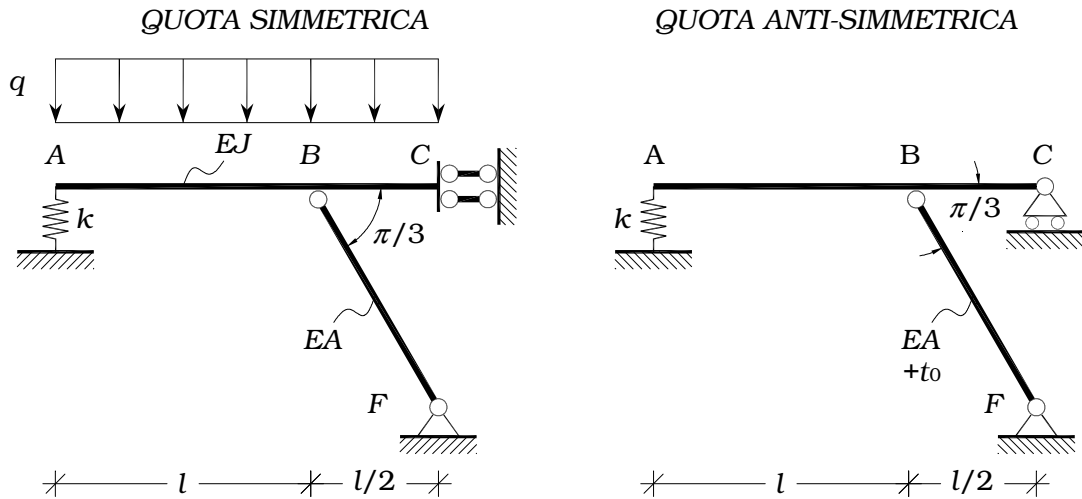


Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 29 giugno 2007 – Soluzione

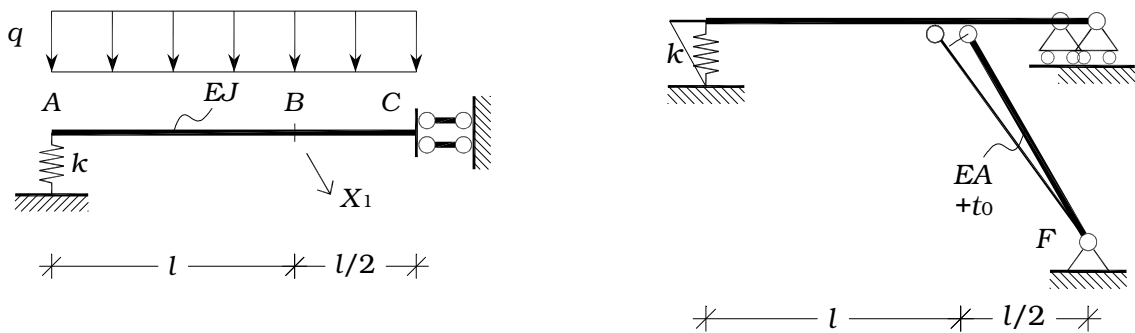
Punto 1:

La struttura è simmetrica rispetto all'asse verticale passante per C. Il carico applicato q è simmetrico, mentre la variazione termica è antisimmetrica. È quindi possibile individuare, per ciascuno dei due carichi, una struttura ridotta equivalente all'originale.

