c . Riassumendo, nelle nuove unità valgono le uguaglianze:

$$c = 1, \quad \beta = v, \quad \gamma = 1 / (1 - v^2) \quad (3)$$

mentre le equazioni di Lorentz diventano:

$$x' = \gamma(x - v\tau) \quad (4)$$

$$y' = y \quad (5)$$

$$z' = z \quad (6)$$

$$\tau' = \gamma(\tau - vx) \quad (7)$$

Si noti che, con questa ridefinizione dell'unità di tempo, le equazioni di Lorentz hanno raggiunto una forma totalmente simmetrica nello scambio fra la coordinata spaziale x e quella temporale τ . Questo mette ulteriormente in evidenza il

fatto che le coordinate temporali nella Relatività non giocano un ruolo diverso da quelle spaziali come avveniva, invece, nella Fisica Classica.

Gli Invarianti Relativistici.

La trasformazione di Lorentz dal riferimento di coordinate quadridimensionali x, y, z, t a quello di coordinate x', y', z', t' ricorda la trasformazione delle coordinate xy in una rotazione attorno ad un asse z . Infatti, nel caso delle rotazioni attorno all'asse z , le coordinate x, y si trasformavano in nuove coordinate x', y' che erano funzioni lineari di x ed y (vedi Lezione I). Analogamente, nel caso delle (4)-(7), le coordinate x, τ si trasformano con una legge simile a quella delle rotazioni nelle nuove coordinate spazio-temporali x', τ' . Introducendo i numeri complessi, l'analogia fra le rotazioni nello spazio tridimensionale e le trasformazioni di Lorentz può essere resa ancora più completa, ma la discussione di questo importante aspetto della geometria dello spazio-tempo va al di là dello scopo di questo corso introduttivo. C'è, però, una differenza sostanziale: nel caso delle rotazioni spaziali attorno ad un asse, le coordinate spaziali cambiano ma la distanza L_0 fra due punti P e Q nello spazio non cambia, cioè rappresenta una quantità **invariante** rispetto a tale trasformazione. Dal punto di vista matematico, questo si scrive dicendo che, se $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ sono le differenze delle coordinate x, y, z fra i punti P e Q in un riferimento e $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ quelle nel riferimento ruotato, allora:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = L_0^2 \quad (8)$$

Ora, sappiamo già che nella trasformazione da un riferimento inerziale ad un altro, la distanza fra due punti nello spazio non è più invariante (contrazione dei regoli), tuttavia, si dimostra facilmente che c'è un'altra grandezza che resta invariante nella trasformazione di Lorentz. Nella Teoria della Relatività, due punti diversi nello spazio-tempo sono, individuati da due insiemi diversi di coordinate spazio-temporali x_1, y_1, z_1, τ_1 e x_2, y_2, z_2, τ_2 . In questo caso, utilizzando le trasformazioni di Lorentz, si può dimostrare facilmente che la grandezza $T = (\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ rappresenta un invariante, cioè

$$(\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta \tau')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \quad (9)$$

dove abbiamo definito $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ ecc... . Dunque, in una trasformazione di Lorentz, le coordinate spazio-temporali che individuano, ad esempio, la posizione istantanea di un corpo cambiano, ma la combinazione di coordinate in eq.(9) resta la stessa per qualunque riferimento. Questo è del tutto analogo a quanto avveniva nel caso della rotazione nello spazio (eq.(8)) con una differenza sostanziale: nella (8) appare la somma dei quadrati, mentre nella (9) il segno di fronte alla variabile temporale $(\Delta \tau)$ è opposto a quelli di fronte alle variabili spaziali. Dalla (9) si deduce

immediatamente che la distanza spaziale fra due punti nello spazio tempo $L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ non resta più invariata in una trasformazione fra un sistema inerziale ed un altro perchè l'uguaglianza $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$ non risolve la (9) eccetto che nel caso in cui $\Delta \tau = \Delta \tau'$. Si osservi che la (9) rappresenta una generalizzazione della (8). In particolare, l'equazione (9) è in grado di descrivere sia le trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, sia le ordinarie rotazioni nello spazio. Infatti, se si effettua una rotazione da un sistema di assi x, y, z ad un nuovo sistema ruotato di assi x', y', z' , il tempo misurato nei due sistemi è lo stesso ($\tau = \tau'$ se i due sistemi non si stanno muovendo l'uno rispetto all'altro) e, quindi, $\Delta \tau = \Delta \tau'$. Ma allora, se si sostituisce $\Delta \tau = \Delta \tau'$ nell'equazione (9), essa si riduce proprio alla (8). Dunque, la (9) descrive correttamente sia le trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema inerziale in moto rispetto al primo, sia le rotazioni e le traslazioni nello spazio tridimensionale.

Nel caso delle rotazioni nello spazio tridimensionale, l'invariante $L_0 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ rappresentava la distanza geometrica fra due punti nello spazio, dunque, per analogia, sembra naturale pensare l'invariante relativistico

$$T = \sqrt{(\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2} \quad (10)$$

come una sorta di *distanza quadridimensionale* fra due punti nello spazio-tempo quadridimensionale.

La (9) può essere dedotta facilmente a partire dalle equazioni di Lorentz (4)-(7). Consideriamo, ad esempio, due punti nello spazio-tempo individuati nel riferimento S dalle coordinate x_1, y_1, z_1, τ_1 e x_2, y_2, z_2, τ_2 . Le coordinate di questi punti nel riferimento S' saranno:

$$x_1' = \gamma(x_1 - v\tau_1) \quad (11)$$

$$y_1' = y_1 \quad (12)$$

$$z_1' = z_1 \quad (13)$$

$$\tau_1' = \gamma(\tau_1 - vx_1) \quad (14)$$

e

$$x_2' = \gamma(x_2 - v\tau_2) \quad (15)$$

$$y_2' = y_2 \quad (16)$$

$$z_2' = z_2 \quad (17)$$

$$\tau_2' = \gamma(\tau_2 - vx_2) \quad (18)$$

Facendo la differenza membro a membro delle equazioni (15) e (11), (16) e (12), (17) e (13), (18) e (14), si trova

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta\tau) \quad (19)$$

$$\Delta y' = \Delta y \quad (20)$$

$$\Delta z' = \Delta z \quad (21)$$

$$\Delta\tau' = \gamma(\Delta\tau - v\Delta x) \quad (22)$$

dove abbiamo posto $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x_2' - x_1'$ ecc.... Elevando al quadrato entrambi i membri delle equazioni (19)- (22) e sottraendo membro a membro le prime tre equazioni risultanti dall'ultima, si arriva facilmente alla (9). (lo studente faccia, per esercizio, i calcoli e dimostri la validità della (9) tenendo conto della definizione di γ data in eq.(3)).

