LEZIONE III

L'OROLOGIO A LUCE

Nella precedente lezione abbiamo visto che le trasformazioni di Lorentz, che discendono direttamente dal Principio di Relatività, implicano nuovi effetti noti come *contrazione delle lunghezze* e *dilatazione dei tempi*. Gli stessi risultati si possono ottenere anche in modo più diretto ed intuitivo senza utilizzare le Trasformazioni di Lorentz. Questo può essere fatto introducendo un particolare orologio modello : ***l'orologio a luce***. Esso è costituito da due specchi paralleli posti a distanza L_0 lungo un asse y come mostrato in figura 1a.

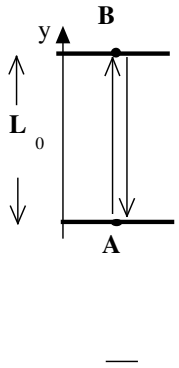

Figura 1a

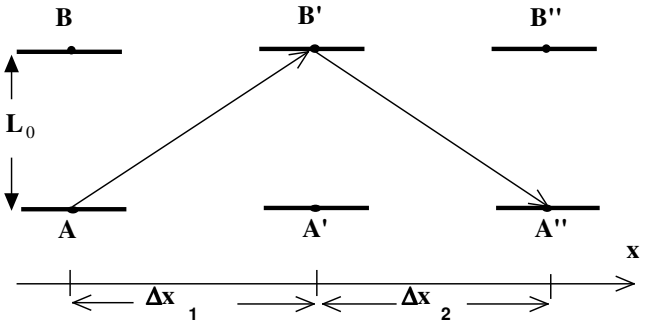

Figura 1b

Un impulso luminoso viene emesso ad un dato istante da un punto *A* al centro dello specchio inferiore e si propaga lungo l'asse *y* fino a raggiungere il punto *B* al centro del secondo specchio (vedi fig.1a). Dopodichè, esso viene riflesso e torna in *A* e viene ulteriormente riflesso e il processo di andata e ritorno inizia nuovamente. Un contatore posto in *A* può misurare l'arrivo del fascio in *A*. Ad ogni conteggio corrisponde un intervallo di tempo

$$\Delta t_0 = 2\, L_0/c. \qquad (1)$$

Infatti, la velocità della luce è *c* e il tempo che occorre alla luce per spostarsi da uno specchio all'altro è L_0/c. L'intervallo di tempo Δt_0 è il tempo misurato nel sistema di riferimento in cui gli specchi sono fermi e, dunque, è un *tempo proprio.* Esso corrisponde al tempo che verrebbe misurato da un orologio posto, ad esempio, nel punto *A* e solidale con gli specchi. Si noti che, data l'altissima velocità della luce, Δt_0 è molto piccolo. Ad esempio, se L_0=1m, il valore di Δt_0 è circa 6.6 ns=6.6 10^{-9} s (il "battito" dell'orologio a luce è rapidissimo !!). Adesso, vediamo quale è il tempo (tempo di andata e ritorno dal centro dello specchio inferiore) misurato in un riferimento in cui gli specchi (e, quindi, l'0rologio a luce) si muovono lungo l'asse *x* con velocità *v*. Un "osservatore" nel nuovo riferimento "vede" ancora il fascio che parte dal centro dello specchio inferiore, batte su quello superiore nel centro e torna di nuovo nel centro dello specchio inferiore (la coincidenza del fascio con i punti centrali degli specchi a vari istanti è un fatto fisico e deve essere uguale per tutti gli osservatori). Stavolta, però, durante tutto questo tempo, gli specchi si sono spostati e i centri degli specchi occupano punti diversi al passare del tempo nel nuovo riferimento come mostrato nella figura 1b. In figura 1b sono mostrate schematicamente le posizioni occupate dagli specchi a tre istanti di tempo successivi: a) all'istante iniziale in cui l'impulso luminoso viene emesso dal centro dello specchio inferiore che si trova nel punto *A*, b) all'istante intermedio in cui il fascio incide nel punto centrale dello specchio superiore che si trova in *B'*, c) all'istante finale quando il fascio colpisce il punto centrale dello specchio che si trova nel punto *A"*. Dunque, nel riferimento in cui gli specchi si muovono, il tragitto del fascio è quello che congiunge i punti *A,B'* e *A"* in figura 1b.

D'altra parte, per il Principio di Relatività, la distanza fra gli specchi deve essere la stessa in ogni riferimento perchè essi sono disposti lungo l'asse *y* che è ortogonale a quello di moto (la lunghezza dei regoli è invariante se essi sono orientati perpendicolarmente al moto) e, inoltre, la velocità della luce deve essere sempre uguale a *c*. Ne consegue che, siccome il percorso del fascio luminoso in figura 1b è maggiore di quello in figura 1a e la velocità della luce ha lo stesso valore, un " osservatore" che veda l'orologio muoversi con velocità *v* deve necessariamente trovare che il tempo che occorre al fascio per andare da *A* ad *A"* è maggiore del tempo proprio Δt_0 misurato dall'orologio a luce. Infatti, durante il primo intervallo di tempo Δt_1 in cui il fascio va da *A* a *B'* (vedi fig.1b), gli specchi si sono spostati lungo *x* di $\Delta x_1 = v\Delta t_1$, mentre il fascio ha percorso il tratto *AB'* di lunghezza $d = c\,\Delta t_1$. Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *AB'A"* in fig.1b, si trova

$$\left(c\Delta t_1\right)^2 = L_0^2 + \left(v\Delta t_1\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t_1 = \frac{L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

Lo stesso calcolo si può fare per determinare l'intervallo di tempo Δt_2 impiegato dal fascio per andare da *B'* ad *A"*.