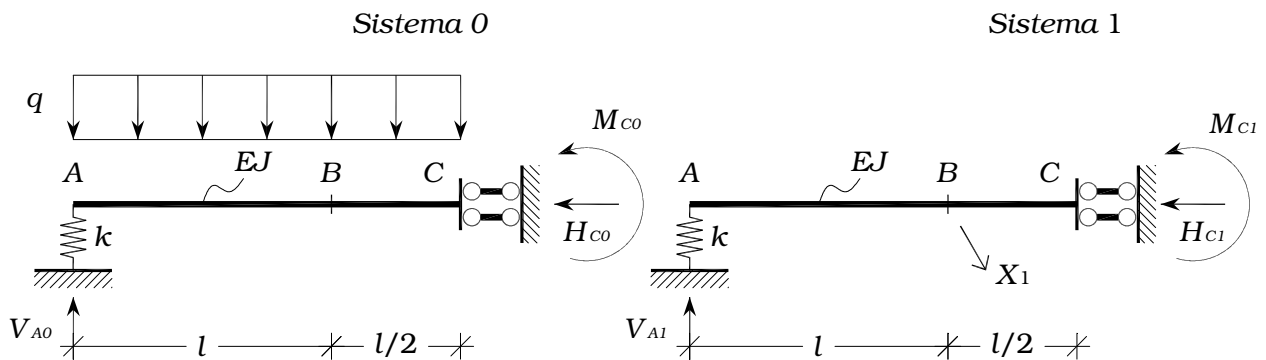


Punto 2:

Delle due strutture ottenute, quella sottoposta ad azione antisimmetrica risulta scarica in quanto la deformazione termica produce esclusivamente un atto di moto rigido della travatura.



Si risolve mediante il metodo delle forze la sola quota simmetrica delle azioni. Si assume come incognita iperstatica il valore dello sforzo normale nell'asta BF.



Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Risoluzione del sistema 0:

- Reazioni vincolari

$$\begin{cases} V_{A0} = \frac{3}{2}ql \\ H_{C0} = 0 \\ M_{C0} = \frac{3}{2}lV_{A0} - \frac{9}{8}ql^2 \rightarrow \frac{9}{8}ql^2 \end{cases}$$

- Caratteristiche della sollecitazione

Tratto AB: $s \in [0, l]$

$$N(s) = 0$$

$$T(s) = V_{A0} - qz = \frac{3}{2}ql - qs$$

$$M(s) = V_{A0}s - q\frac{s^2}{2} = \frac{3}{2}qls - q\frac{s^2}{2}$$

Tratto BC: $s \in \left[l, \frac{3}{2}l\right]$

$$N(s) = 0$$

$$T(s) = V_{A0} - qz = \frac{3}{2}ql - qs$$

$$M(s) = V_{A0}s - q\frac{s^2}{2} = \frac{3}{2}qls - q\frac{s^2}{2}$$

Risoluzione del sistema 1:

- Reazioni vincolari

$$\begin{cases} V_{A1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ H_{C1} = \frac{1}{2} \\ M_{C1} = \frac{3}{2}lV_{A0} - \frac{\sqrt{3}}{4}l \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}l \end{cases}$$

- Caratteristiche della sollecitazione

Tratto AB: $s \in [0, l]$

$$N(s) = 0$$

$$T(s) = V_{A1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M(s) = V_{A0}s = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Tratto BC: $s \in \left[l, \frac{3}{2}l\right]$

$$N(s) = -\frac{1}{2}$$

$$T(s) = V_{A0} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$M(s) = V_{A0}s - \frac{\sqrt{3}}{2}(s-l) = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Coefficienti di Muller-Breslau:

$$\eta_1 = -\frac{Xl}{EA}$$

$$\eta_{10} = \int_0^l \left(\frac{3}{2}qls - q\frac{s^2}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s \right) \frac{ds}{EJ} + \int_l^{\frac{3}{2}l} \left(\frac{3}{2}qls - q\frac{s^2}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l \right) \frac{ds}{EJ} + \frac{V_{A0}V_{A1}}{k} = \frac{11\sqrt{3}}{24} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{ql}{k}$$

