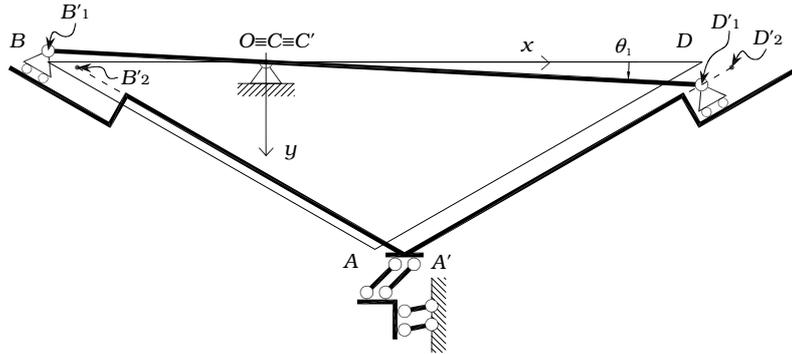


Prova scritta del 17 febbraio 2007 – Soluzione

Problema 1

- a) Si fissi un sistema di riferimento Oxy con l'origine in C , l'asse x (di versore \mathbf{i}) diretto come CD e l'asse y (di versore \mathbf{j}) ortogonale a x e rivolto verso il basso (cosicché siano positive le rotazioni orarie).



I vettori posizione dei punti $ABCD$ nella configurazione iniziale, rispettivamente, sono

$$\mathbf{x}_A = \frac{1}{2}l\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}l\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_B = -l\mathbf{i}, \quad \mathbf{x}_C = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_D = 2l\mathbf{i}$$

Il vincolo di doppio "doppio pendolo" in A impone che

$$\theta_2 = 0$$

mentre la cerniera in C richiede che

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{0}$$

infine, i carrelli in B e in D impongono che in tali punti siano nulli gli spostamenti relativi nelle direzioni normali ai piani di scorrimento dei carrelli stessi, cioè che

$$(\mathbf{u}_B^1 - \mathbf{u}_B^2) \cdot \mathbf{n}_B = 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{u}_D^1 - \mathbf{u}_D^2) \cdot \mathbf{n}_D = 0$$

dove

$$\mathbf{n}_B = (\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j})/2 \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_D = -(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})/2$$

Gli spostamenti dei punti B e D del corpo ① risultano

$$\mathbf{u}_B^1 = \mathbf{u}_C + \theta_1 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) = \theta_1 \mathbf{k} \times (-l\mathbf{i}) = -l\theta_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_D^1 = \mathbf{u}_C + \theta_1 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C) = \theta_1 \mathbf{k} \times (2l\mathbf{i}) = 2l\theta_1 \mathbf{j}$$

mentre gli spostamenti dei corrispondenti punti del corpo ② valgono

$$\mathbf{u}_B^2 = \mathbf{u}_A + \theta_2 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = u_A \mathbf{i} + v_A \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_D^2 = \mathbf{u}_A + \theta_2 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_A) = u_A \mathbf{i} + v_A \mathbf{j}$$

Sostituendo le precedenti relazioni in quelle dei vincoli in B e in D si trovano

$$(-l\theta_1 \mathbf{j} - u_A \mathbf{i} - v_A \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j})/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_A - \sqrt{3}(l\theta_1 + v_A) = 0$$

$$(2l\theta_1 \mathbf{j} - u_A \mathbf{i} - v_A \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j})/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_A - \sqrt{3}(2l\theta_1 - v_A) = 0$$

da cui

$$u_A = \frac{3\sqrt{3}}{2}l\theta_1 \quad \text{e} \quad v_A = \frac{1}{2}l\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_A = \frac{1}{2}l\theta_1(3\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

b) Lo spostamento del punto di applicazione della risultante del carico distribuito q vale

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_C + \theta_1 \mathbf{k} \times (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_C) = \theta_1 \mathbf{k} \times \frac{l}{2} \mathbf{i} = \frac{1}{2} l \theta_1 \mathbf{j}$$