Significato Fisico dell'invariante T e proprietà dei quadrivettori

Adesso, cerchiamo di capire cosa rappresenta l'invariante T (distanza quadridimensionale) che appare in equazione (10). Consideriamo un corpo che si muova rispetto al sistema di riferimento di coordinate x, y, z . Ad un dato istante τ , la posizione del corpo sarà individuata dalle coordinate x_1, y_1, z_1 , mentre le sue coordinate diventeranno x_2, y_2, z_2 dopo un intervallo di tempo $\Delta\tau$. D'altra parte, se definiamo $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta z = z_2 - z_1$, la grandezza

$$T^2 = (\Delta\tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta\tau')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \quad (23)$$

deve essere invariante, cioè deve assumere in ogni riferimento lo stesso valore. Questo deve essere vero, in particolare, in un riferimento che si muove solidalmente con il corpo. Ma in questo riferimento, il corpo resta sempre nello stesso punto e, quindi, $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$. Inoltre il tempo τ' misurato nel punto dove si trova il corpo è quello misurato da un unico orologio posto in tale punto, dunque è il *tempo proprio* τ_0 . Ne consegue che l'intervallo temporale $\Delta\tau'$ coincide con l'intervallo di tempo proprio $\Delta\tau_0$ definito in precedenza. Se si sostituiscono i valori $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e $\Delta\tau' = \Delta\tau_0$ nell'ultimo membro della (23) essa diventa:

$$(\Delta\tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta\tau_0)^2 \quad (24)$$

Dunque, l'invariante relativistico T rappresenta l'intervallo di tempo proprio misurato da un orologio solidale con il corpo.

Come vedremo nel seguito, la relazione (24) è molto importante.

Nella lezione I avevamo visto che tutti gli oggetti individuati da tre parametri A_x, A_y e A_z che in una rotazione spaziale mantengono inalterata la somma dei quadrati sono vettori e godono di tutte le proprietà dei vettori. Ad esempio, le loro coordinate si trasformano per rotazione come le coordinate x, y e z del vettore posizione.

Analogamente, diremo che un oggetto caratterizzato da 4 numeri A_x, A_y, A_z, A_t è un quadrivettore se:

$$A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 = A^2 = \text{costante} \quad (24')$$

in una trasformazione da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Le componenti A_x, A_y, A_z vengono dette le componenti spaziali del quadrivettore, mentre la componente A_t viene detta componente temporale. Ogni volta che incontreremo oggetti quadridimensionali che soddisfano la (24') potremo dire che essi rappresentano un quadrivettore. Inoltre, potremo dire che, nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, le componenti si modificano nello

stesso modo delle componenti x, y, z, τ del quadrivettore $R = (x, y, z, \tau)$. In particolare, le componenti nel nuovo sistema di riferimento potranno essere ottenute utilizzando le trasformazioni di Lorentz dove al posto di x porremo A_x , al posto di x' porremo A'_x e così via. Il numero costante A che appare in eq.(24') verrà detto, inoltre, *Lunghezza quadridimensionale* o *Modulo quadridimensionale* del quadrivettore che è, per definizione, un *invariante relativistico*.

Nel caso tridimensionale, avevamo definito gli scalari come quegli oggetti caratterizzati da un solo numero che non cambiano quando si effettua una traslazione o una rotazione del sistema di riferimento come avviene per il modulo del vettore. In Meccanica relativistica, diremo **quadriscalarare** un numero che non cambia sia per effetto di rotazioni o traslazioni spaziali sia nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Ora, per il Principio di Relatività, le stesse leggi della Fisica devono essere verificate in qualunque sistema inerziale. Ma allora, le leggi della Fisica relativistica dovranno essere scritte come uguaglianze fra quadrivettori o uguaglianze fra quadriscalarari. Infatti, supponiamo per assurdo che una legge Fisica sia $A = B$ dove B è un quadriscalarare e A non è un quadriscalarare. Supponiamo che, in un dato riferimento inerziale, si sia verificato che l'uguaglianza effettivamente risulta verificata. Ma allora, se si scrive la legge in un altro riferimento inerziale, B manterrà lo stesso valore (B per ipotesi è un quadriscalarare) mentre A sarà sostituito da un diverso valore A' . Quindi, se l'uguaglianza è verificata in un particolare riferimento inerziale, non lo sarà più in un diverso riferimento inerziale. Ma allora, non sarebbe soddisfatto il Principio di Relatività che ci dice che le stesse leggi della fisica devono restare valide in ogni riferimento inerziale. Da quanto visto sopra, ad esempio, l'intervallo di tempo proprio Δt_0 misurato da un unico orologio rappresenta un quadriscalarare, mentre, ad esempio, l'intervallo di tempo Δt non è un quadriscalarare. Nelle prossime lezioni vedremo un altro importante quadriscalarare: la massa a riposo di un corpo.

