Università di Pisa

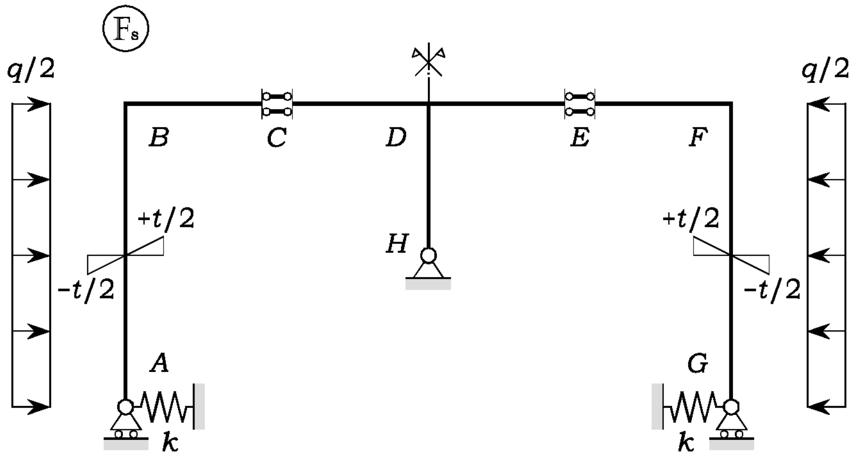
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

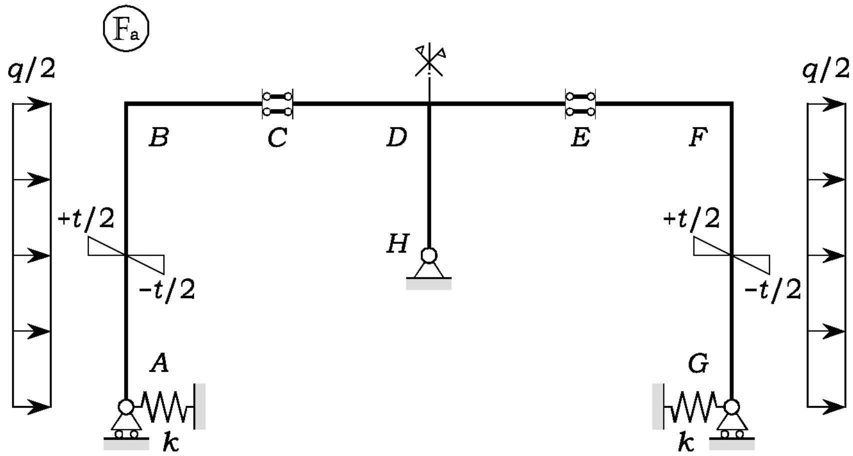
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 31 gennaio 2008 - Soluzione

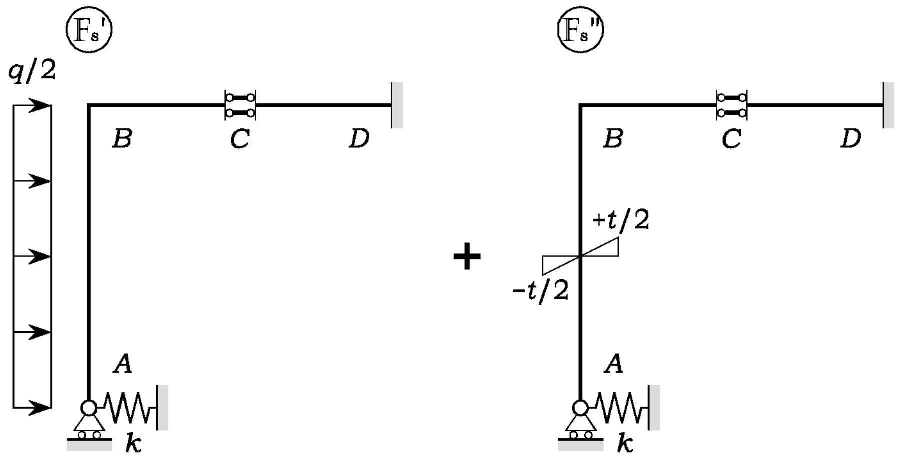
- Il sistema dato si può scomporre nella somma del sistema simmetrico $\mathbb{F}$s