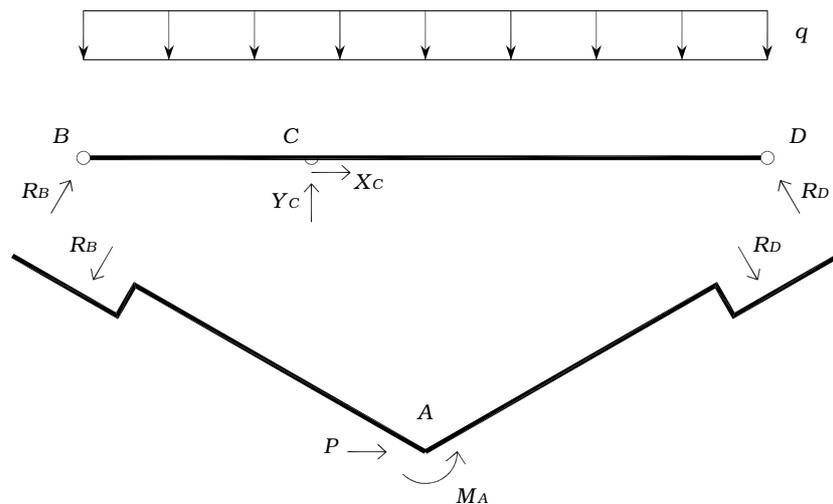
Pertanto, il lavoro virtuale risulta

$$\delta L = P \mathbf{i} \cdot \mathbf{u}_A + 3ql \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} Pl \theta_1 + \frac{3}{2} ql^2 \theta_1$$

Per l'equilibrio dev'essere

$$\delta L = \frac{3}{2} (\sqrt{3}P + ql) l \theta_1, \quad \forall \theta_1 \Rightarrow P = -\frac{\sqrt{3}}{3} ql$$

c) Scomponiamo il sistema nei corpi ① e ② ed introduciamo le forze necessarie per l'equilibrio come mostrato nella figura sottostante



Per l'equilibrio globale del sistema si trovano subito

$$M_A + P \frac{\sqrt{3}}{2} l - 3ql \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow M_A = (-\sqrt{3}P + 3ql) \frac{l}{2} = 2ql^2$$

$$X_C + P = 0 \Rightarrow X_C = -P = \frac{\sqrt{3}}{3} ql$$

$$Y_C - 3ql = 0 \Rightarrow Y_C = 3ql$$

Per l'equilibrio del corpo ①, tenendo conto della direzione delle reazioni in B e in D,

$$Y_C l + \frac{\sqrt{3}}{2} R_D 3l - 3ql \frac{3}{2} l = 0 \Rightarrow R_D = \frac{\sqrt{3}}{3} ql$$

$$\frac{1}{2} R_B + X_C - \frac{1}{2} R_D = 0 \Rightarrow R_B = -\frac{\sqrt{3}}{3} ql$$

Detta s l'ascissa sul tratto BCD, le caratteristiche di sollecitazione valgono

$$N_{BC}(s) = -\frac{1}{2} R_B = \frac{\sqrt{3}}{6} ql, \quad N_{CD}(s) = -\frac{1}{2} R_D = -\frac{\sqrt{3}}{6} ql$$

$$T_{BC}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} R_B - qs = -q \left(\frac{1}{2} l + s \right), \quad T_{CD}(s) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_D + q(3l - s) = q \left(\frac{5}{2} l - s \right)$$

$$M_{BC}(s) = -\frac{1}{2} qs(l + s), \quad M_{CD}(s) = -\frac{1}{2} q(6l^2 - 5ls + s^2)$$

Problema 2

Punto a.

La struttura presenta simmetria assiale, rispetto all'asse verticale passante per il punto C, per quanto riguarda sia i materiali che le forze esterne applicate e le distorsioni imposte. L'equilibrio alla traslazione lungo l'asse X (orizzontale) prevede che sia nulla la reazione orizzontale X_A . Di conseguenza sono simmetriche pure le condizioni di vincolo. Per quanto riguarda il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione è possibile dunque analizzare la sola porzione sinistra della struttura (vedi figura 1).

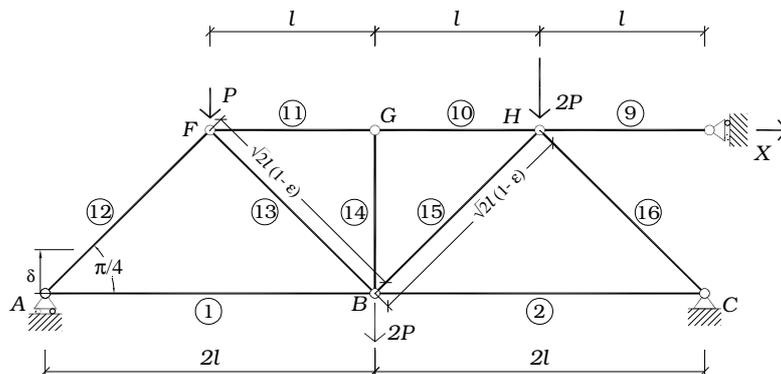


Figura 1: sistema ridotto mediante la simmetria.