Un altro importante quadriscalarare è la carica elettrica che, come verificato sperimentalmente, mantiene lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Che la carica elettrica debba essere necessariamente un invariante relativistico lo si può capire facilmente se si pensa alla struttura degli atomi. E' ben noto, infatti, che gli atomi sono costituiti da un dato numero di protoni con carica positiva $+e$ e un numero uguale di elettroni con carica uguale ed opposta $-e$. Questo fa sì che la carica elettrica totale di un atomo sia nulla. Negli atomi gli elettroni si muovono in continuazione attorno al nucleo con velocità non totalmente trascurabili rispetto alla luce e con valori di velocità che dipendono notevolmente dal tipo di atomo considerato. Supponiamo, ora, che la carica elettrica non sia un invariante relativistico. Questo significherebbe che la carica di un elettrone in moto misurata nel sistema del laboratorio dove gli atomi (protoni) appaiono fermi, sarebbe diversa da quella del protone. Dunque, l'atomo risulterebbe carico. Ora, il numero di atomi presenti in un centimetro cubo di materia solida è enorme e confrontabile con il numero di Avogadro cioè dell'ordine di 10^{24} , dunque un blocchetto di 1 cm^3 di qualunque materiale presenterebbe una carica elettrica enorme generando all'esterno campi elettrici intensissimi. Questo, ovviamente, non avviene e, quindi, questo rappresenta una prova evidente del fatto che la carica elettrica è un'invariante relativistico.

Lo Spazio-Tempo di Minkowski.

Un modo utile per descrivere il comportamento spazio-temporale dei corpi è stato proposto da Minkowski. Esso consiste nel riportare le quattro coordinate spazio-temporali che individuano la posizione istantanea di un corpo utilizzando un sistema di assi Cartesiani. In via di principio, sarebbero necessari 4 assi Cartesiani (tre per le coordinate spaziali x, y, z ed uno per la coordinata temporale τ). Ovviamente, una tale rappresentazione grafica risulta impossibile perchè noi possiamo fare solamente grafici in al massimo tre dimensioni. Comunque, nel caso delle trasformazioni di Lorentz descritte dalle equazioni (4)-(7), le coordinate y e z non cambiano da riferimento a riferimento. Dunque, sarà sufficiente studiare come cambiano le coordinate x e τ . Quindi, possiamo rappresentare in un grafico solamente due assi ortogonali: uno è l'asse delle ascisse x corrispondente alla coordinata x lungo la direzione di moto relativo, l'altro è l'asse delle ordinate τ corrispondente alla coordinata temporale τ espressa in metri-luce. Tali assi sono rappresentati in figura 1. Lo studente faccia attenzione che, diversamente da come si opera nella cinematica classica, l'asse dei tempi non è l'asse delle ascisse ma quello delle ordinate. La posizione di un corpo materiale ad un dato tempo τ (punto P in figura 1) sarà individuata dalla relativa ascissa x_P , mentre il tempo in cui si trova in quella posizione sarà dato dall'ordinata τ_P . Le altre coordinate spaziali y_P e z_P , restano le stesse in tutti i riferimenti inerziali che si muovono lungo l'asse x .

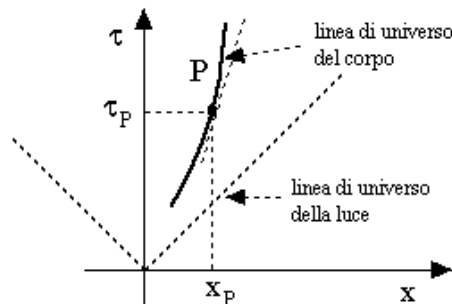


Figura 1

Supponiamo, ora di avere un impulso elettromagnetico che viaggia lungo l'asse x e al tempo $\tau = 0$ m si trova in $x = 0$ m. Nelle nostre unità, la luce ha velocità $c = 1$ e, quindi, la legge del moto per l'impulso luminoso è $x = c \tau = \tau$. Dunque, nel diagramma τ - x in fig.1, al variare del tempo τ , il punto rappresentativo dell'impulso luminoso si muove su una retta con coefficiente angolare $+1$. Se, invece, l'impulso si muove nel verso negativo delle x , l'equazione del moto diventa $x = -c\tau = -\tau$, quindi, il moto dell'impulso luminoso è rappresentato dalla retta con coefficiente angolare -1 . Le due rette sono rappresentate tratteggiate in fig.1 e prendono il nome di **linee di universo della luce**. Analogamente, nello spazio di Minkowski, il moto di un corpo è rappresentato dalla curva $x = x(\tau)$ che viene detta **linea di universo del corpo**. La pendenza della tangente alla curva rispetto all'asse dei tempi nel punto di coordinate $\tau = \tau_P$ e $x = x_P$, rappresenta la velocità v del corpo all'istante $\tau = \tau_P$ ($v = dx/d\tau$). Ricordando che la velocità $v = 1$ corrisponde alla velocità della luce e che questa velocità non può essere raggiunta da nessun corpo materiale, si deduce che la pendenza di qualunque curva di universo (rispetto all'asse dei tempi) non può superare in modulo il valore 1. Dunque, il modulo dell'angolo θ formato fra la tangente alla curva e l'asse delle ordinate (τ) non può superare 45° .

