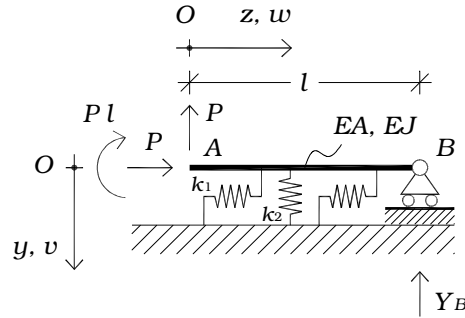


Università di Pisa
Esame di **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I**
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 21 settembre 2007 – Soluzione

Problema 1

Punto 1) Rispetto all'asse verticale passante per B , la struttura è simmetrica ed è soggetta ad un sistema di carichi antisimmetrici. Pertanto è possibile ricondurre lo studio del sistema alla metà sinistra, introducendo in B il vincolo mostrato nella figura sottostante.



Punto 2) Equazioni differenziali della linea elastica:

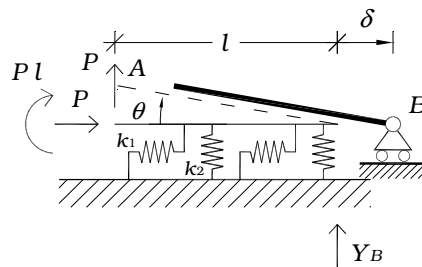
$$EAW'' = -q = k_1 w$$

$$EJv'' = p = -k_2 v$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} N(0) = EAW'(0) = -P \\ M(0) = -EJv''(0) = Pl \\ T(0) = -EJv'''(0) = P \end{cases} \quad \begin{cases} N(l) = EAW'(l) = 0 \\ M(l) = -EJv''(l) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases}$$

Punto 3) Nel caso rigido, l'asta AB trasla di una quantità δ e ruota di θ come mostrato sotto.



Ne seguono

$$\begin{cases} w(s) = \delta \\ v(s) = -\theta(l-s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(s) = -k_1 \delta \\ p(s) = k_2 \theta(l-s) \end{cases}$$

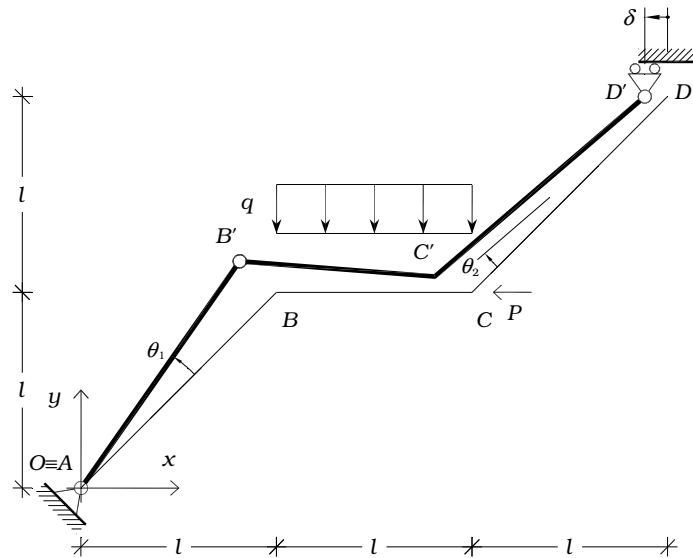
Le equazioni di equilibrio forniscono:

$$\begin{cases} P - k_1 l \delta = 0 \\ P - \int_0^l k_2 \theta(l-s) ds + Y_B = 0 \\ Pl + Pl - \int_0^l k_2 \theta(l-s)^2 ds = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = P / k_1 l \\ \theta = 6P / k_2 l^2 \\ Y_B = 2P \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione:

$$N(s) = -P \left(1 - \frac{s}{l}\right), \quad T(s) = P \left(1 - 6\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right), \quad M(s) = P \left(s - 3\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} + l\right)$$

Problema 2



Punto 1) Per i vincoli in A, B e D:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_B^1 = \mathbf{u}_B^2, \quad \mathbf{u}_D = -\delta \mathbf{i}$$

Dalle equazioni della cinematica:

$$\mathbf{u}_B^1 = \mathbf{u}_A + \theta_1 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = l\theta_1 (-\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_B^2 = \mathbf{u}_D + \theta_2 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_D) = (l\theta_2 - \delta)\mathbf{i} - 2l\theta_2\mathbf{j}$$

da cui

$$\delta = l\theta_1 / 2, \quad \theta_2 = -\theta_1 / 2$$

Punto 2) Dal teorema dei lavori virtuali

$$\delta L = (-ql \mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}_Q + (-P \mathbf{i}) \cdot \mathbf{u}_C = 0$$

dove

$$\mathbf{u}_C = -\theta_1 [l \mathbf{i} + \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D)] / 2 = l\theta_1 (-\mathbf{i} + \mathbf{j} / 2)$$

$$\mathbf{u}_Q = -\theta_1 [l \mathbf{i} + \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_D)] / 2 = l\theta_1 (-\mathbf{i} + 3/4 \mathbf{j})$$

da cui

$$\delta L = -ql \mathbf{j} \cdot l\theta_1 (-\mathbf{i} + 3/4 \mathbf{j}) + (-P \mathbf{i}) \cdot l\theta_1 (-\mathbf{i} + \mathbf{j} / 2) = -3/4 ql^2 \theta_1 + Pl\theta_1 = 0 \Rightarrow P = 3/4 ql$$

Punto 3) Momento flettente:

$$M_{AB}(s_1) = 0, \quad M_{BC}(s_2) = \frac{q}{4}(3l - 2s_2)s_2, \quad M_{CD}(s_3) = \frac{ql}{4}\left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}s_3\right)$$