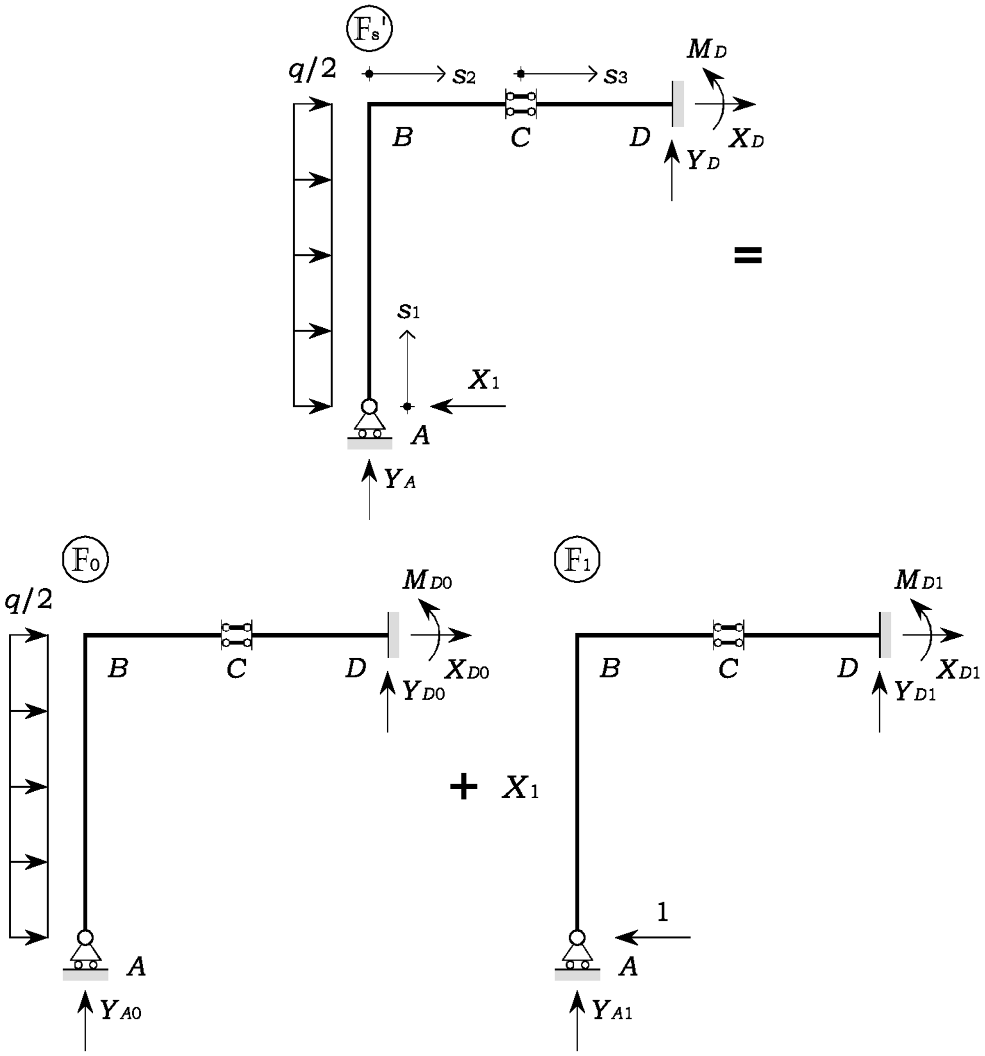
e del sistema antisimmetrico $\mathbb{F}$a



- Lo studio del sistema simmetrico, considerata la simmetria e l'inestensibilità delle aste (in particolare, della *DH*), può essere ricondotto allo studio della sola metà sinistra; inoltre, si possono studiare separatamente gli effetti del carico e della temperatura:



- Studiamo il sistema $\mathbb{F}s'$, soggetto alla sola azione del carico distribuito, con il metodo delle forze, assumendo come incognita iperstatica la reazione della molla in *A*



Sistema $\mathbb{F}_0$

Reazioni vincolari:

$Y_{A0} = 0 \qquad X_{D0} = -qa \qquad Y_{D0} = 0 \qquad M_{D0} = -qa^2$

Caratteristiche di sollecitazione:

