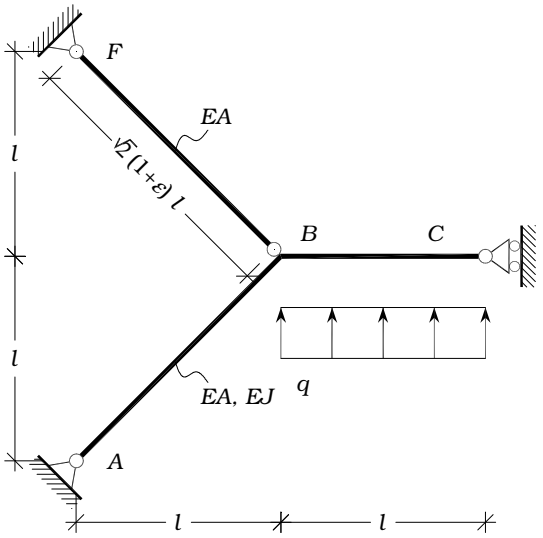
Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta dell'11 giugno 2007 – Soluzione

Il vincolo in C non trasmette azioni di taglio, ma solo forza normale e momento flettente. Quest'ultimo, tuttavia, risulta nullo per considerazioni di simmetria. Lo studio del sistema si può ridurre allo schema mostrato nella figura seguente.



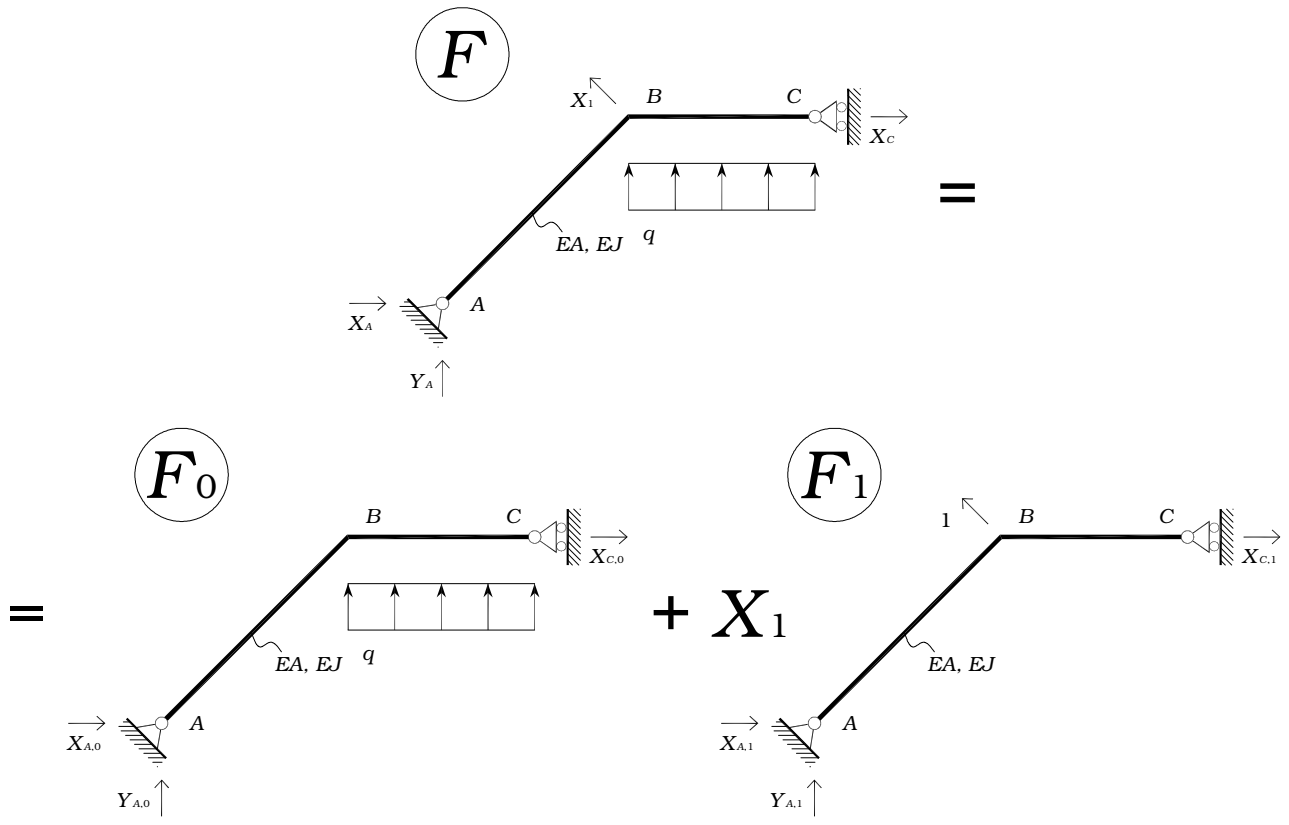
La struttura può essere quindi risolta con il metodo delle forze, assumendo come incognita iperstatica la forza normale nell'asta BF. L'equazione di Müller-Breslau si scrive

$$\eta_1 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11}$$

dove

$$\eta_1 = -(\frac{X_1}{EA} + \varepsilon)\sqrt{2}\, l$$

e i coefficienti η_{10} e η_{11} si determinano col TLV, previa risoluzione dei sistemi F_0 ed F_1.