Come risulta ovvio anche dalla simmetria della figura 1b, si trova $\Delta t_2 = \Delta t_1$ e $\Delta x_2 = \Delta x_1 = v\Delta t_1$, quindi il tempo totale di andata e ritorno è:

$$\Delta t = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

Questo risultato coincide con la dilatazione dei tempi già discussa in precedenza. Per evitare fraintendimenti, vogliamo ancora sottolineare che l'intervallo di tempo Δt è misurato da due orologi diversi: un primo orologio posto nel punto di partenza *A* ed uno nel punto di arrivo *A"*. Δt corrisponde alla differenza dei tempi t_2 e t_1 misurati, rispettivamente, dai due orologi posti in *A"* ed *A*. Δt non ha, perciò, nulla a che vedere con il tempo segnato dall'orologio a luce che è sempre dato dal tempo proprio in eq.(1). Il risultato (3) continua a valere anche se l'orologio a luce viene ruotato di 90° in modo che gli specchi siano allineati lungo l'asse *x* (vedi figura 2a) e più in generale per qualunque altro tipo di orologio (ad esempio un orologio a pendolo, a quarzo, un orologio atomico...). Infatti, supponiamo di porre nel punto centrale dello specchio inferiore (*A*) un altro tipo di orologio, ad esempio un orologio atomico. Nel sistema in cui gli specchi sono fissi, il tempo Δt_A misurato da questo orologio sarà uguale al valore Δt_0 misurato dall'orologio a luce. Adesso, supponiamo che gli specchi vengano messi in moto con velocità *v* rispetto ad un riferimento esterno. Quando lo specchio inferiore si troverà in *A"* (fig.1b), l'intervallo di tempo misurato dagli orologi in *A* e *A"* soddisferà la (3). Ma, essendo $\Delta t_A = \Delta t_0$, esso deve anche soddifare la stessa relazione con Δt_A al posto di Δt_0. L'unica possibilità per cui non venga più soddisfatta la relazione (3) con il nuovo orologio è che, per qualche motivo sconosciuto, il tempo segnato dall'orologio atomico (tempo proprio) durante un'andata e ritorno del fascio sugli specchi quando gli specchi si muovono diventi diverso da Δt_0. Ma questo è in contrasto con il Principio di Relatività perchè, adesso, un osservatore solidale con gli specchi troverebbe che l'orologio atomico e quello a luce, che segnavano gli stessi tempi quando gli specchi erano fermi rispetto ad un dato riferimento, iniziano a segnare tempi diversi quando essi si muovono rispetto a quel riferimento. In tal caso, misurando la differenza di tempi segnati dai due orologi (orologio atomico e orologio a luce), l'osservatore solidale con essi dedurrebbe che il suo sistema si sta muovendo con una data velocità in contraddizione con il principio di Relatività. Dunque, se si assume che il Principio di Relatività sia sempre vero, la relazione (3) deve essere valida per qualunque orologio che sia a riposo rispetto agli specchi e, in particolare, per un'orologio a luce con gli specchi allineati nella direzione del moto.

E' importante sottolineare che il fatto che i tempi misurati dagli orologi presenti in un riferimento debbano coincidere sempre sia che il riferimento sia fermo o in moto (rispetto ad un altro), deve essere valido per qualunque tipo si orologio. In particolare, deve essere valido anche per un *orologio biologico*. Con la parola orologio biologico intendiamo un qualunque fenomeno associato con la vita animale che sia caratterizzato da un certo tempo: ad esempio, il battito del cuore, i processi di invecchiamento ..... Ad esempio, il battito del cuore di un individuo non deve cambiare se esso si trova a terra o su un treno che viaggia a velocità costante, altrimenti significherebbe che le leggi fisiche che sono alla base del funzionamento del cuore sarebbero diverse nei due riferimenti in aperto contrasto con il Principio di Relatività.

Contrazione delle Lunghezze longitudinali al moto.

Per dimostrare che le lunghezze longitudinali si contraggono, facciamo uso ancora dell'orologio a luce ma, stavolta, l'orologio è allineato lungo l'asse di moto *x* come mostrato in figura 2a. Per quello che abbiamo detto prima, anche in questo caso, il tempo proprio è quello in eq.(1), mentre il corrispondente tempo misurato da due orologi diversi posti in *A* e *A"* nel riferimento dove esso si muove deve essere ancora dato dalla (3).