Utilizzando per la risoluzione della struttura il metodo delle forze, si analizzano i seguenti sistemi "0" ed "1".

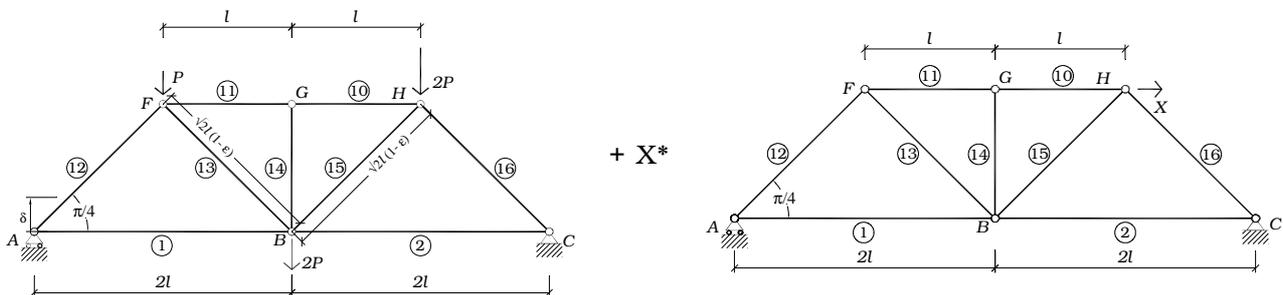


Figura 2: sovrapposizione del sistema "0" ed "1".

Sistema "0":

Calcolo delle reazioni vincolari:

$$\sum F_V = 0 \rightarrow Y_A^{(0)} + Y_C^{(0)} - P - 2P - 2P = 0$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow X_C^{(0)} = 0$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow (4l)Y_A^{(0)} - (3l)P - (2l)2P - (l)2P = 0$$

ottengo quindi:

$$Y_A^{(0)} = \frac{9}{4}P, \quad X_C^{(0)} = 0, \quad Y_C^{(0)} = \frac{11}{4}P \quad (0.1)$$

Le equazioni risolventi della statica del sistema sono ottenute mediante le equazioni di nodo nei punti A, C e G e le sezioni di Ritter indicate in figura 3. Di seguito si riportano tutte le equazioni, con indicata la relativa sezione e la porzione di struttura cui si riferiscono (SX o DX).

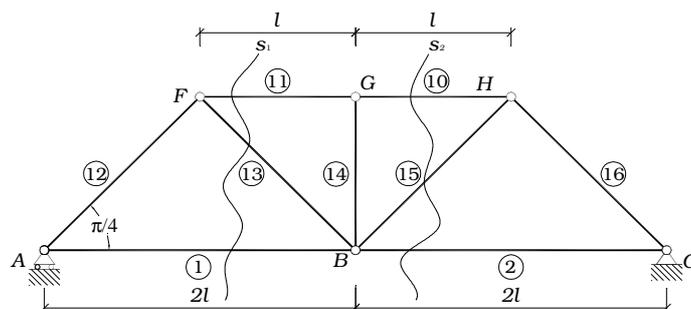


Figura 3: sezioni di Ritter utilizzate nella risoluzione.

# eq.	Tipo	Direzione	Equazione
1	Nodo A	(X)	$\frac{N_{12}}{\sqrt{2}} + N_1 = 0$
2	Nodo A	(Y)	$Y_A + \frac{N_{12}}{\sqrt{2}} = 0$
3	Nodo G	(X)	$N_{10} - N_{11} = 0$
4	Nodo G	(Y)	$-N_{14} = 0$
5	Nodo C	(X)	$-N_2 - \frac{N_{16}}{\sqrt{2}} = 0$
# eq.	Sezione	Polo	Equazione
6	s_1	(B)	$(2l)Y_A + (l)N_{11} - (l)P = 0$
7	s_1	(Dir Y)	$Y_A - \frac{N_{13}}{\sqrt{2}} - P = 0$
8	s_2	(H)	$-(l)N_2 + (3l)Y_A - (2l)P - (l)2P = 0$
9	s_2	(Dir Y)	$Y_A + \frac{N_{15}}{\sqrt{2}} - P - 2P = 0$