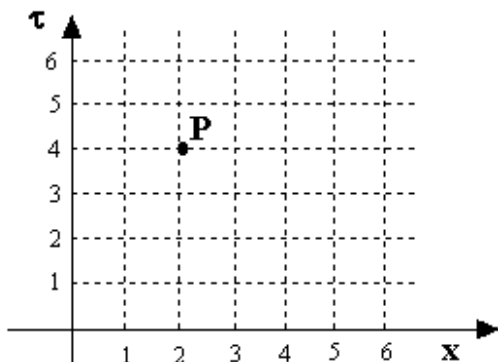


Figura 2a

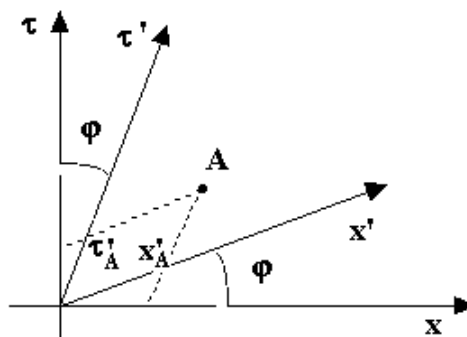


Figura 2b

Adesso vediamo come si trasformano gli assi τ e x quando si passa ad un riferimento S' in moto con velocità v (espressa in unità adimensionali) lungo l'asse x dove le nuove coordinate sono x' e τ' legate ad x e τ dalle relazioni (4) e (7). La geometria della trasformazione è mostrata in fig.2b. In tale trasformazione, l'asse dei tempi τ verrà sostituito dal nuovo asse dei tempi τ' e quello delle x dall'asse delle x' . Per poter disegnare i nuovi assi dobbiamo chiederoci cosa essi rappresentano. Nel caso degli assi x e τ in fig.2a, tutti i punti sull'asse x rappresentano diversi punti spaziali allo stesso istante $\tau = 0$ (i punti dell'asse x sono tutti i punti che hanno ordinata $\tau = 0$) e, analogamente, i punti sull'asse τ rappresentano lo stesso punto spaziale $x = 0$ a diversi istanti τ . Dunque, in definitiva, l'asse dei tempi è la retta verticale di equazione $x = 0$, mentre l'asse delle x è la retta orizzontale di equazione $\tau = 0$. Analogamente, gli assi x' e τ' dovranno corrispondere, rispettivamente, all'insieme dei punti nello spazio-tempo che soddisfano le condizioni $\tau' = 0$ e $x' = 0$. Cominciamo a disegnare l'asse τ' : esso corrisponde alla condizione $x' = 0$. Ma, se si pone $x' = 0$ nella (4), si deduce $x - v\tau = 0$, cioè $\tau = x/v$. Nello spazio x - τ questa è l'equazione di una retta con coefficiente angolare $1/v$ ($|1/v| > 1$) rispetto all'asse x come mostrato in figura 2. Analogamente l'asse delle x' dovrà corrispondere alla retta di equazione $\tau' = 0$. Sostituendo nella (7) $\tau' = 0$ si trova $\tau - vx = 0$ e, quindi, $\tau = vx$ che rappresenta l'equazione di una retta con coefficiente angolare v ($|v| < 1$) rispetto all'asse x come mostrato in fig.2b. Si noti la simmetria della trasformazione: l'angolo φ formato dall'asse τ' con l'asse τ è uguale a quello formato dall'asse x' con l'asse x ($\tan \varphi = v < 1$).

All'aumentare della velocità verso il valore limite $v=1$, i due assi tendono ad avvicinarsi sempre più alla linea di universo della luce ($\varphi \rightarrow \pi/4$).

La domanda a cui dobbiamo rispondere ora è la seguente : dato un punto P nello spazio tempo, come si fa a determinare graficamente il valore delle coordinate τ' e x' che rappresentano tale punto nel riferimento S' ? Prima di rispondere a questa domanda, conviene tornare alla rappresentazione di un punto spazio-temporale $P = (x, \tau)$ nel sistema di assi Cartesiani Ortogonali di figura 2a. In questo caso la procedura per trovare i valori delle coordinate x e τ è la seguente: a) per trovare x , basta tracciare una retta che passa per il punto P e che è parallela all'asse dei tempi. Tutti i punti di tale retta corrispondono allo stesso valore della x ($x=2$ in fig.2a). Dunque l'intercetta di questa retta con l'asse delle x fornisce il valore dell'ascissa del punto P . b) per trovare τ , basta tracciare la retta parallela all'asse delle x passante per P come mostrato in fig.2a. La procedura grafica per trovare le coordinate x' e τ' relative ad un punto A in fig.2b è analoga alla precedente. In primo luogo, osserviamo che tutti i punti che hanno lo stesso valore di τ' sono i punti che risolvono l'equazione [vedi eq.(7)] $\tau' = \gamma(\tau - vx)$ con $\tau' = \text{costante}$, cioè:

$$\tau = vx + \tau' / \gamma \quad (25)$$

Questa rappresenta una retta con coefficiente angolare pari a v (rispetto all'asse x), dunque è una retta parallela all'asse x' che intercetta l'asse τ in $\tau = \tau' / \gamma$ (l'intercetta con l'asse si ottiene ponendo $x=0$ in eq.(25)). Ad esempio, se $\gamma=2$, la retta corrispondente al luogo dei punti con $\tau'=1$ m interseca l'asse delle τ in $\tau=1/\gamma=0.5$ m mentre, ovviamente, essa interseca l'asse τ' in $\tau'=1$ m. La posizione dell'unità di misura $\tau' = 1$ m sull'asse τ' si trova, quindi, tracciando una retta parallela all'asse x' che parte dal punto $\tau=1/\gamma$ sull'asse τ . L'intercetta di questa retta con l'asse τ' fornisce l'unità di misura cercata. Una volta trovata la posizione del punto $\tau'=1$ m sull'asse τ' , cioè l'unità di misura sull'asse τ' , i punti dell'asse corrispondenti a $\tau'=2$ m, $\tau'=3$ m ecc.. si trovano immediatamente disegnando punti equispaziati sull'asse τ' (vedi fig.3). Le rette che passano per tali punti e sono parallele all'asse x' , rappresentano l'insieme dei punti aventi lo stesso valore di τ' ($\tau'=1$ m, $\tau'=2$ m, $\tau'=3$ m ...). Analogamente i punti che corrispondono ad uno stesso valore di x' dovranno soddisfare l'equazione $x' = \gamma(x - v\tau)$ con $x' = \text{costante}$, cioè:

$$\tau = x/v - x'/(v\gamma) \quad (26)$$

Questa è una retta con coefficiente angolare $1/v$ (retta parallela all'asse τ') che incontra l'asse delle x ($\tau=0$ in eq.(26)) in $x = x'/\gamma$. Anche in questo caso, si trova facilmente l'unità di misura sull'asse delle x' (intercetta della retta (26) con $x'=1$ m con l'asse x'), quindi, le posizioni dei punti $x'=2$ m, $x'=3$ m ...ecc.. su tale asse. Ad esempio, il punto C in fig.3 sarà rappresentato nel sistema x' - τ' dalle coordinate (2,2).

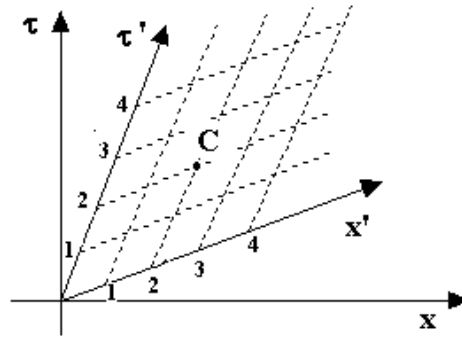


Figura 3

Simultaneità vista nello spazio di Minkowski.

