Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I

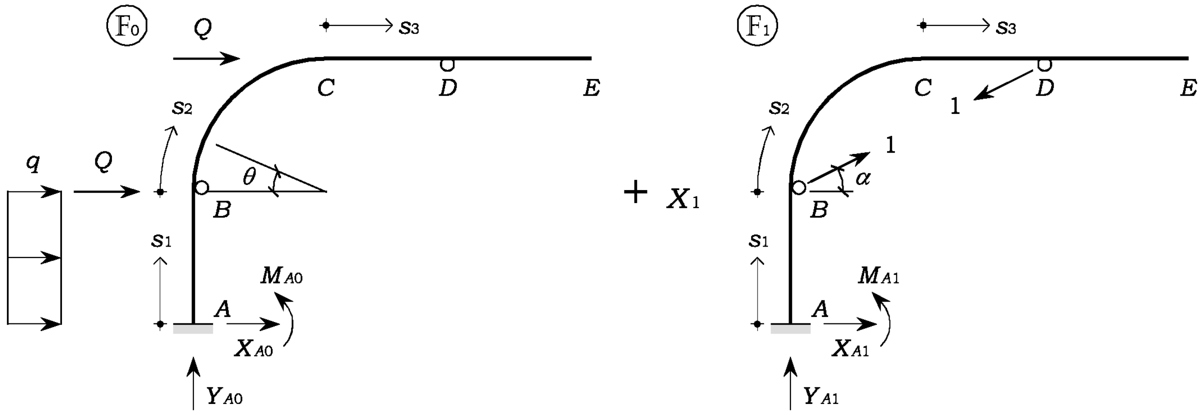
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 15 febbraio 2008 – Soluzione

Problema 1

- Studiamo il problema con il metodo delle forze, assumendo come incognita iperstatica la forza assiale nell'asta *BD*:



Sistema $\mathbb{F}_0$

Reazioni vincolari:

$$X_{A0} = -qa - 2Q = -2qa \qquad Y_{A0} = 0 \qquad M_{A0} = \frac{qa^2}{2} + 3Qa = 2qa^2$$

Caratteristiche di sollecitazione ($\theta = s_2 / a$):

$$N_{AB0}(s_1) = 0 \qquad T_{AB0}(s_1) = 2qa - qs_1 \qquad M_{AB0}(s_1) = -2qa^2 + 2qas_1 - \frac{qs_1^2}{2}$$

$$N_{BC0}(\theta) = \frac{qa}{2}\sin\theta \qquad T_{BC0}(\theta) = \frac{qa}{2}\cos\theta \qquad M_{BC0}(\theta) = \frac{qa^2}{2}(\sin\theta - 1)$$

$$N_{CD0}(s_3) = 0 \qquad T_{CD0}(s_3) = 0 \qquad M_{CD0}(s_3) = 0$$

Sistema $\mathbb{F}_1$

Reazioni vincolari:

$$X_{A1} = 0 \qquad Y_{A1} = 0 \qquad M_{A1} = 0$$

Caratteristiche di sollecitazione ($\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$ e $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$):

$$N_{AB1}(s_1) = 0 \qquad T_{AB1}(s_1) = 0 \qquad M_{AB1}(s_1) = 0$$

$$N_{BC1}(\theta) = -\frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{\sqrt{5}} \qquad T_{BC1}(\theta) = \frac{\sin\theta - 2\cos\theta}{\sqrt{5}} \qquad M_{BC1}(\theta) = a\frac{1 - \cos\theta - 2\sin\theta}{\sqrt{5}}$$

$$N_{CD1}(s_3) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad T_{CD1}(s_3) = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad M_{CD1}(s_3) = \frac{s_3 - a}{\sqrt{5}}$$

Coefficienti di Müller-Breslau:

$$\eta_1 = -\sqrt{5}a\left(\frac{X_1}{EA} - \varepsilon\right)$$

$$\eta_{10} = \int_0^{\pi/2} a\frac{1 - \cos\theta - 2\sin\theta}{\sqrt{5}}\frac{qa^2}{2EJ}(\sin\theta - 1)\, a\, d\theta = \frac{qa^4}{2\sqrt{5}EJ}\int_0^{\pi/2}(-1 + \cos\theta + 3\sin\theta - \sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{qa^4}{2\sqrt{5}EJ}\left[-2\theta + \sin\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7}{2} - \pi\right)\frac{qa^4}{EJ}$$

$$\eta_{11}=\int_0^{\pi/2}\left(a\frac{1-\cos\theta-2\sin\theta}{\sqrt{5}}\right)^2\frac{a}{EJ}\,d\theta+\int_0^a\left(\frac{s_3-a}{\sqrt{5}}\right)^2\frac{1}{EJ}\,ds_3=$$

$$=\frac{a^3}{5EJ}\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2\theta+4\sin^2\theta-2\cos\theta-4\sin\theta+4\sin\theta\cos\theta)d\theta+\frac{1}{5EJ}\int_0^a(s_3^2-2as_3+a^2)ds_3=$$

$$=\frac{a^3}{5EJ}\left[2\theta+3\left(\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\theta\right)-2\sin\theta+4\cos\theta-2\cos^2\theta\right]_0^{\pi/2}+\frac{1}{5EJ}\left[\frac{s_3^3}{3}-as_3^2+a^2s_3\right]_0^a=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11}{15}\right)\frac{a^3}{EJ}$$

