

Insegnamento di **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I&II (12 CFU) – PARTE II**

Anno Accademico 2008/2009 (u.a.: marzo 2009)

Docente: **Prof. Ing. Stefano Bennati**

(e-mail: [s.bennati@ing.unipi.it](mailto:s.bennati@ing.unipi.it) - home page: <http://www2.ing.unipi.it/~d5660/>)

Esercitazioni in aula: Prof S. Bennati, Ing. R. Barsotti, Ing. P. Valvo

**1. Finalità, obiettivi formativi e organizzazione didattica del corso.**

La parte II del corso ha come primo scopo l'apprendimento, da parte dello studente, delle nozioni fondamentali della *teoria classica dell'elasticità lineare*, e, conseguentemente, della capacità di analizzare il comportamento meccanico di corpi solidi modellati come corpi continui deformabili elasticamente. Il secondo scopo consiste nella presentazione critica di due *modalità di crisi del comportamento elastico delle strutture*: la prima dovuta all'insorgere, al crescere dei carichi esterni, di *deformazioni anelastiche*, la seconda dovuta, invece, all'insorgere di *fenomeni di instabilità dell'equilibrio*.

L'insegnamento in aula prevede lezioni, destinate alla presentazione e alla discussione dei contenuti e dei metodi di maggior rilievo, ed esercitazioni, nelle quali gli stessi contenuti e metodi vengono sviluppati legandoli a particolari applicazioni.

**2. Contenuti del corso.**

***A) Meccanica dei solidi deformabili elasticamente***

**Cap. 1. Deformazioni.** – Configurazione di riferimento e configurazione corrente o attuale di un corpo continuo. Cambiamento di configurazione e *deformazione* di un corpo continuo come cambiamento di configurazione dotato di sufficiente regolarità. Gradienti della deformazione e gradienti dello spostamento. Misure locali di deformazione: *dilatazioni lineari, scorrimenti angolari, dilatazioni superficiali e dilatazione cubica*. Tensore destro di Cauchy-Green e matrice  $C = F^T F$  che lo rappresenta.

Deformazioni *piccole o infinitesime*. Matrice di deformazione infinitesima e sue componenti: loro significato geometrico. Espressioni delle dilatazioni lineari, degli scorrimenti angolari, della dilatazione superficiale e di quella cubica nel caso infinitesimo. *Direzioni principali* della deformazione e *deformazioni principali*. Riferimento principale per la deformazione. Valori estremi della dilatazione lineare e dello scorrimento angolare. Variazione delle componenti di deformazione per effetto di cambiamenti del sistema di riferimento. Il *tensore di deformazione infinitesima*. Le componenti di deformazione nei riferimenti polare e cilindrico.

Campi di spostamento *cinematicamente ammissibili*. Equazioni di compatibilità di Saint-Venant.

**Cap. 2. Tensioni.** – Classificazione delle forze agenti su un corpo e le sue parti. Le forze di contatto interne e il principio delle sezioni di Eulero. Il principio delle tensioni di Cauchy e la definizione del *vettore tensione*.

Tensione normale e tensione tangenziale. Continui di Cauchy e continui micropolari. Teorema del tetraedro di Cauchy-Poisson. Componenti speciali di tensione e matrice delle componenti speciali di tensione. Equazioni indefinite di equilibrio di Cauchy. Equazioni di reciprocità e simmetria della matrice delle componenti di tensione. Equazioni ai limiti. Campi di sforzo *equilibrati* o *staticamente ammissibili*. Legge di trasformazione delle componenti di tensione per effetto di cambiamenti del sistema di riferimento. *Il tensore degli sforzi*. Le componenti di tensione nei riferimenti polare e cilindrico. Tensioni e direzioni principali. Valori estremi della tensione normale. Linee isostatiche. La rappresentazione di Mohr dello stato di tensione: piano delle tensioni, cerchi di Mohr e arbelo di Mohr. Valori estremi della tensione tangenziale.