Il diagramma di Minkowski permette di comprendere in modo molto diretto alcuni dei fenomeni descritti in precedenza. Ad esempio, dal diagramma risulta immediatamente che eventi che sono simultanei in un dato riferimento non lo sono in un diverso riferimento. Infatti, per quanto visto sopra, i punti rappresentativi di due corpi che si trovano in punti distinti dell'asse x allo stesso istante τ (i punti A e B in fig.4 che corrispondono a $\tau_A = \tau_B = 2$ m), devono giacere su una stessa retta parallela all'asse x . D'altra parte, per essere simultanei nel riferimento in moto relativo (x' , τ') essi dovrebbero giacere su una retta parallela all'asse x' (punti B e C in fig.4). Ovviamente, queste due condizioni non possono essere mai soddisfatte contemporaneamente per una stessa coppia di punti. Ad esempio nel caso dei punti A e B in figura 4, i corrispondenti eventi sono simultanei nel sistema x, τ ($\tau_A = \tau_B = 2$ m), ma avvengono in tempi diversi τ'_A

$> \tau_B$ nel sistema x', τ' . Analogamente per i punti B e C , essi rappresentano eventi simultanei in x', τ' ($\tau'_A = \tau'_B$), ma avvengono a tempi diversi $\tau_C < \tau_B$ nel riferimento x, τ .

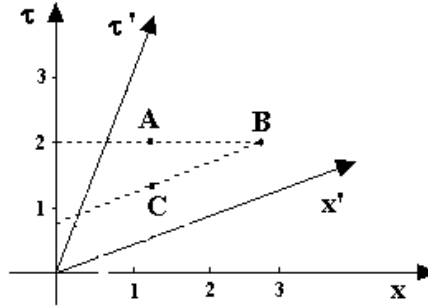


Figura 4

Anche la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze trovano una semplice interpretazione geometrica utilizzando lo spazio di Minkowski.

Considerazioni sull'invariante relativistico e sulla lunghezza di una curva nello spazio-tempo..

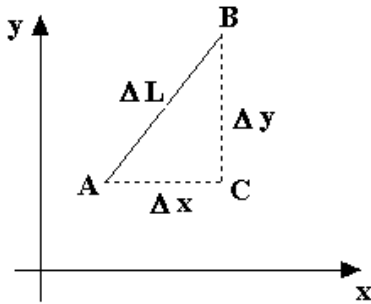


Figura 5 a

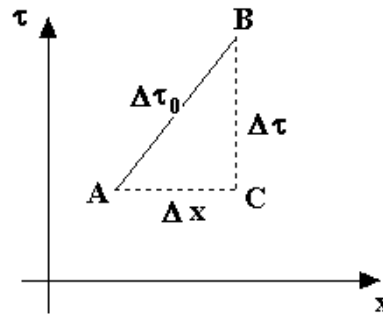


Figura 5b

Adesso ritorniamo a considerare l'analogia fra le rotazioni nello spazio e le trasformazioni di Lorentz. Nel caso di una rotazione attorno all'asse z , cambiano le coordinate rappresentative dei punti nello spazio, ma la distanza fra due punti non cambia. Ad esempio se i due punti sono i punti A e B nel piano xy (fig.5a) e se $\Delta x = x_B - x_A$ e $\Delta y = y_B - y_A$ allora la distanza ΔL fra i due punti è pari a

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (28)$$

come discende immediatamente dall'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo ABC in fig.5a.

Consideriamo, ora, lo spazio di Minkowski (fig.5b) e due punti A e B giacenti nel piano $x-\tau$. Questi punti corrisponderanno alle posizioni occupate nello spazio-tempo a due istanti diversi da un corpo che si muove lungo l'asse x . Poichè, in questo caso, non c'è spostamento del corpo lungo gli assi y e z , allora risulta $\Delta y = \Delta z = 0$ e la relazione di invarianza relativistica (24) si riduce a:

$$\Delta \tau_0 = \sqrt{(\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2} \quad (29)$$

dove l'intervallo di tempo proprio $\Delta \tau_0$ rappresenta la "distanza relativistica" dei punti A e B in fig.5b o, in termini più fisici, l'intervallo di tempo misurato da un unico orologio che si muove di moto rettilineo ed uniforme lungo l'asse x e si

sposta di Δx nel tempo $\Delta \tau$ andando da A a B nello spazio di Minkowski. Passando da un riferimento inerziale ad un altro, cambieranno i valori $\Delta \tau$ e Δx , ma la distanza fra i due punti calcolata con la (29) è sempre la stessa e coincide con il tempo proprio misurato da un unico orologio che si sposta con velocità costante nello spazio tempo da A a B . Ora, a causa del segno - che appare nella (29), è evidente che questa distanza non coincide con la lunghezza geometrica del segmento AB che si otterrebbe applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC in fig.5b. Questo è dovuto al fatto che la *Trasformazione di Lorentz non è Euclidea* e, quindi, non soddisfa alle proprietà della geometria Euclidea.

Adesso proseguiamo nella nostra analogia e torniamo a domandarci come si determina nella geometria Euclidea la lunghezza di un tratto di curva che congiunge due punti A e B giacenti su un piano xy (vedi fig.6).