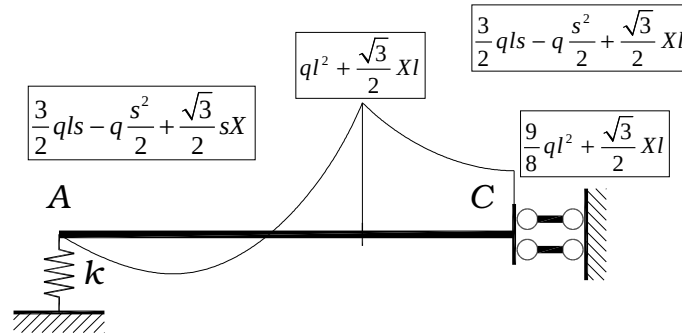
$$\eta_{11} = \int_0^l \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s \right)^2 \frac{ds}{EJ} + \int_l^{\frac{3}{2}l} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l \right)^2 \frac{ds}{EJ} + \frac{V_{A1}^2}{k} = \frac{5l^3}{8EJ} + \frac{3}{4k}$$

Incognita iperstatica:

$$X = \frac{\eta_1 - \eta_{10}}{\eta_{11}} \rightarrow X = -\frac{\sqrt{3}}{4}ql \frac{\frac{3}{k} + \frac{11}{6} \frac{l^3}{EJ}}{\frac{3}{4k} + \frac{l}{EA} + \frac{5}{8} \frac{l^3}{EJ}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{EA=24EJ/l^2} -\frac{11\sqrt{3}}{16}ql$$

Punto 3:

Di seguito è riportata la forma generale del diagramma del momento flettente:



Punto 4:

Vincoli cinematici

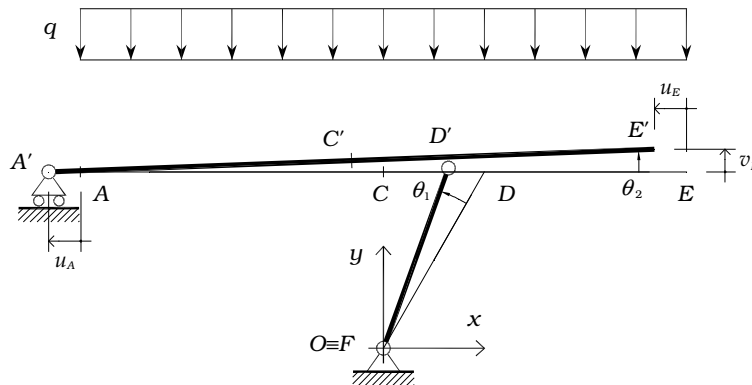
$$\begin{cases} v_F = 0 & \mathbf{e} \quad v_A \cdot \mathbf{j} = 0 \\ v_D|_{D \in AE} = v_D|_{D \in FD} = v_D \end{cases} \quad \text{sistema delle equazioni risolventi.}$$

$$v_D|_{D \in FD} = v_F + \theta_1 \mathbf{k} \times (D - F) = \theta_1 \mathbf{k} \times \left(\frac{1}{2} l \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} l \mathbf{j} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_1 l \mathbf{i} + \frac{1}{2} \theta_1 l \mathbf{j}$$

$$v_A = v_D + \theta_2 \mathbf{k} \times (A - D) = v_D + \theta_2 \mathbf{k} \times (-2l \mathbf{i}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_1 l \mathbf{i} + \frac{1}{2} \theta_1 l \mathbf{j} - 2\theta_2 l \mathbf{j}$$

$$v_A \cdot \mathbf{j} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \theta_1 l - 2\theta_2 l = 0 \rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1}{4}$$

Lo spostamento cinematico finale è rappresentato nella seguente figura.



Punto 5 (facoltativo):

Spostamento del punto di applicazione della risultante del carico distribuito:

$$v_C = v_D + \theta_2 \mathbf{k} \times (C - D) = v_D + \theta_2 \mathbf{k} \times \left(-\frac{l}{2} \mathbf{i} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_1 l \mathbf{i} + \frac{1}{2} \theta_1 l \mathbf{j} - \frac{\theta_1}{8} l \mathbf{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_1 l \mathbf{i} + \frac{3}{8} \theta_1 l \mathbf{j}$$

Lavoro virtuale del carico:

$$L = (-3ql \mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_1 l \mathbf{i} + \frac{3}{8} \theta_1 l \mathbf{j} \right) = -\frac{9}{8} \theta_1 ql^2$$