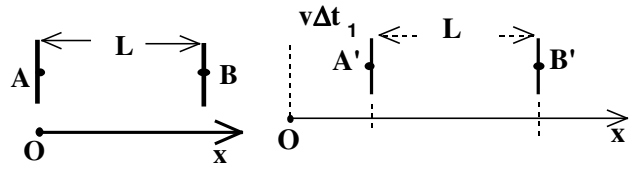

Figura 2a **Figura 2b** **Figura 2c**

Faremo vedere che, se deve valere la dilatazione dei tempi [eq. (3)], allora necessariamente la distanza fra gli specchi deve risultare contratta se misurata nel sistema di riferimento in cui gli specchi si stanno muovendo lungo x con velocità v. In figura 2, per facilitare la comprensione, disegnamo separatamente le posizioni degli specchi nel riferimento in cui essi si spostano con velocità v per tre istanti successivi: quello iniziale in cui un impulso luminoso viene emesso dal punto A coincidente con l'origine O (fig.2a), quello intermedio in cui il fascio colpisce il centro del secondo specchio che si trova nel punto B' (fig.2b) e, infine, quello finale in cui il fascio torna al centro del primo specchio nel punto A'' (fig.2c). Indichiamo con L la distanza fra gli specchi misurata in questo riferimento che, in principio, può essere diversa dalla lunghezza propria L_0 e con Δt_1 e Δt_2 gli intervalli di tempo di andata e ritorno del fascio luminoso fra gli specchi. Quando il fascio urta il secondo specchio in B', esso, che era partito da O, ha percorso una distanza (vedi fig.2a) pari a $d_1 = L + v\Delta t_1$. Ma questa distanza è anche pari a $d_1 = c\,\Delta t_1$ perchè il fascio luminoso percorre la stessa distanza nel tempo Δt_1. Dunque, uguagliando questi valori di d_1 si trova:

$$\Delta t_1 = L/(c - v) \tag{4}$$

Analogamente, la distanza fra il punto B' e il punto A'' è pari a $d_2 = L + v\Delta t_1 - v(\Delta t_1 + \Delta t_2) = L - v\Delta t_2$, dove Δt_2 è il tempo necessario al fascio per andare da B' in A'' (vedi fig.2b e 2c). Inoltre deve valere anche $d_2 = c\Delta t_2$. Uguagliando queste espressioni si trova:

$$\Delta t_2 = L/(c + v) \tag{5}$$

Il tempo totale è, perciò,

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{6}$$

Confrontando la (6) con la (3) si trova che le due relazioni sono identiche solamente se la distanza fra gli specchi L misurata nel sistema di riferimento in cui gli specchi si muovono è legata alla lunghezza propria L_0 dalla relazione:

$$L = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,L_0 \tag{7}$$

che è proprio la contrazione delle lunghezze. Dunque, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi sono collegate l'una all'altra (l'una implica l'altra e viceversa).

CONSEGUENZE SPERIMENTALI.

Decadimento del mesone μ.

Come abbiamo già detto, nelle stelle e, in particolare, nel sole avvengono reazioni violentissime (reazioni nucleari) in grado di sprigionare energie enormi. Come conseguenza di tali reazioni, si vengono a produrre un gran numero di particelle di dimensioni subatomiche (protoni, neutroni, mesoni....) con energie cinetiche elevatissime e velocità spesso molto vicine alla velocità della luce. Molte di queste particelle bombardano continuamente la terra e, urtando le molecole presenti nell'atmosfera terrestre, " rompono" gli atomi e i nuclei atomici dando origine a nuove particelle. I fisici hanno sviluppato nel secolo scorso tutta una serie di rivelatori di grande precisione in grado di localizzare la posizione di tali particelle e di misurare la loro velocità. Alcuni tipi di particelle, come i mesoni μ, al contrario dei protoni e degli elettroni, sono instabili. Ciò significa che se, ad un dato istante, si produce un mesone μ, dopo un dato intervallo di tempo esso si disintegra spontaneamente trasformandosi in altre particelle. Il processo di decadimento soddisfa a leggi casuali analoghe ai processi di vita e di morte degli uomini. Infatti, è chiaro che le durate di vita di individui diversi possono variare molto da individuo ad individuo. Dunque, la durata di vita non è un parametro uguale per tutti. Tuttavia, andando ad osservare una popolazione di molti individui, si può definire una durata media di vita che caratterizza una data comunità. Lo stesso vale per i processi di decadimento delle particelle instabili come il mesone. In tal caso si definisce la *vita media* T_0 del mesone come il tempo dopo il quale una popolazione di N

mesoni si è ridotta a N/e dove e =2.718 è il numero di Nepero. Dopo un intervallo di tempo T pari a n volte la vita media ($T=nT_0$) , il numero di mesoni che ancora non sono decaduti si è ridotto a N/e^n che diventa molto minore di N se n è superiore a poche unità. Dunque, il numero di mesoni che sopravvivono dopo poche vite medie è molto piccolo. Sperimentalmente, la vita media T_0 del mesone misurata nel sistema di riferimento in cui esso è fermo (tempo proprio) risulta $T_0 = 2.2\ 10^{-6}$ s= 2.2 μs. Ora, sappiamo che i mesoni si producono in massima parte sul bordo estremo dell'atmosfera terrestre dove le particelle ad alta energia provenienti dal sole si scontrano violentemente con le molecole di aria. Il limite dell'atmosfera si trova ad altezza di circa 10000 m= 10 km da terra. Se anche i mesoni avessero una velocità uguale al valore massimo possibile che è quello della luce, secondo la fisica classica essi potrebbero percorrere mediamente una distanza $L_0 = cT_0 = 660$ m prima di morire e, quindi, pochissimi mesoni potrebbero arrivare a terra. In realtà, la frazione di mesoni che arrivano a toccare terra è molto più elevata e ciò rappresenta certamente una forte evidenza per la validità della Fisica Relativistica e il fallimento della Fisica Classica. Infatti, a causa della dilatazione del tempo, la vita media del mesone che viene misurata da un osservatore a terra non è T_0 ma è il valore γT_0 che può essere molto maggiore di T_0 se la velocità del mesone è prossima a quella della luce. Dunque, il cammino medio percorso da un mesone prima di morire sarà $L_0=v\gamma T_0$ che può essere molto maggiore di 660 m. Questo spiega interamente perchè il numero di mesoni che arrivano a terra è così elevato. In effetti, misure effettuate a terra su mesoni in volo hanno permesso di verificare quantitativamente la validità della relazione (3) con grande precisione.