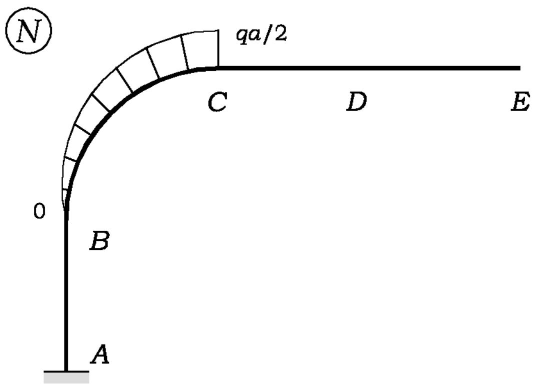
Incognita iperstatica ($EA = EJ/a^2$):

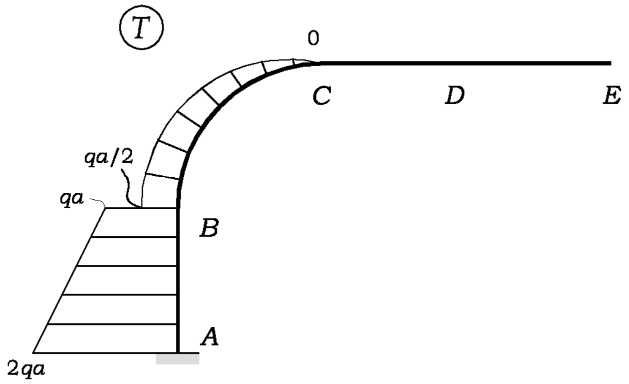
$$X_1=\frac{\sqrt{5}a\varepsilon-\eta_{10}}{\sqrt{5}\frac{a}{EA}+\eta_{11}}=\frac{\sqrt{5}\varepsilon-\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7}{2}-\pi\right)\frac{qa^3}{EJ}}{\frac{\sqrt{5}}{EA}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11}{15}\right)\frac{a^2}{EJ}}=\frac{10\varepsilon-\left(\frac{7}{2}-\pi\right)\frac{qa^3}{EJ}}{\frac{10}{EA}+\sqrt{5}\left(\pi-\frac{22}{15}\right)\frac{a^2}{EJ}}=\frac{10EA\varepsilon-\left(\frac{7}{2}-\pi\right)qa}{10+\sqrt{5}\left(\pi-\frac{22}{15}\right)}$$

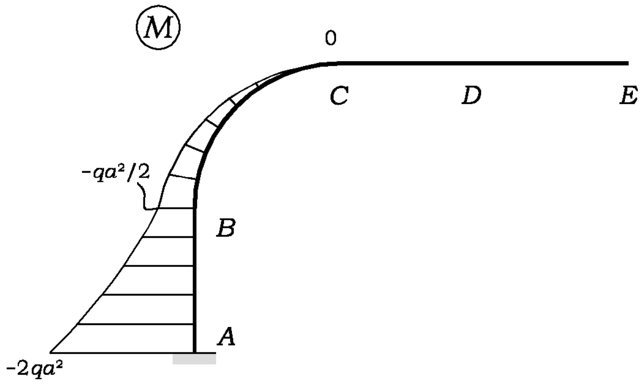
- Valore di ε per cui si annulla l'incognita iperstatica:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{10}\left(\frac{7}{2}-\pi\right)\frac{qa^3}{EJ}$$

- Per $\varepsilon=\bar{\varepsilon}$, l'incognita iperstatica risulta $X_1=0$ e, dunque, le C.d.S. sono quelle del sistema $\mathbb{F}_0$. Diagrammi quotati:

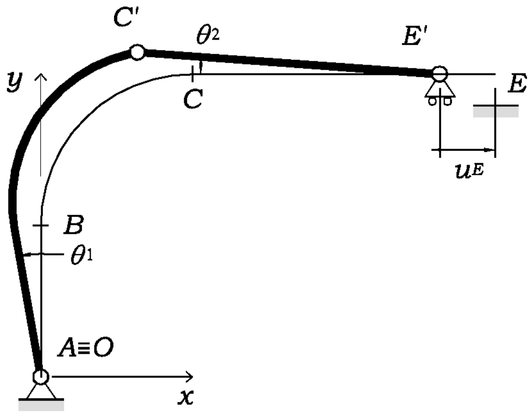






Problema 2

- Nell'ipotesi di aste rigide, il sistema subisce il seguente spostamento rigido infinitesimo



con $\theta_2 = -\dfrac{\theta_1}{2}$ $\qquad u_E = -2a\theta_1$.

- Valore delle coppie compatibile con l'equilibrio (utilizzando il TLV):

$$\delta L = -2qa(a\theta_1) + M\theta_1 + (-M)(-\frac{\theta_1}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4}{3}qa^2$$

(Soluzione a cura di Paolo Valvo)