$N_{AB0}(s_1) = 0 \qquad T_{AB0}(s_1) = -qs_1/2 \qquad M_{AB0}(s_1) = -qs_1^2/4$

$N_{BC0}(s_2) = -qa \qquad T_{BC0}(s_2) = 0 \qquad M_{BC0}(s_2) = -qa^2$

$N_{CD0}(s_3) = -qa \qquad T_{CD0}(s_3) = 0 \qquad M_{CD0}(s_3) = -qa^2$

Sistema $\mathbb{F}_1$

Reazioni vincolari:

$Y_{A1} = 0 \qquad X_{D1} = 1 \qquad Y_{D1} = 0 \qquad M_{D1} = 2a$

Caratteristiche di sollecitazione:

$N_{AB1}(s_1) = 0 \qquad T_{AB1}(s_1) = 1 \qquad M_{AB1}(s_1) = s_1$

$N_{BC1}(s_2) = 1 \qquad T_{BC1}(s_2) = 0 \qquad M_{BC1}(s_2) = 2a$

$N_{CD1}(s_3) = 1 \qquad T_{CD1}(s_3) = 0 \qquad M_{CD1}(s_3) = 2a$

Coefficienti di Müller-Breslau:

$\eta_1 = -X_1/k$

$$\eta_{10} = \int_0^{2a} s_1\left(-\frac{qs_1^2}{4EJ}\right)ds_1 + \int_0^{2a} 2a\left(-\frac{qa^2}{EJ}\right)ds_2 = -\frac{5qa^4}{EJ} \qquad \eta_{11} = \int_0^{2a} s_1 \frac{s_1}{EJ}\,ds_1 + \int_0^{2a} 2a\frac{2a}{EJ}\,ds_2 = \frac{32a^3}{3EJ}$$

Incognita iperstatica:

$$X_1 = \frac{\dfrac{5qa^4}{EJ}}{\dfrac{32a^3}{3EJ} + \dfrac{1}{k}} = \frac{15qa}{32 + \dfrac{3EJ}{ka^3}}$$

- Nell'ipotesi che $k = \dfrac{EJ}{16a^3}$, l'incognita iperstatica risulta $X_1 = \dfrac{3}{16}qa$.

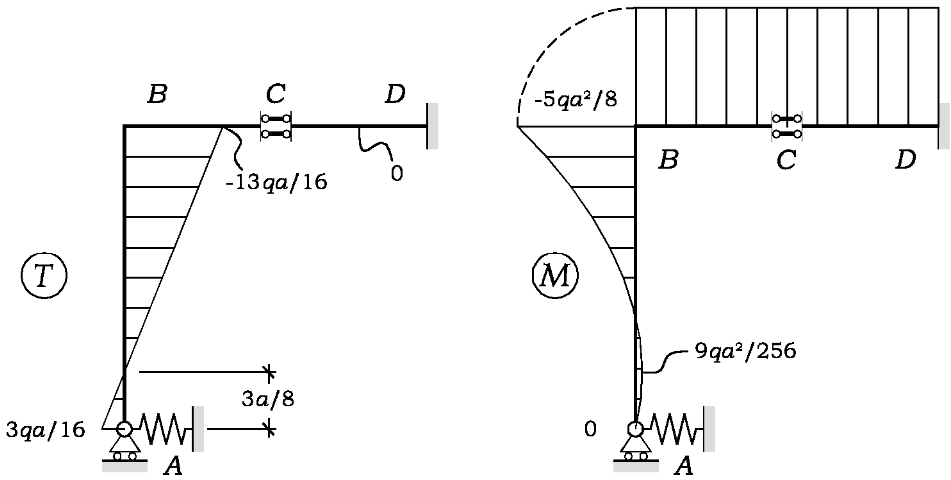
Caratteristiche di sollecitazione nel sistema effettivo:

$$N_{AB}(s_1) = 0 \qquad T_{AB}(s_1) = -\frac{q}{2}s_1 + X_1 = \frac{q}{2}(\frac{3}{8}a - s_1) \qquad M_{AB}(s_1) = -\frac{q}{4}s_1^2 + X_1 s_1 = \frac{q}{4}(\frac{3}{4}a - s_1)s_1$$

$$N_{BC}(s_2) = -qa + X_1 = -\frac{13}{16}qa \qquad T_{BC}(s_2) = 0 \qquad M_{BC}(s_1) = -qa^2 + 2aX_1 = -\frac{5}{8}qa^2$$

$$N_{CD}(s_3) = -qa + X_1 = -\frac{13}{16}qa \qquad T_{CD}(s_3) = 0 \qquad M_{CD}(s_3) = -qa^2 + 2aX_1 = -\frac{5}{8}qa^2$$