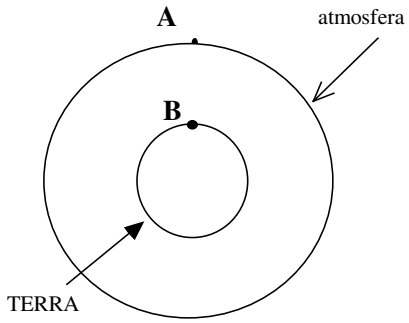

Figura 3

Ora consideriamo il caso di un mesone che nel suo riferimento muoia esattamente dopo un intervallo di tempo pari alla sua vita media T_0. Supponiamo, inoltre, che il mesone "nasca" nel punto A all'estremo dell'atmosfera e muoia nel punto B sulla terra (vedi fig.3.). Il fatto che il mesone sia prodotto in A e muoia in B è un ***evento fisico*** e deve essere vero per qualunque osservatore. Ma come è possibile che ciò accada per un "osservatore" che sia solidale con il mesone? Quest'osservatore, infatti, contrariamente ad uno a terra, vede il mesone scomparire dopo il tempo T_0 mentre l'osservatore a terra lo vede vivere per un tempo $T = \gamma T_0$ molto più lungo. Anche in questo caso, la Relatività permette di spiegare l'apparente incongruenza. Infatti, nel sistema che si muove con il mesone, i punti A all'estremo dell'atmosfera e B sulla terra, si muovono insieme alla terra (il punto B viene incontro al mesone con velocità - v). Ma allora, se L_0 è la distanza fra i punti A e B misurata da un osservatore solidale con la terra (lunghezza propria) , la distanza fra gli stessi punti apparirà contratta e pari a $L = L_0/\gamma$ ad un osservatore solidale con il mesone. Vediamo allora come viene descritto lo stesso fenomeno nei due sistemi di riferimento:

Sistema solidale con la terra: Il mesone si muove con velocità v da A verso B che sono a distanza L_0= 10 km. Poichè i punti A e B sono fissi nel riferimento della terra, la loro distanza L_0 è proprio la lunghezza propria. In questo sistema la vita del mesone è $T = \gamma T_0$. Dunque, poiché il mesone muore quando arriva in B, dovrà valere l'uguaglianza:

$$L_0 = v\ \gamma T_0\ . \qquad (8)$$

Sistema solidale con il mesone: Il mesone è fermo e nasce quando la sua posizione coincide con il punto A mentre muore dopo T_0 quando la sua posizione coincide con B sulla terra. Un "osservatore" solidale con il mesone vede il punto B venirgli incontro con velocità in modulo pari a v. Inoltre, poiché A e B si muovono rispetto a lui, la distanza fra A e B risulta contratta e pari a $L = L_0/\gamma$. Il punto B che si trova inizialmente a distanza L dal mesone, dopo il tempo T_0 dovrà trovarsi a coincidere con la posizione del mesone. Ciò significa che in tale tempo , il punto B si deve essere spostato di L, cioè:

$$L = L_0/\gamma\ =\ v\ T_0 \qquad \Longrightarrow \qquad L_0 = v\ \gamma T_0\ . \qquad (9)$$

La (9) coincide con la (8). Dunque, come ci si doveva aspettare, entrambi gli osservatori riescono a descrivere coerentemente nel loro sistema di riferimento la nascita del mesone nel punto *A* all'estremo dell'atmosfera e la sua morte sulla terra nel punto *B*.

Il Global positioning system (GPS).

Da quanto visto fino ad ora, si potrebbe essere indotti a pensare che gli effetti relativistici siano importanti solo in casi molto lontani dalla nostra comune esperienza. In realtà, grazie ai grandi progressi tecnologici che ha fatto la nostra società nell'ultimo periodo, gli effetti relativistici cominciano a giocare un ruolo non più totalmente trascurabile anche nella vita di tutti i giorni. Un esempio interessante è il *GPS* che serve per localizzare, con precisione elevata, la posizione dei corpi sulla terra. Questo strumento sfrutta direttamente il fatto che la velocità della luce resta la stessa in qualunque riferimento e, quindi, in definitiva usa le leggi relativistiche. Se, invece, non valesse la fisica relativistica ma fosse corretta la legge di composizione delle velocità di Galileo, la precisione con cui si localizza un punto sulla terra utilizzando il *GPS* risulterebbe piuttosto scarsa (incertezze dell'ordine del chilometro che sono di gran lunga superiori a quelle caratteristiche del *GPS*). In particolare, un punto fisso sulla terra non apparirebbe fisso ma sembrerebbe compiere un'oscillazione con un'ampiezza di alcuni chilometri. Per capire come ciò possa accadere, consideriamo un esempio particolarmente semplice. Supponiamo, per semplicità, che il *GPS* sia collegato con dei satelliti geostazionari, cioè satelliti che ruotano attorno alla terra con la stessa velocità angolare con cui la terra ruota attorno a se stessa. Dunque, la posizione del satellite rispetto ad un punto fisso sulla terra resta sempre la stessa durante la rotazione. Questa non è la situazione attuale dei satelliti associati al *GPS* (non sono geostazionari) ma rende molto più semplici i calcoli. Consideriamo, inoltre un punto *P* sulla terra posto sulla linea dell'equatore. In via di principio, la posizione del punto *P* può essere facilmente determinata se si misura la distanza di questo punto da due satelliti *A* e *B* in orbita geostazionaria sul piano dell'Equatore (vedi fig.4). Nel caso più generale di un corpo che si trovi in un qualunque punto sulla terra sarebbero necessari almeno tre satelliti per individuarne la posizione.