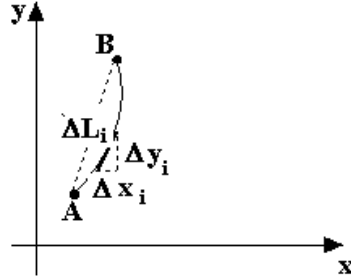


Fig.6

In questo caso, si può suddividere la curva in un numero molto grande di trattini sufficientemente piccoli in modo che ciascun trattino appaia con buona approssimazione rettilineo. Consideriamo, ad esempio, il trattino i -esimo di lunghezza ΔL_i mostrato in figura 6 che congiunge due punti vicini sulla curva. Nel sistema di assi Cartesiani x,y la lunghezza del trattino è pari a

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \quad (30)$$

Dunque, la lunghezza totale della curva γ che congiunge i punti A e B si otterrà, con buona approssimazione, sommando le lunghezze degli N trattini, cioè:

$$L_\gamma \approx \sum_{i=1}^N \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Nel fare il calcolo precedente, abbiamo sostituito ad un piccolo arco di curva un trattino rettilineo di lunghezza ΔL_i che congiunge i suoi estremi. Questa procedura è, ovviamente, approssimata perchè un arco di curva non coincide esattamente con il segmento che congiunge i suoi estremi. D'altra parte, se i trattini vengono presi sempre più piccoli, il risultato del calcolo precedente diventa sempre più preciso e diventa esatto nel limite matematico di trattini infinitesimi. In tal caso, Δx_i va sostituito con l'infinitesimo dx , $\Delta y_i/(\Delta x_i)$ va sostituito con dy/dx cioè con la derivata di y rispetto a x ($y'(x)=dy/dx$) e la sommatoria diventa l'integrale:

$$L_\gamma = \int_A^B dx \sqrt{1 + y'^2(x)} \quad (31)$$

che rappresenta la formula matematica che permette di calcolare la lunghezza geometrica di una generica curva γ . Dalla figura 6 si capisce facilmente che la lunghezza di una curva che congiunge A e B è minima se la curva è il segmento AB (tratteggiato in figura).

Esercizio: lo studente mostri che la lunghezza di qualunque curva che collega due punti A e B è maggiore di quella del segmento AB (suggerimento: si sfrutti il fatto che la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è sempre maggiore di quella di un cateto).

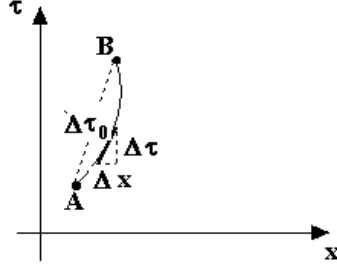


fig.7

Esattamente lo stesso tipo di argomento si può ripetere per calcolare la lunghezza relativistica di una curva γ che congiunge due punti A e B nello spazio tempo di Minkowski. Nel caso in cui la curva si riduca al segmento AB nello spazio tempo (segmento tratteggiato in fig.7), essa rappresenta un corpo che, nel sistema x - τ , si muove con velocità costante lungo l'asse x e si trova in $x = x_A$ al tempo τ_A e in $x = x_B$ al tempo $\tau_B = \tau_A + \Delta\tau$. Nel caso più generale di una curva γ non rettilinea come la curva γ in fig.7, essa corrisponde ad un corpo che si trova in $x = x_A$ al tempo τ_A e in $x = x_B$ al tempo $\tau_B = \tau_A + \Delta\tau$ (i tempi τ e le posizioni x sono misurati nel sistema dove il corpo appare in movimento) e che si muove con velocità non costante (la velocità istantanea è data dalla pendenza della retta tangente rispetto all'asse τ). Naturalmente, siccome la velocità di un corpo materiale non può superare il valore limite $v = 1$, la pendenza (rispetto all'asse τ) della curva γ in ogni punto non può superare il valore 1. Anche in questo caso, la lunghezza nello spazio-tempo della curva si otterrà suddividendo la curva in un numero enorme (tendente all'infinito) di trattini infinitesimi , calcolando la lunghezza infinitesima dei trattini e sommando (tramite l'operazione di Integrale) su tutti i trattini come avevamo fatto nel caso spaziale (eq.(31)). Ora, però, la lunghezza infinitesima del trattino infinitesimo è l'intervallo di tempo proprio $d\tau_0$ definito da:

$$d\tau_0 = \sqrt{d\tau^2 - dx^2} = d\tau \sqrt{1 - (dx/d\tau)^2} = d\tau \sqrt{1 - v^2(\tau)} \quad (32)$$

dove $v(t)$ rappresenta la velocità del corpo al tempo t . Dunque, la lunghezza nello spazio-tempo della curva γ è

$$\Delta\tau_0 = \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{1 - v^2(\tau)} \quad (33)$$

Si può dimostrare che, a causa del segno - che appare nella definizione della lunghezza nello spazio-tempo, dovuta al carattere non Euclideo della geometria dello spazio-tempo, la lunghezza quadridimensionale si comporta all'opposto di quanto avveniva per la comune lunghezza geometrica. In particolare, dati due punti A e B, vale la seguente proprietà fondamentale. **la lunghezza quadridimensionale del segmento AB è più grande di quella di una qualunque altra curva che congiunga i punti A e B** nello spazio tempo.

Il significato Fisico della lunghezza quadrimensionale

E' importante soffermarci un attimo a discutere quale è il significato fisico della lunghezza della curva definita in eq.(33). Tale lunghezza rappresenta la somma delle lunghezze quadridimensionali dei trattini rettilinei in cui è stata suddivisa la curva γ . Ma, come abbiamo visto in precedenza, un trattino rettilineo rappresenta un corpo che si muove con una data velocità costante e la sua lunghezza corrisponde all'intervallo di tempo misurato da un orologio che si sposta solidalmente con il corpo. Sembra, perciò, naturale associare alla lunghezza totale della curva $\Delta\tau_0$ l'intervallo di tempo misurato da un orologio che si muove solidalmente con un corpo che si trova in x_A al tempo τ_A e arriva in x_B al tempo τ_B muovendosi, istante per istante, con una velocità data dall'inclinazione della tangente alla curva γ . Si noti che il valore di $\Delta\tau_0$ cambia apprezzabilmente al variare della curva γ che descrive il moto del corpo nello spazio x - τ . In particolare, per quanto visto in precedenza, il valore della lunghezza quadridimensionale $\Delta\tau_0$ risulta massimo se la curva che congiunge i punti A e B è il segmento AB.

Il paradosso dei Gemelli e l'esperimento di Hafele e Keating (1971).

