Università di Pisa

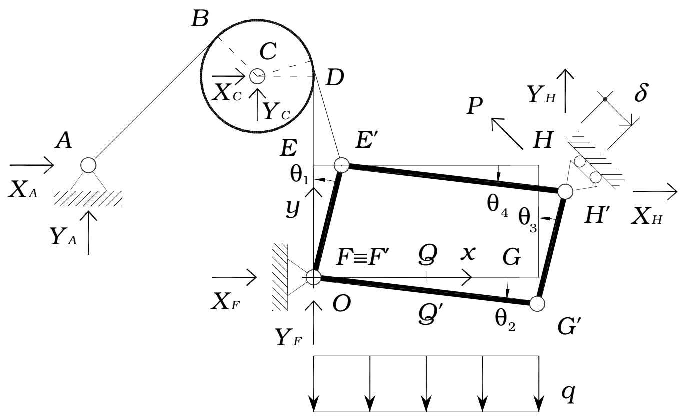
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I

Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Nucleare

(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 3 febbraio 2007 – Soluzione

Problema 1



a) Si fissi un sistema di riferimento *Oxy* con l'origine in *F*, asse *x* (versore **i**) diretto secondo la direzione *FG* ed asse *y* (versore **j**) ortogonale a quest'ultimo.
I vettori posizione dei vertici del quadrilatero articolato *EFGH* risultano

$$\mathbf{x}_E = \frac{l}{2}\mathbf{j},\ \ \mathbf{x}_F = \mathbf{0},\ \ \mathbf{x}_G = l\,\mathbf{i}\ \text{ e }\ \mathbf{x}_H = l(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j})$$

I vincoli esterni in *F* e *H* impongono

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{n}_H = 0, \quad \mathbf{n}_H = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_H = \frac{\delta}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

Il filo inestensibile *ABDE*, essendo fissato all'estremo *A*, consente al punto *E* solo spostamenti (infinitesimi) in direzione ortogonale alla direzione del filo in *E*, per cui

$$\mathbf{u}_E \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_E = u_E\ \mathbf{i}$$

Siano θ_1, θ_2, θ_3 e θ_4, rispettivamente, le rotazioni (positive se antiorarie) delle aste *OE*, *OG*, *GH* e *EH*. Gli spostamenti dei punti *E* ed *G*, calcolati a partire da *F*, risultano

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_F + \theta_1\,\mathbf{k} \times (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_F) = \theta_1\,\mathbf{k} \times \frac{l}{2}\mathbf{j} = -\frac{l\theta_1}{2}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_F + \theta_2\,\mathbf{k} \times (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_F) = \theta_2\,\mathbf{k} \times l\,\mathbf{i} = l\theta_2\mathbf{j}$$

per cui, tenuto conto del vincolo in *E*, si trova

$$u_E = -\frac{l\theta_1}{2}$$

Lo spostamento del punto *H*, calcolato a partire da *E* e da *G*, rispettivamente, risulta

$$\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_E + \theta_4\,\mathbf{k} \times (\mathbf{x}_H - \mathbf{x}_E) = u_E\ \mathbf{i} + \theta_4\,\mathbf{k} \times l\,\mathbf{i} = -\frac{l\theta_1}{2}\mathbf{i} + l\theta_4\mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_G + \theta_3\,\mathbf{k} \times (\mathbf{x}_H - \mathbf{x}_G) = l\theta_2\mathbf{j} + \theta_3\,\mathbf{k} \times \frac{l}{2}\mathbf{j} = -\frac{l\theta_3}{2}\mathbf{i} + l\theta_2\mathbf{j}$$

Tenendo conto del vincolo in *H*, si trovano

$$\begin{cases} -l\theta_1/2 = \delta/\sqrt{2} \\ l\theta_4 = -\delta/\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -l\theta_3/2 = \delta/\sqrt{2} \\ l\theta_2 = -\delta/\sqrt{2} \end{cases}$$

da cui

$$\theta_1 = -\sqrt{2}\frac{\delta}{l},\ \ \theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\delta}{l},\ \ \theta_3 = -\sqrt{2}\frac{\delta}{l}\ \text{ e }\ \theta_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\delta}{l}$$

e

$$u_E = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$$

Riepilogando, lo spostamento infinitesimo del quadrilatero articolato è descritto da

$$\mathbf{u}_E = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta\,\mathbf{i}\,,\ \ \mathbf{u}_F = \mathbf{0}\,,\ \ \mathbf{u}_G = -\frac{\sqrt{2}}{2}\delta\,\mathbf{j}\,,\ \ \mathbf{u}_H = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

b) Lavoro virtuale:

$$\delta L = \frac{P}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{u}_H + (-ql\ \mathbf{j})\cdot\mathbf{u}_Q$$

dove lo spostamento del baricentro Q del carico distribuito q è

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_F + \theta_2\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_F) = \theta_2\,\mathbf{k}\times\frac{l}{2}\,\mathbf{i} = \frac{l\theta_2}{2}\,\mathbf{j} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\delta\,\mathbf{j}$$

Ne segue

$$\delta L = \frac{P}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + (-ql\ \mathbf{j})\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{4}\delta\,\mathbf{j}) = (-P+\frac{\sqrt{2}}{4}ql)\delta$$

Per l'equilibrio dev'essere

$$\delta L = 0,\quad \forall\delta \quad\Rightarrow\quad P = \frac{\sqrt{2}}{4}ql$$

c) Per l'equilibrio del nodo A si ha

$$X_A + \frac{T}{\sqrt{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad X_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}T$$

$$Y_A + \frac{T}{\sqrt{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}T$$

dove T è la tensione nel filo $ABDE$ (staticamente non determinata).
Per l'equilibrio della carrucola

$$-\frac{T}{\sqrt{2}} + X_C = 0 \quad\Rightarrow\quad X_C = \frac{\sqrt{2}}{2}T$$

$$-\frac{T}{\sqrt{2}} - T + Y_C = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_C = (1+\frac{\sqrt{2}}{2})T$$