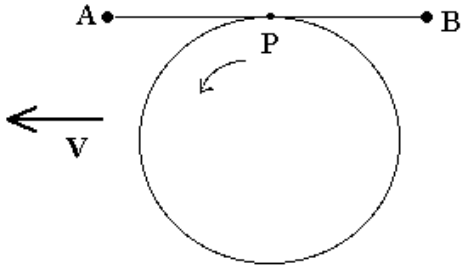

Figura 4a

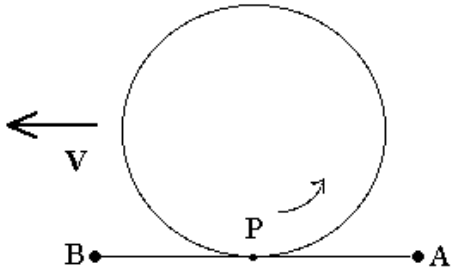

Figura 4b

Il principio della misura è semplice. Supponiamo che sia i satelliti che il GPS siano dotati di orologi di altissima precisione. In realtà, nel caso reale, gli orologi montati sui satelliti sono effettivamente orologi atomici ad altissima precisione mentre l'orologio sul ricevitore *GPS* ha una precisione molto minore. Per tale motivo, il numero di satelliti necessari per localizzare la posizione del *GPS* è maggiore di quella considerata nel nostro esempio. Noi, però, trascureremo questi dettagli che contribuirebbero solamente a complicare l'analisi del problema e assumeremo che anche il ricevitore *GPS* sia dotato di orologi di altissima precisione. Il satellite *A* emette un segnale elettromagnetico al tempo t_1 che viene raccolto dal ricevitore satelllitare (*GPS*) posto in *P* al tempo t_2. Nel segnale emesso da *A* è codificata la posizione spaziale di *A* e l'istante di emissione t_1. In tal modo, assumendo che la velocità della luce sia *c*, il ricevitore può calcolare direttamente la distanza $L_{AP}=c(t_2-t_1)$ fra il punto *A* e il punto *P*. Allo stesso istante t_2, il *GPS* riceve il segnale emesso al tempo t'_1 dal satellite in *B* e calcola $L_{BP}=c(t_2-t'_1)$. Ovviamente, come si può facilmente capire dalla figura, esiste un unico punto sulla linea dell'equatore che dista esattamente di queste distanze dai satelliti. Dunque, con questa misura, la posizione del punto *P* sulla linea dell'equatore viene perfettamente individuata. In via di principio, l'incertezza in questa misura è dovuta solamente all'imprecisione degli orologi e all'incertezza con cui conosciamo la velocità della luce. Ora, però, si deve rimarcare che in tutta questa analisi abbiamo assunto che la velocità della luce sia sempre *c* indipendentemente dalla velocità del riferimento, dunque, abbiamo fatto implicitamente uso della Meccanica Relativistica. In effetti i moderni GPS utilizzano l'ipotesi di costanza della velocità della luce per effettuare i calcoli necessari per determinare la posizione spaziale di un corpo.

Un fisico Galileiano avrebbe dovuto ragionare in modo ben diverso. Egli avrebbe dovuto assumere che la luce viaggi con velocità *c* rispetto al sistema di riferimento dell'Etere e che la sua velocità cambi passando ad un altro riferimento. Per poter fare delle stime quantitative, supponiamo , ad esempio, che il riferimento privilegiato (etere) in

cui la velocità della luce è pari a c sia un sistema solidale con il Sole. In tal caso, nel fare il calcolo della velocità della luce dovremo tenere conto che il nostro sistema di riferimento solidale con la terra si muove rispetto al Sole. In particolare, la terra ruota attorno al proprio asse passante per il centro compiendo una intera rotazione in un giorno e, contemporaneamente ruota su un'orbita ellittica attorno al sole tornando nella stessa posizione dopo un anno. La velocità di un punto P sull'equatore dovuta al moto di rotazione attorno al centro è v_R= 0.465 Km/s, mentre quella associata al moto attorno al sole è molto maggiore (v circa 30 km/s) . Per semplificare l'analisi, possiamo supporre che la velocità dei punti *P, A, B* sia solamente quella (v) associata con il moto sull'orbita ellittica e trascurare le velocità di rotazione attorno all'asse della terra. Inoltre, supponiamo che i due satelliti siano disposti su una linea tangente in P alla linea di equatore (vedi figura 4). In tal caso, in dati istanti di tempo intervallati da 12 ore, i tre punti *A,B* e P si troveranno allineati esattamente lungo la direzione di moto della terra come mostrato in fig.4a e fig.4b. Ora, se valessero le trasformazioni di Galileo delle velocità, la velocità dell'onda elettromagnetica emessa dal satellite e misurata nel riferimento solidale con la terra sarebbe maggiore di c ($v + c$) quando l'onda si propaga nel verso opposto al moto della terra e minore di c ($c - v$) se si propaga nello stesso verso. Ad esempio nel caso mostrato in fig.4a, la velocità del segnale emesso da A risulterebbe maggiore di quello emesso da B. Dunque:

$$L_{AP}= (c + v)(t_2 - t_1) \quad \text{e} \quad L_{BP}= (c - v)(t_2 - t'_1) \tag{10}$$