**Cap. 3. Equazioni costitutive dei materiali elastici.** – Aspetti fenomenologici della risposta meccanica dei materiali ai carichi esterni: comportamento elastico lineare e non lineare; comportamento anelastico. {Cenni alla teoria assiomatica delle equazioni costitutive: principio di determinismo, principio dell'azione locale e principio di indifferenza materiale; per approfondimenti, vedi [1], pagg. 83-84}.

Materiali elastici e materiali elastici lineari. Matrice dei moduli elastici: prima e seconda simmetria minore. Nozione di omogeneità. Simmetria maggiore della matrice dei moduli elastici e materiali iper-elastici lineari. Lavoro di deformazione relativo ad un processo di carico e nozione di densità di energia di deformazione elastica. {Simmetria elastica rispetto ad un piano e rispetto ad un asse. Equazioni costitutive dei materiali ortotropi; per approfondimenti vedi [1], pagg. 113-115}. Materiali isotropi: equazioni di Lamé e costanti elastiche di Lamé. Inversione delle equazioni di Lamé e costanti elastiche tecniche: *modulo di elasticità normale* o di Young, *modulo di elasticità tangenziale* e *coefficiente di contrazione trasversale* di Poisson; loro significato meccanico e loro limitazioni. Modulo di compressibilità cubica.

**Cap. 4. Il Problema dell'equilibrio elastico.** – Nozioni di *campo di spostamento virtuale* e di corrispondente *lavoro virtuale* delle forze esterne agenti su un corpo continuo in equilibrio. Teorema dei lavori virtuali. Campi di sforzo equilibrati o staticamente ammissibili come campi di sforzo che soddisfano l'equazione dei lavori virtuali per ogni scelta dello spostamento virtuale.

Formulazione del problema dell'equilibrio per un corpo costituito da un materiale iperelastico lineare ed equazioni di campo e condizioni al bordo che lo definiscono. Questioni legate all'esistenza della soluzione. Teorema di unicità di Kirchhoff. Linearità della soluzione e principio di sovrapposizione degli stati elastici. Teorema di reciprocità di Betti-Maxwell. Teorema di Lamé-Clapeyron. Formulazioni variazionali: teorema della minima energia potenziale totale e teorema della minima energia potenziale complementare.

Il problema *elastico piano nella tensione* e il problema *elastico piano nella deformazione*. Esempi di soluzione di problemi piani in coordinate rettangolari e in coordinate polari per materiali isotropi.

**Cap. 5. Il Problema di De Saint-Venant.** – Ipotesi geometriche, costitutive e meccaniche che lo definiscono.

*La torsione pura*. Il caso della sezione circolare. Il *metodo semi-inverso* di Saint-Venant. Campi di spostamento e di sforzo. Angolo unitario di torsione e rigidezza torsionale. Il caso della sezione non circolare. Funzione di ingobbamento e formulazione del relativo problema di Neumann. Nozione di rigidezza torsionale. Funzione degli sforzi di Prandtl e formulazione del corrispondente problema di Dirichlet in termini della funzione di tensione intrinseca. Soluzione esplicita per il caso della sezione ellittica.

Analogia di Prandtl. Soluzioni approssimate per le sezioni rettangolari sottili e le sezioni sottili aperte in genere. L'analogia idrocinetica e le formule di Bredt per le sezioni tubolari sottili. Il caso delle sezioni sottili chiuse pluriconnesse.

*Lo sforzo normale semplice.* Campi di spostamento e di sforzo. Rigidezza estensionale.

*La flessione retta.* Campi di spostamento e di sforzo. Asse della sollecitazione, asse neutro e asse di flessione. Rigidezza flessionale.

*La flessione composta (flessione e taglio).* Espressioni approssimate delle tensioni tangenziali: la formula di Jourawski. **{Il fattore di taglio; per approfondimenti, vedi [2]}**. Applicazioni alle sezioni simmetriche e no: esempi della sezione a doppio T e della sezione a C. Nozione di *centro di taglio*.