Una applicazione non rigorosa della Teoria della Relatività conduce spesso ad apparenti Paradossi che, in realtà, sono solamente dovuti ad una non corretta applicazione della teoria. Il paradosso più famoso è certamente quello

noto con il nome di **Paradosso dei Gemelli**. Consideriamo due gemelli, Mario e Giovanni, che si trovano nello spazio su due astronavi adiacenti e che sono appena nati. Subito dopo la nascita, l'astronave di Giovanni si allontana da quella di Mario con una velocità prossima alla velocità della luce. Dopo un certo tempo, Giovanni torna indietro con la stessa velocità fino a raggiungere nuovamente Mario. Mario ha "visto" il gemello Giovanni viaggiare a grande velocità e, quindi, se per Giovanni il viaggio è durato, ad esempio, 20 anni, l'orologio di Mario misurerà un tempo più lungo, ad esempio, di 80 anni (la dilatazione dei tempi). Per quanto discusso in precedenza, lo stesso dovrà avvenire per il tempo biologico. Ciò significa che Mario sarà diventato vecchio, mentre Giovanni sarà restato giovane. Dove è l'apparente paradosso? Il paradosso nasce dal fatto che, se ci mettiamo dal punto di vista di Giovanni, il discorso sembra ribaltarsi completamente. Adesso è Mario che si allontana da Giovanni con velocità *prossima a quella della luce* e, quindi, il tempo misurato da Giovanni utilizzando un orologio montato sulla sua astronave, dovrà essere più lungo di quello letto da Mario sulla sua astronave. In conclusione, quando i due gemelli si ritrovano nuovamente insieme, è Giovanni ad essere invecchiato molto di più di Mario. Ovviamente le due conclusioni opposte non possono essere simultaneamente vere ed è questo l'apparente paradosso.

In realtà, il paradosso non c'è perchè Mario si trova su un riferimento inerziale (la sua accelerazione è sempre nulla) mentre Giovanni si trova su un sistema non inerziale. Dunque, i due sistemi non sono equivalenti. Infatti, Giovanni, prima deve accelerare per raggiungere la sua velocità di crociera, poi, ad un dato istante, deve frenare e invertire la rotta per tornare da Mario e, infine, quando raggiunge nuovamente l'astronave di Mario, si deve fermare. Giovanni si accorgerà di essere su un sistema accelerato perchè esso si sentirà schiacciato contro il seggiolino durante la fase di accelerazione. Evidentemente, Giovanni non si trova su un sistema inerziale. Ma allora, non possiamo applicare le leggi della Relatività Ristretta al sistema all'astronave di Giovanni. Queste leggi, infatti, erano state dedotte solo per i sistemi inerziali per i quali vale il Principio di Relatività. Non ci deve stupire, quindi, che alla fine del viaggio i due gemelli risultino diversi perchè i due riferimenti sono fisicamente non equivalenti. Il risultato corretto è solamente quello che si ottiene ragionando nel sistema Inerziale di Mario dove valgono le relazioni relativistiche trovate in precedenza. Dunque, la conclusione corretta è quella che si raggiunge ragionando nel riferimento inerziale di Mario e cioè che Giovanni è effettivamente molto più giovane di Mario quando lo incontra nuovamente alla fine del suo lungo viaggio interstellare.

Adesso vogliamo fare un'analisi più quantitativa utilizzando le relazioni ottenute in precedenza. Per semplificare i calcoli, possiamo supporre che il viaggio di Giovanni duri un tempo sufficientemente lungo (ad esempio, 10 anni il viaggio di andata e 10 anni quello di ritorno misurati entrambi da Giovanni con il suo orologio) e che l'astronave di Giovanni si muova spostandosi sempre lungo un unico asse x . Se la durata del viaggio è di 20 anni, possiamo considerare trascurabili i tempi necessari perchè l'astronave raggiunga la sua velocità finale, per invertire la rotta e per fermarsi nuovamente alla fine del viaggio. Adesso mettiamoci nel riferimento Inerziale di Mario caratterizzato dalle coordinate spazio-temporali x, y, z, τ e prendiamo l'origine O degli assi x, y, z coincidente con la posizione di Mario e supponiamo che Giovanni inizi ad allontanarsi da Mario al tempo $\tau = 0$ m. Disegniamo, ora, nello spazio di Minkovski x, τ la linea di universo di Mario e quella di Giovanni (vedi figura 8). Poichè Mario resta sempre fermo nell'origine del suo Riferimento, la sua coordinata x resta sempre uguale a zero e la linea di universo di Mario coincide, perciò, con l'asse τ . Il valore di τ su questo asse rappresenta, perciò, il tempo proprio misurato dall'orologio di Mario. Supponiamo, ora, che Giovanni viaggi con velocità di modulo pari a $v = 0.9$ (in unità di velocità della luce). Quando esso si allontana da Mario, la velocità di Giovanni è positiva e la sua linea di universo è una retta con coefficiente angolare $1/v$ rispetto all'asse x (segmento OC in fig.8). Dopo aver invertito la velocità, la sua linea di universo sarà ancora una retta ma con inclinazione negativa $-1/v$ rispetto all'asse x (segmento CB in fig.8). Giovanni incontrerà nuovamente Mario ($x = 0$) quando la sua linea di universo incontra la linea di universo di Mario, cioè nel punto B dell'asse τ in figura 8 caratterizzato dal valore $\tau = \tau_B$ che rappresenta il tempo segnato dall'orologio di Mario.

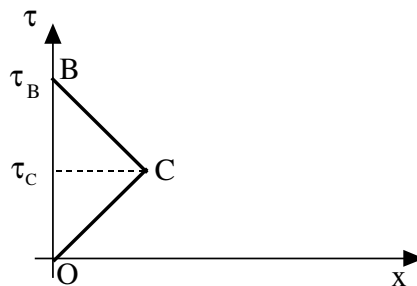


figura 8

Per quanto discusso nei paragrafi precedenti, il tempo misurato dall'orologio di Giovanni è la lunghezza quadridimensionale totale dei due segmenti OC e CB che, per le proprietà non Euclidee dello spazio di Minkovski, sarà sicuramente minore della lunghezza del segmento OB che è pari a τ_B . Indichiamo con τ_C il tempo corrispondente al punto C che, come è evidente dalla figura, è $\tau_C = \tau_B/2$. Allora, per la (32), la lunghezza quadridimensionale totale del percorso $OC + CB$ è:

$$\tau_0 = \frac{\tau_B}{2} \sqrt{1-v^2} + \frac{\tau_B}{2} \sqrt{1-v^2} = \tau_B \sqrt{1-v^2} = \frac{\tau_B}{\gamma}$$

Ma la lunghezza quadridimensionale τ_0 rappresenta proprio il tempo misurato dal gemello in moto (Giovanni) mentre τ_B è quello misurato da Mario. Dunque, se il tempo totale misurato da Giovanni è $\tau_0 = 20$ anni e la velocità è $v = 0.9$, il tempo misurato da Mario espresso in anni sarà $\tau_B = \frac{20}{\sqrt{1-(0.9)^2}} \approx 46$ anni.