Diagrammi quotati del momento flettente e del taglio



- Consideriamo quindi il sistema $\mathbb{F}$s", soggetto alla sola variazione termica, ed impostiamo il problema col metodo della linea elastica.

Equazioni differenziali della linea elastica sui tratti 1 (AB), 2 (BC) e 3 (CD):

$$v_1^{IV}(s_1) = 0 \qquad v_2^{IV}(s_2) = 0 \qquad v_3^{IV}(s_3) = 0$$

Condizioni al bordo:

In A:

$$T_1(0) = kv_1(0) \;\Rightarrow\; -EJv_1^{III}(0) = kv_1(0) \qquad M_1(0) = 0 \;\Rightarrow\; -EJ[v_1^{II}(0) + \frac{\alpha t}{h}] = 0$$

In B:

$$v_1(2a) = 0 \qquad \phi_1(2a) = \phi_2(0) \;\Rightarrow\; v_1^I(2a) = v_2^I(0)$$

$$v_2(0) = 0 \qquad M_1(2a) = M_2(0) \;\Rightarrow\; -EJ[v_1^{II}(2a) + \frac{\alpha t}{h}] = -EJv_2^{II}(0)$$

In C:

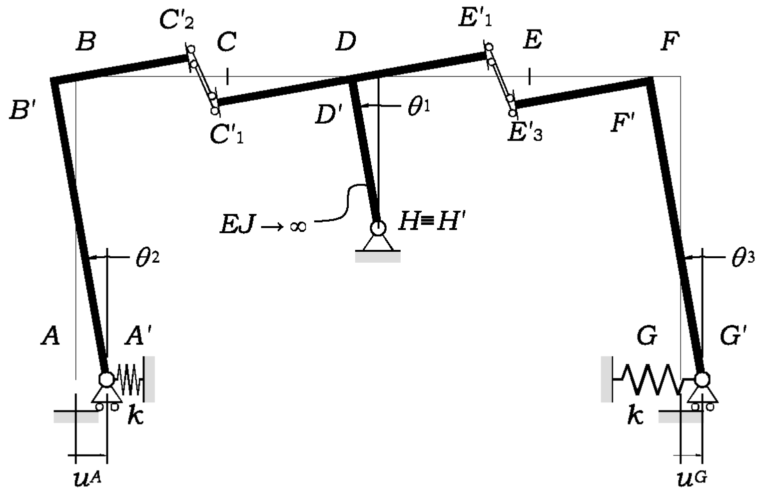
$$\phi_2(a) = \phi_3(0) \;\Rightarrow\; v_2^I(a) = v_3^I(0) \qquad T_2(a) = 0 \;\Rightarrow\; -EJv_2^{III}(a) = 0$$

$$T_3(0) = 0 \;\Rightarrow\; -EJv_3^{III}(0) = 0 \qquad M_2(a) = M_3(0) \;\Rightarrow\; -EJv_2^{II}(a) = -EJv_3^{II}(0)$$

In D:

$$v_3(a) = 0 \qquad \phi_3(a) = 0 \;\Rightarrow\; v_3^I(a) = 0$$

- Nell'ipotesi di aste rigide, il sistema subisce il seguente spostamento rigido infinitesimo



con

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \qquad u_A = u_G = a\theta_1$

Energia di deformazione elastica immagazzinata dalle molle in *A* e in *G*:

$$U_A = \frac{1}{2}ku_A^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta_1^2 \qquad U_G = \frac{1}{2}ku_G^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta_1^2 \qquad U = U_A + U_G = ka^2\theta_1^2$$

(Soluzione a cura di Paolo Valvo)