Calcolo degli sforzi normali:

Asta	Sforzo	Asta	Sforzo
1	$N_1 = \frac{9}{4}P$	13	$N_{13} = \frac{5}{2\sqrt{2}}P$
2	$N_2 = \frac{11}{4}P$	14	$N_{14} = 0$
10	$N_{10} = -\frac{7}{2}P$	15	$N_{15} = \frac{3}{2\sqrt{2}}P$
11	$N_{11} = -\frac{7}{2}P$	16	$N_{16} = -\frac{11}{2\sqrt{2}}P$
12	$N_{12} = -\frac{9}{2\sqrt{2}}P$		

Sistema "1":

Calcolo delle reazioni vincolari:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow X_C^{(1)} + 1 = 0$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow Y_A^{(1)} + Y_C^{(1)} = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0 \rightarrow (4l)Y_A^{(1)} + (l)1 = 0$$

ottengo quindi:

$$Y_A^{(1)} = -\frac{1}{4}, \quad X_C^{(1)} = -1, \quad Y_C^{(1)} = \frac{1}{4} \quad (0.2)$$

Equazioni risolventi:

# eq.	Tipo	Direzione	Equazione
1	Nodo A	(X)	$\frac{N_{12}}{\sqrt{2}} + N_1 = 0$
2	Nodo A	(Y)	$Y_A + \frac{N_{12}}{\sqrt{2}} = 0$
3	Nodo G	(X)	$N_{10} - N_{11} = 0$
4	Nodo G	(Y)	$-N_{14} = 0$
5	Nodo C	(X)	$N_2 + \frac{N_{16}}{\sqrt{2}} - X_C^{(1)} = 0$
# eq.	Sezione	Polo	Equazione
6	s_1	(B)	$(2l)Y_A + (l)N_{11} = 0$
7	s_1	(Dir Y)	$Y_A - \frac{N_{13}}{\sqrt{2}} = 0$
8	s_2	(H)	$-(l)N_2 + (3l)Y_A = 0$
9	s_2	(Dir Y)	$Y_A + \frac{N_{15}}{\sqrt{2}} = 0$

Calcolo degli sforzi normali:

Asta	Sforzo	Asta	Sforzo
1	$N_1 = -\frac{1}{4}$	13	$N_{13} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
2	$N_2 = -\frac{3}{4}$	14	$N_{14} = 0$
10	$N_{10} = \frac{1}{2}$	15	$N_{15} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
11	$N_{11} = \frac{1}{2}$	16	$N_{16} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
12	$N_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$		

Calcolo dei coefficienti di MB:

$$\eta_1 = -\left(\frac{l}{EA}\right)X$$

$$\eta_{10} + \left(-\frac{1}{4}\right)\delta = \frac{1}{EA} \sum_{i \in N_a} (N_{1(i)} N_{0(i)} l_i) + N_{1(13)}(-\sqrt{2}l\varepsilon) + N_{1(15)}(-\sqrt{2}l\varepsilon)$$

$$\eta_{11} = \sum_{i \in N_a} \frac{N_{1(i)} N_{1(i)}}{EA_i} l_i$$

Calcolo del contributo della deformabilità assiale delle aste

asta	N_0	N_1	l	$N_1 N_0 l$	$N_1^2 l$
1	$\frac{9}{4}P$	$-\frac{1}{4}$	$2l$	$-\frac{9}{8}Pl$	$\frac{l}{8}$
2	$\frac{11}{4}P$	$-\frac{3}{4}$	$2l$	$-\frac{33}{8}Pl$	$\frac{9}{8}l$
10	$-\frac{7}{2}P$	$\frac{1}{2}$	l	$-\frac{7}{4}Pl$	$\frac{l}{4}$
11	$-\frac{7}{2}P$	$\frac{1}{2}$	l	$-\frac{7}{4}Pl$	$\frac{l}{4}$
12	$-\frac{9}{2\sqrt{2}}P$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}l$	$-\frac{9\sqrt{2}}{8}Pl$	$\frac{\sqrt{2}}{8}l$
13	$\frac{5}{2\sqrt{2}}P$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}l$	$-\frac{5\sqrt{2}}{8}Pl$	$\frac{\sqrt{2}}{8}l$
14	0	0	l	0	0
15	$\frac{3}{2\sqrt{2}}P$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}l$	$\frac{3\sqrt{2}}{8}Pl$	$\frac{\sqrt{2}}{8}l$
16	$-\frac{11}{2\sqrt{2}}P$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}l$	$\frac{11\sqrt{2}}{8}Pl$	$\frac{\sqrt{2}}{8}l$
Totali				$-\frac{35}{4}Pl$	$\left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$