Sistema F_0

Le equazioni di equilibrio alla rotazione (intorno ad A) ed alla traslazione secondo le direzioni X e Y forniscono le reazioni vincolari:

$$X_{A,0} = -\frac{3}{2}ql\,,\ Y_{A,0} = -ql\,,\ X_{C,0} = \frac{3}{2}ql$$

Si possono quindi ricavare il momento flettente e la forza normale nelle aste:

$$M_{AB,0}(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}qls\,,\ M_{BC,0}(s) = \frac{1}{2}q(l-s)^2$$

$$N_{AB,0} = \frac{5\sqrt{2}}{4}ql\,,\ N_{BC,0} = \frac{3}{2}ql$$

Sistema F_1

Le reazioni vincolari risultano:

$$X_{A,1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ Y_{A,1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ X_{C,1} = \sqrt{2}$$

Il momento flettente e la forza normale nelle aste sono:

$$M_{AB,1} = 0\,,\ M_{BC,1} = 0$$

$$N_{AB,1} = 1\,,\ N_{BC,1} = \sqrt{2}$$

Poiché il momento flettente è identicamente nullo nel sistema F_1, i coefficienti di Müller-Breslau dipendono solo dalla deformabilità estensionale delle aste:

$$\eta_{10} = N_{AB,1}\frac{N_{AB,0}}{EA}\sqrt{2}\,l + N_{BC,1}\frac{N_{BC,0}}{EA}l = \frac{5+3\sqrt{2}}{2}\frac{ql^2}{EA}$$

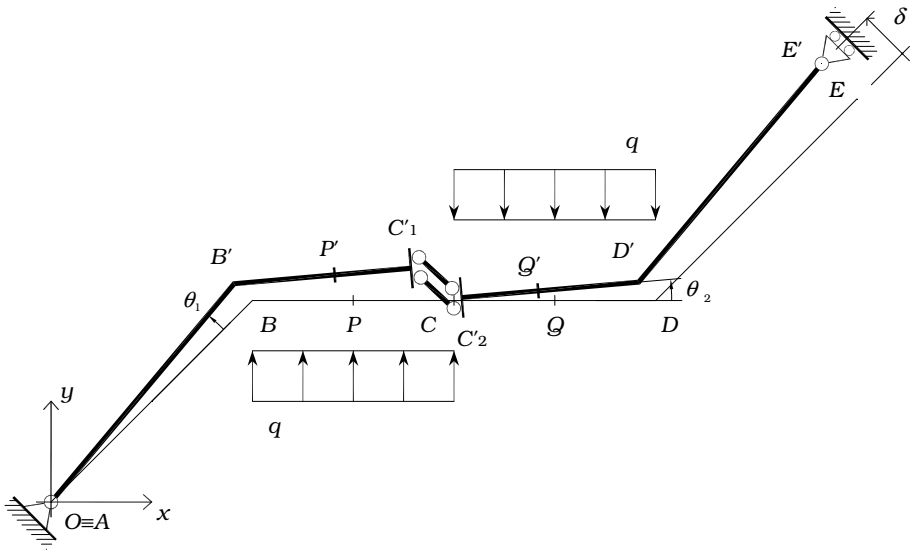
$$\eta_{11} = \frac{(N_{AB,1})^2}{EA}\sqrt{2}\,l + \frac{(N_{BC,1})^2}{EA}l = (2+\sqrt{2})\frac{l}{EA}$$

Dunque, l'incognita iperstatica risulta

$$X_1 = -\frac{\eta_{10} + \varepsilon\sqrt{2}\,l}{\eta_{11} + \sqrt{2}\,\dfrac{l}{EA}} = -\frac{(5+3\sqrt{2})ql + 2\sqrt{2}EA\varepsilon}{4(1+\sqrt{2})}$$

Il momento flettente nel sistema effettivo F è comunque uguale a quello nel sistema F_0.

Eliminando le aste BF e DG ed introducendo un carrello in E, la struttura iniziale si trasforma in un meccanismo, rappresentato nella figura seguente.



I vincoli cinematici interni ed esterni forniscono

$$\text{A)}\ \ \mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\text{C)}\ \ \theta_1 = \theta_2 \ \text{ e } \ (\mathbf{u}_C^2 - \mathbf{u}_C^1)\cdot\mathbf{i} = 0$$

$$\text{E)}\ \ \mathbf{u}_E\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_E = \frac{\delta}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

Gli spostamenti di C pensato appartenente, rispettivamente, ai corpi ① e ② risultano

$$\mathbf{u}_C^1 = \mathbf{u}_A + \theta_1\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) = l\theta_1(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_C^2 = \mathbf{u}_E + \theta_2\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_E) = \frac{\delta}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}) - l\theta_1(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})$$

Imponendo il vincolo alla traslazione relativa in C si ottiene quindi

$$(\mathbf{u}_C^2 - \mathbf{u}_C^1)\cdot\mathbf{i} = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} + 2l\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 2\sqrt{2}\,l\theta_1$$

Si possono quindi determinare gli spostamenti di P e Q, punti di applicazione delle risultanti dei carichi distribuiti q sulle aste BC e CD:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_A + \theta_1\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_A) = l\theta_1(-\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_E + \theta_2\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_E) = l\theta_1(-\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j})$$

ed il lavoro virtuale corrispondente

$$\delta\mathcal{L} = ql\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{u}_P - ql\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{u}_Q = ql^2\theta_1$$

* * *