Altre condizioni di carico: la *flessione deviata* e lo *sforzo normale eccentrico*. I teoremi della flessione deviata. Nozione di *nocciolo centrale di inerzia*.

Il postulato di De Saint-Venant e il significato *universale* delle soluzioni speciali. Le soluzioni speciali e le relazioni costitutive della teoria tecnica delle travi elastiche.

**Cap. 6. Crisi del comportamento elastico.** – Il *comportamento duttile*. Aspetti fenomenologici della prova di trazione dei materiali metallici. Tensioni di proporzionalità, di snervamento e di rottura; allungamento percentuale a rottura; scarico elastico, deformazioni permanenti o plastiche. Nozioni di dominio elastico e di superficie limite. Criterio di Guest-Tresca o *criterio della massima tensione tangenziale*. Considerazioni sperimentali e superficie limite come superficie cilindrica con le generatrici perpendicolari al piano deviatorico. *Criterio di Von Mises* come utile modifica del criterio di Tresca. Interpretazione di Huber-Henky e *criterio della massima energia distorcente*; interpretazione di Nadai e *criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale*; interpretazione di Novozhilov e *criterio di massima tensione tangenziale media*.

Il *comportamento fragile*: la prova di compressione nei materiali lapidei. Criterio di Galileo per i materiali fragili. Criterio di Coulomb per i materiali incoerenti.

Rappresentazione dei criteri di Tresca, di Galileo e di Coulomb nel piano della tensione.

## **B) Crisi delle strutture elastiche**

**Cap. 1. La crisi conseguente all'insorgere di deformazioni permanenti.** - Nozioni di *tensione ideale*, di *coefficiente di sicurezza* e di *tensione ammissibile*. Le verifiche di resistenza. Applicazioni alla verifica delle travature: forma assunta dai criteri di crisi di Tresca e di Von Mises nel caso delle travature.

**Cap. 2. La crisi conseguente all'insorgere di fenomeni di instabilità.** - Perdita di stabilità della soluzione di equilibrio elastico e perdita di unicità per diramazione. Diramazione stabile e diramazione instabile. Metodo di Eulero o degli *equilibri adiacenti*. Nozione di *carico critico euleriano*. Applicazione ai sistemi di aste rigide vincolate elasticamente. Il caso dell'*instabilità flessionale*: l'equazione differenziale di Eulero per l'asta semplicemente compressa e sua integrazione. Determinazione del carico critico euleriano e sua dipendenza dalle condizioni di vincolo. Nozioni di lunghezza libera di inflessione e di snellezza. **{Instabilità per divergenza della soluzione di equilibrio e sensibilità alle imperfezioni. Iperbole di Eulero; per approfondimenti, vedi [3]}**. Applicazioni del metodo euleriano a semplici sistemi di travi elastiche.

### 3. Riferimenti bibliografici

- [1] A. SOLLAZZO & S. MARZANO, *Scienza delle Costruzioni*, Vol. 2, UTET, 1988 [in particolare, fare riferimento a questo testo per i capitoli dal primo al quinto relativi a deformazioni, tensioni, equazioni costitutive e per il problema dell'equilibrio elastico].
- [2] M. CAPURSO, *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*, Pitagora Ed., 1971 [in particolare, fare riferimento a questo testo per i capitoli 6 e 7 relativi, rispettivamente, ai criteri di crisi dei materiali elastici e al problema di Saint-Venant].
- [3] L. GAMBAROTTA, L. NUNZIANTE, A. TRALLI, *Scienza delle Costruzioni*, McGraw-Hill, 2003 [in particolare, fare riferimento a questo testo per i paragrafi 9-14 del capitolo 7 relativi all'analisi dei fenomeni di instabilità dell'equilibrio].

### Altri (utili) riferimenti bibliografici

- [4] A.E.H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, 1944.
- [5] I.S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill, 1956.
- [6] I.S. TIMOSHENKO and GERE, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
- [7] I.S. TIMOSHENKO, *History o strength of materials*, McGraw-Hill, 1961.