La situazione si ribalta dopo 12 ore quando i satelliti e il punto P si trovano nella nuova posizione mostrata in fig.4b. In tal caso è la velocità del segnale emesso da B ad essere maggiore. Ciò significa che, utilizzando il *GPS* che, invece, fa i calcoli assumendo la costanza della velocità della luce, si troverebbe che il punto fisso P a terra sembra compiere un'oscillazione con periodo di 24 ore. Cerchiamo, ora, di dare una stima quantitativa dello spostamento apparente che verrebbe rilevato dal *GPS* se l'ipotesi c=costante non fosse corretta. Consideriamo, ad es. un punto P che sia equidistante dai due satelliti a distanza d da entrambi. Nel primo caso (eq.(10)), gli intervalli di tempo emissione-ricevimento misurati dal *GPS* sarebbero:

$$\Delta t_A = d/(c+v) \ , \ \Delta t_B = d/(c - v) \tag{11}$$

D'altra parte, il *GPS* , che fa i calcoli assumendo la costanza della velocità della luce, concluderebbe che le distanze dei due satelliti da P sono diverse fra loro e pari a

$$L_{BP}= c\Delta t_B = cd/(c - v) > L_{AP}= c\Delta t_A = cd/(c + v) \tag{12}$$

Dunque, il punto P non verrebbe rilevato come al centro fra i due satelliti ma apparirebbe spostato verso A di una quantità x =(L_{BP} - L_{AP})/2 che, facendo i calcoli risulta:

$$x = \frac{cd}{2}\left[\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v}\right] = \frac{cdv}{c^2 - v^2}$$

Ora, $v << c$ e, quindi, nel denominatore dell'ultimo membro a sinistra si può trascurare v^2 rispetto a c^2 e porre $c^2 - v^2 \approx c^2$. Dunque, si ottiene

$$x \approx \frac{vd}{c} \tag{13}$$

Nel caso di fig.4b, invece, avverrebbe il contrario con il punto P che apparirebbe spostato verso B della stessa quantità x sopra determinata. In conclusione, nell'arco di un giorno, il punto P sembrerebbe oscillare attorno al punto medio fra i due satelliti con l'ampiezza di oscillazione x. Ora se usiamo i valori v = 30 Km/s , c = 300000 km/s e d = 40.000 Km, che sono valori ragionevoli, si deduce $x \approx$ 4 Km !!! Il fatto che effetti di questo tipo non vengono osservati con il *GPS* fornisce, dunque, una forte conferma per la validità dell'ipotesi che la velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti inerziali.

Per completezza, dobbiamo anche osservare che l'alta precisione del *GPS* fa sì che esso sia sensibile anche agli effetti del campo gravitazionale che sono stati presi in considerazione dalla Teoria della Relatività Generale. Per questo motivo, il moderno *GPS* tiene anche in conto di questi ulteriori effetti. Se non si tenesse conto di questi effetti, la precisione con cui il *GPS* localizza un punto sulla terra sarebbe notevolmente minore di quella effettivamente raggiunta. Inoltre, vogliamo rimarcare che la nostra trattazione precedente è stata fortemente semplificata perchè abbiamo trascurato il fatto che il punto P e i satelliti stanno ruotando attorno all'asse della terra con la stessa velocità angolare e , quindi con velocità lineari diverse. Dunque, in una trattazione dettagliata avremmo dovuto anche tener conto del fatto che i tempi t_1 e t'_1 misurati sui satelliti [eq.(10)] e il tempo t_2 misurato dal *GPS* sono misurati su sistemi che si muovono con velocità diverse e, quindi, si sarebbe dovuto tener in conto della dilatazione relativistica dei tempi. In

effetti gli attuali *GPS* tengono conto in dettaglio di tutti questi effetti. Dunque, il buon funzionamento del *GPS* fornisce una diretta conferma della validità di tutte le relazioni della fisica relativistica sia per quanto riguarda la Relatività Speciale che di quella Generale.

LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITA' RELATIVISTICA.

La nostra critica alla Fisica Classica era iniziata dalla critica alla legge di composizione delle velocità di Galileo. Tale legge, infatti, prevede che la velocità della luce dipenda dal sistema inerziale in cui viene misurata. Infatti, se $\boldsymbol{v}'$ è la velocità di un corpo misurata su un riferimento S' che si muove con velocità di trascinamento $\boldsymbol{v}_T$ rispetto ad un altro riferimento S, allora la velocità $\boldsymbol{v}$ misurata nel riferimento S deve soddisfare la legge di composizione delle velocità:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_T \tag{14}$$

D'altra parte, gli esperimenti di Michelson ed altri successivi mostrano che la velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti, dunque la (14) non può essere vera in generale. La relazione (1) era stata dedotta facendo l'assunzione implicita che il tempo t misurato dagli orologi è lo stesso nei due riferimenti inerziali. Vediamo, perciò, come si modifica la (1) se utilizziamo le trasformazioni di Lorentz. Consideriamo, quindi, un sistema di riferimento S' di coordinate spazio-temporali x',y',z',t' che si muove con velocità v_T lungo l'asse x rispetto ad un riferimento S di coordinate spazio-temporali x,y,z,t. Gli assi x,x' , y,y' *e* z,z' sono a due a due paralleli e le origini O' e O dei due sistemi coincidono quando $t = t' = 0$.