Ovviamente, il fatto che, dopo il viaggio, i tempi trascorsi da Mario e da Giovanni risultino diversi (Giovanni è più giovane di Mario) ci sorprende molto perché esso va contro la nostra idea preconcepita che il tempo sia assoluto ed uguale per tutti basata sulla nostra esperienza quotidiana in cui i sistemi si muovono a velocità enormemente più piccole di quella della luce nel vuoto. Concettualmente, però, se facciamo propria l'idea che il tempo non è altro che una coordinata aggiuntiva che si aggiunge alle ordinarie coordinate spaziali x, y, z , allora il risultato da noi ottenuto non ci dovrebbe sorprendere. Infatti, se si hanno due punti nello spazio, nessuno si sorprende se la lunghezza della curva che congiunge i due punti cambia da curva a curva. Allo stesso modo, non ci dovremmo sorprendere se la lunghezza quadridimensionale di una curva che congiunge due punti nello spazio quadridimensionale (cioè il tempo misurato da un orologio che descrive il moto rappresentato dalla curva) dipende dalla curva considerata. Un'analogia piuttosto efficace la possiamo fare pensando al contachilometri di una macchina. Il contachilometri è uno strumento che misura la lunghezza del percorso effettuato da un'automobile, mentre l'orologio misura la lunghezza nello spazio tempo. Ora, se due automobili distinte vanno da Pisa a Firenze seguendo percorsi diversi (una passa dalla superstrada, mentre l'altra fa un percorso panoramico sulle colline), nessuno si sorprende se, alla fine del viaggio, i contachilometri segnano numeri diversi nonostante essi siano perfettamente funzionanti. Per tutti noi è evidente che non c'è un modo unico per andare da Pisa a Firenze! Allo stesso modo non ci dovremmo sorprendere se gli orologi di due persone che partono da uno stesso punto nello spazio tempo per rincontrarsi nuovamente in uno stesso punto segnano tempi diversi. Infatti, gli orologi non fanno altro che misurare la lunghezza quadridimensionale nello spazio-tempo.

Naturalmente, i risultati ottenuti sopra sono stati ottenuti assumendo la validità della Teoria della Relatività, cioè assumendo che il Principio di Relatività sia sempre vero. In caso contrario tutte queste considerazioni andrebbero totalmente riviste. E' perciò estremamente importante poter effettuare un esperimento in una situazione analoga a quella dei gemelli e verificare che, effettivamente, i tempi segnati dagli orologi dipendono dal percorso da essi fatto nello spazio-tempo. Purtroppo, astronavi che viaggiano a velocità prossime a quelle della luce non ce ne sono e, quindi, le differenze di tempi che si possono attualmente misurare in un esperimento sono estremamente piccole. Per questo motivo, una verifica diretta di questa importante (e sconvolgente) previsione della Fisica Relativistica è stata possibile ad opera dei Fisici Hafele e Keating (1971) solamente circa 65 anni dopo l'enunciazione della Teoria della Relatività. Essi hanno montato quattro orologi atomici su due aerei e confrontato i tempi segnati da questi orologi con quelli segnati da un orologio atomico a terra. Gli orologi atomici permettono misure di tempo con una precisione di gran lunga superiore a quella di qualunque altro orologio che sia mai stato costruito dall'uomo. In tal modo, anche una differenza piccolissima nei tempi misurati dai due orologi può essere determinata con notevole precisione. Prima della partenza degli aerei, tutti gli orologi (quello a terra e quelli sugli aerei) sono stati sincronizzati. Dopodiché gli aerei sono decollati viaggiando a velocità uguali in modulo ma opposte in verso (uno nel verso concorde con la velocità di rotazione della terra e l'altro in verso opposto) tornando nel punto di partenza simultaneamente dopo circa 50 ore di viaggio. Alla fine, i tempi segnati dai vari orologi sono stati confrontati e si sono trovate piccole differenze nei tempi segnati dagli orologi dell'ordine di poche centinaia di nanosecondi (10^{-9} s). Entro gli errori sperimentali (10%), queste differenze sono in accordo con quelle previste dalla Teoria della Relatività Ristretta. In realtà, per ottenere un accordo completo è necessario tenere conto anche degli effetti del campo di gravità terrestre che vengono presi in considerazione dalla Relatività Generale. Gli effetti misurati (differenze di poche centinaia di nanosecondi su 50 ore) sono veramente piccoli e l'esperimento è, perciò, estremamente delicato e molte possibili cause di errore debbono essere tenute sotto controllo. Per questo motivo, ad esempio, su ciascun aereo erano montati due diversi orologi atomici in modo da controllare che gli effetti osservati non fossero legati a malfunzionamenti di un singolo orologio. Per completezza, bisogna osservare che, come spesso avviene per gli esperimenti fondamentali della Fisica, alcuni oppositori della Teoria della Relatività (anche se sono in netta minoranza ci sono ancora oppositori di tale teoria) hanno messo in dubbio l'effettiva precisione dell'esperimento di Hafele e Keating. Tuttavia, la maggioranza dei Fisici concorda con il ritenere l'esperimento corretto. Negli ultimi decenni, la precisione degli orologi atomici è stata ulteriormente migliorata e l'esperimento di Hafele e Keating è stato ripetuto utilizzando orologi atomici molto più precisi che hanno confermato pienamente i risultati precedenti con un margine di incertezza molto minore.