$$\eta_{10} = -\frac{35}{4} \frac{Pl}{EA} + \left(\frac{1}{4}\right)\delta + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-\sqrt{2}l\varepsilon) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-\sqrt{2}l\varepsilon) = -\frac{35}{4} \frac{Pl}{EA} + \frac{\delta}{4}$$

$$\eta_{11} = \left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{l}{EA}$$

Calcolo dell'incognita iperstatica:

$$X = \frac{\eta_1 - \eta_{10}}{\eta_{11}} \rightarrow X = \frac{\frac{70}{8} \frac{Pl}{EA} - \frac{\delta}{4}}{\left(\frac{14}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{8} + \frac{8}{8}\right) \frac{l}{EA}} = \frac{70}{22 + 4\sqrt{2}} P - \frac{2}{22 + 4\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \delta$$

Diventa non necessaria l'assunzione di $\varepsilon = \frac{\delta}{8l}$. Si ottiene infine:

$$X = \frac{70}{22 + 4\sqrt{2}} P - \frac{2}{22 + 4\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \delta = 2.531P - 0.0723 \frac{EA}{l} \delta$$

Punto b.

Essendo nullo lo sforzo normale dell'asta HI nel sistema "0", tale sforzo coincide con il valore dell'incognita iperstatica X precedentemente calcolato.

Il contributo all'iperstatica del cedimento vincolare ha segno opposto a quello dei carichi e dei difetti di montaggio. Esiste dunque un valore di δ che annulla l'iperstatica e vale:

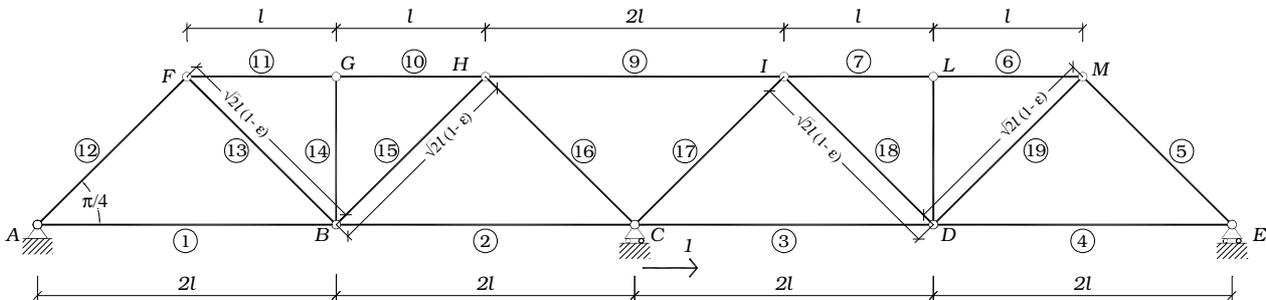
$$X = \frac{70}{22 + 4\sqrt{2}} P - \frac{2}{22 + 4\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \delta = 0$$

$$\delta = \frac{70}{2} \frac{Pl}{EA} = 35 \frac{Pl}{EA}$$

Punto c.

Sistema "Ausiliario":

Utilizzo una soluzione equilibrata del sistema mostrato nella figura seguente, nella quale sono nulli tutti gli sforzi normali delle aste, ad eccezione di quelli nelle aste 1 e 2, nelle quali valgono 1. In particolare sono nulli gli sforzi dell'asta 13 e 15.



Applicazione del teorema dei lavori virtuali:

Asta	N_{eff}	N_{aus}	l	$N_{eff} N_{aus} l$
1	$\frac{9}{4} P$	1	$2l$	$\frac{9}{2} Pl$
2	$\frac{11}{4} P$	1	$2l$	$\frac{11}{2} Pl$
<i>Totali</i>				$10Pl$

$$\eta_B = \frac{1}{EA} \sum_{i \in N_a} (N_{eff(i)} N_{aus(i)} l_i)$$

$$\eta_B = 10 \frac{Pl}{EA}$$

Il risultato ottenuto equivale alla determinazione dell'allungamento del corrente inferiore della trave reticolare.

* * *