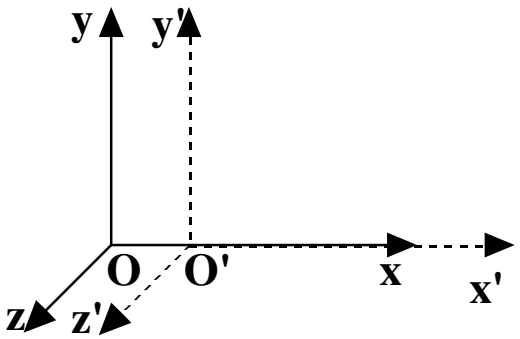

Figura 5

Le equazioni di Lorentz sono:

$$x' = \gamma(x - v_T t) \tag{15}$$

$$y' = y \tag{16}$$

$$z' = z \tag{17}$$

$$t' = \gamma(t - v_T x / c^2) \tag{18}$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_T^2 / c^2}} \tag{19}$$

Ora si danno due situazioni fisicamente diverse che conviene trattare separatamente:

I) ***Il corpo si sposta nel sistema S' con velocità v' parallela all'asse di moto relativo*** (asse x').

In tal caso, la velocità relativa $\boldsymbol{v}'$ e la velocità di trascinamento $\boldsymbol{v}_T$ sono parallele. Per trovare la relazione che lega le velocità del corpo nei riferimenti S e S', calcoliamo la velocità del corpo nel sistema S' utilizzando le relazioni di Lorentz. Poichè, per ipotesi, il corpo si muove in S' lungo l'asse x', l'unica componente diversa da zero della velocità $\boldsymbol{v}'$ è la componente x' pari a $v'_x = \Delta x'/\Delta t'$, dove $\Delta x'$ è lo spostamento del corpo lungo x' e $\Delta t'$ è l'intervallo di tempo misurato in S'. Al tempo iniziale t'_i il corpo si troverà nel punto individuato dalla coordinata x'_i . I valori t'_i e x'_i saranno legati ai corrispondenti valori (x_i , t_i) misurati nel sistema S dalle relazioni di Lorentz:

$$x_i' = \gamma(x_i - v_T t_i) \tag{20}$$

$$t_i' = \gamma(t_i - v_T x_i / c^2) \tag{21}$$

Dopo un intervallo di tempo $\Delta t'$ nel riferimento S' (Δt in S), il corpo si troverà nel punto individuato dalla coordinata x'_f (x_f in S). Le nuove coordinate spazio-temporali in S' saranno legate a quelle in S dalle relazioni:

$$x_f' = \gamma(x_f - v_T t_f) \tag{22}$$

$$t_f' = \gamma(t_f - v_T x_f / c^2) \tag{23}$$

dove $t_f = t_i + \Delta t$ e $t'_f = t'_i + \Delta t'$. Ora, lo spostamento del corpo in S' nel tempo $\Delta t'$ è dato da $\Delta x' = x'_f - x'_i$, mentre quello in S è $\Delta x = x_f - x_i$. Sottraendo membro a membro la (20) dalla (22) e la (21) dalla (23), si trova:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v_T \Delta t) \tag{24}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v_T \Delta x / c^2) \tag{25}$$

Facendo il rapporto fra la (24) e la (25) membro a membro si ottiene dopo semplici passaggi algebrici:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v_T}{1 - \frac{v_T}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad \Longrightarrow \quad v'_{x'} = \frac{v_x - v_T}{1 - \frac{v_T v_x}{c^2}} \tag{26}$$

dove v_x è la componente x della velocità del corpo misurata in S e $v'_{x'}$ quella misurata in S'. La (26) rappresenta la legge di trasformazione delle velocità da un sistema all'altro quando la velocità del corpo nel sistema S' è parallela alla direzione di trascinamento (**legge di Trasformazione delle velocità longitudinali**). Naturalmente, se ci mettiamo dal punto di vista di S', in questo sistema vedremo il sistema S che si sposta rispetto a noi con velocità - v_T lungo l'asse x'. Dunque, la velocità misurata nel sistema S sarà legata a quella in S' dalla relazione (26) con v_T che viene sostituito da - v_T e v_x e $v'_{x'}$ che si scambiano fra loro , cioè:

$$v_x = \frac{v'_{x'} + v_T}{1 + \frac{v_T v'_{x'}}{c^2}} \tag{27}$$

Esercizio: Lo studente verifichi che, ricavando v_x in funzione di $v'_{x'}$ utilizzando la (26) si trova effettivamente la (27).

Ovviamente, poichè la trasformazione delle velocità di Galileo descrive in modo molto accurato il comportamento dei corpi materiali che si muovono con velocità piccole rispetto alla luce, dobbiamo aspettarci che la (26) si riduca alla trasformazione di Galileo delle velocità in tale limite. In effetti, il termine contenente le velocità nel denominatore in eq.(26) risulta molto minore di 1 se $v'_{x'} << c$ e $v_T << c$. Dunque, in questo caso, l'intero denominatore può essere sostituito con 1 e la (26) si riduce alla relazione di Galileo in eq.(14).

II) Il corpo si sposta in S' lungo l'asse y' perpendicolare alla direzione del moto relativo fra i due sistemi (asse x).

In questo caso, la velocità v' misurata nel riferimento in moto S' ha solamente la componente y' che è definita come lo spostamento $\Delta y'$ lungo y' nell'intervallo di tempo $\Delta t'$. Al contrario, nel sistema S, il corpo avrà una componente della velocità anche lungo l'ase x. Per calcolare i valori di $\Delta y'$ e $\Delta t'$ dovremo utilizzare le equazioni (16) e (18) come si è fatto con le (15) e (18) nel caso precedente. Si trova facilmente:

$$\Delta y' = \Delta y \tag{28}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v_T \Delta x / c^2) \tag{29}$$

Dunque, dividendo membro a membro la (28) e la (29) e tenendo conto della definizione delle velocità $v'_y = \Delta y'/\Delta t'$ e $v_y = \Delta y/\Delta t$ e $v_x = \Delta x/\Delta t$, si trova facilmente:

$$v'_{y'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{v_T v_x}{c^2}} \tag{30}$$

Una relazione del tutto analoga si trova nel caso in cui il corpo si muove in S' lungo l'asse z' ancora perpendicolare al moto relativo. In tal caso, l'unica componente diversa da zero della velocità in S' è $v'_{z'}$ data da:

$$v'_{z'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{v_T v_x}{c^2}} \tag{31}$$

Anche in questi casi (eq.(30) e (31)), si verifica immediatamente che le relazioni trovate si riducono a quelle di Galileo nel caso di velocità dei corpi trascurabili rispetto a quella della luce.

Esercizio: lo studente ricavi la (31) a partire dalle Trasformazioni di Lorentz.

Nel caso generale di un corpo che, nel sistema S' in moto relativo rispetto ad S, si muova lungo una direzione arbitraria, la sua velocità sarà individuata da tre diverse componenti $v'_{x'}$, $v'_{y'}$, $v'_{z'}$ lungo gli assi x',y',z'. Queste componenti della velocità sono legate a quelle nel sistema S dalle relazioni (26), (30) e (31).

Considerazioni sui concetti di tempo proprio e lunghezza propria.

Abbiamo visto che, in Relatività gli intervalli di tempo misurati e le lunghezze dei regoli sono concetti relativi che dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono misurati. In realtà, per evitare incomprensioni, è bene rimarcare ulteriormente che, in realtà ci sono ancora dei tempi e delle lunghezze che hanno un carattere assoluto. Essi sono il ***tempo proprio*** e la ***lunghezza propria***. La lunghezza propria di un dato regolo è la lunghezza che viene misurata nel sistema in cui il regolo è fermo. Per un dato regolo, questa lunghezza ha uno e un solo valore. Se, ad esempio, un regolo di lunghezza propria 1m si trova appoggiato sul pavimento di un treno fermo in stazione, un passeggero sul treno misurerà la lunghezza di 1m. Se, poi, il treno si metterà in movimento con velocità costante v, lo stesso passeggero continuerà a vedere il regolo fermo e continuerà a misurare la stessa lunghezza di 1m, indipendentemente dal valore della velocità del treno. Dunque la lunghezza propria è un parametro che caratterizza in modo assoluto il regolo. Si potrà, in particolare, dire senza ambiguità: ho un regolo di lunghezza propria 1m, 2m , 3m ecc. Si noti, inoltre, che la lunghezza propria può essere anche determinata da un " osservatore" che veda il regolo muoversi rispetto a lui con velocità $\boldsymbol{v}$. In tal caso, infatti, l'osservatore, può misurare la velocità v del corpo e la lunghezza L. Dopodichè, utilizzando la legge di trasformazione delle lunghezze [eq.(7) se il regolo è orientato lungo la direzione di moto], egli potrà calcolare il valore della lunghezza a riposo L_0.

Analogamente, il tempo proprio, cioè il tempo misurato da un unico orologio fermo rispetto all'osservatore è un parametro assoluto. Supponiamo, ad esempio di avere un pendolo collegato al soffitto di un treno fermo in stazione. Se si mette il pendolo in oscillazione, esso compierà un' oscillazione completa in un periodo T_0, ad esempio pari ad 1s. Il tempo T_0 rappresenta un tempo proprio perchè esso è misurato nel sistema di riferimento solidale con il pendolo. Ad esempio, per misurare il periodo di oscillazione T_0, si può porre nel punto di minima altezza raggiunto dal pendolo un orologio fisso e misurare il tempo necessario al pendolo per compiere un'intera oscillazione. Se, ora, il vagone viene messo in moto con velocità costante, l'osservatore sul treno continuerà a vedere il pendolo oscillare con lo stesso periodo (per il Principio di Relatività, le leggi del moto sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali). Dunque, il periodo T_0 misurato nel riferimento solidale con il pendolo, cioè il tempo proprio del pendolo, rappresenta un parametro assoluto che caratterizza in modo univoco l'oscillazione di quel dato pendolo. Anche in questo caso, un osservatore che si trovi in un riferimento in cui il pendolo si muove con velocità v, misurerà un periodo diverso T . Tuttavia, egli potrà conoscere il valore del tempo proprio T_0 utilizzando la (3).