(Nota: La reazione in A è diretta come il filo, quella in C come la bisettrice dell'angolo formato tra le direzioni dei due capi del filo passanti per la carrucola).
Dall'equilibrio alla rotazione di $EFGH$ intorno a F si ricava ($X_H = Y_H$ per il vincolo)

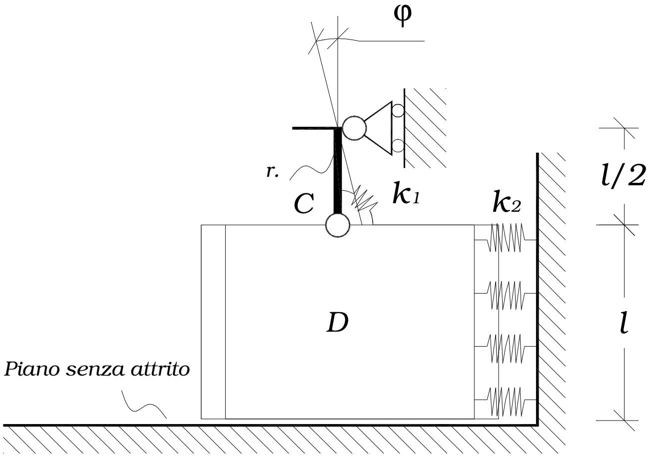
$$\frac{P}{\sqrt{2}}l + \frac{P}{\sqrt{2}}\frac{l}{2} - ql\frac{l}{2} + Y_H l - X_H\frac{l}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad X_H = Y_H = ql - \frac{3\sqrt{2}}{2}P = \frac{ql}{4}$$

Infine, dall'equilibrio globale del sistema si ottengono

$$X_A + X_C + X_F + X_H - \frac{P}{\sqrt{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad X_F = \frac{P}{\sqrt{2}} - X_A - X_C - X_H = 0$$

$$Y_A + Y_C + Y_F + Y_H + \frac{P}{\sqrt{2}} - ql = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_F = ql - \frac{P}{\sqrt{2}} - Y_A - Y_C - Y_H = \frac{ql}{2} - T$$

Problema 2



a) Equazione del Principio dei lavori virtuali:

$$1\cdot\varphi=(k_2 l)\left(\frac{l}{2}\varphi\right)^2+k_1\varphi^2 \tag{0.1}$$

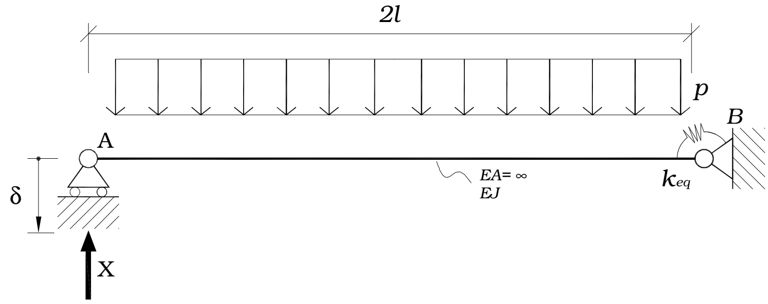
dalla quale ottengo:

$$\varphi=\frac{1}{k_2\frac{l^3}{4}+k_1}\rightarrow k_{eq}=\frac{1}{\varphi}=k_2\frac{l^3}{4}+k_1 \tag{0.2}$$

Sostituendo il valore proposto per k_2 si ottiene:

$$\begin{aligned}k_{eq}&=k_2\frac{l^3}{4}+k_1=8\frac{k_1}{l^3}\frac{l^3}{4}+k_1=3k_1\\ k_{eq}&=3k_1=3\cdot\frac{l^3}{8}k_2=\frac{3}{8}k_2 l^3=\frac{9}{4}\frac{EJ}{l}\end{aligned} \tag{0.3}$$

(è stato espresso il risultato rispetto ai due valori delle costanti delle molle).



b) Studio del sistema Fo (è un unico tratto da A verso B):

$$M_0(s)=-\frac{ps^2}{2}\quad \text{per}\ s\in[0,2l] \tag{0.4}$$

$$M_{0K}=-2pl^2$$

Studio del sistema F1

$$M_1(s)=s\quad \text{per}\ s\in[0,2l] \tag{0.5}$$

$$M_{1K}=2l$$

Valutazione dei coefficienti di MB:

$$\eta_1 = -\delta \tag{0.6}$$

$$\begin{aligned}\eta_{10} &= \int_0^{2l} \frac{M_0(s) M_1(s)}{EJ} ds + \frac{M_{0K} M_{1K}}{k_{eq}} = \int_0^{2l} \left(-p\frac{s^2}{2}\right)(s)\frac{ds}{EJ} + \frac{\left(-2pl^2\right)(2l)}{k_{eq}} = \\ &= -\frac{p(2l)^4}{8EJ} - \frac{4pl^3}{k_{eq}} = -2\frac{pl^4}{EJ} - 4\frac{pl^3}{k_{eq}}\end{aligned} \tag{0.7}$$

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= \int_0^{2l} \frac{M_1(s)^2}{EJ} ds + \frac{M_{1K}{}^2}{k_{eq}} = \int_0^{2l} (s)^2 \frac{ds}{EJ} + \frac{(2l)^2}{k_{eq}} = \\ &= \frac{(2l)^3}{3EJ} + \frac{4l^2}{k_{eq}} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EJ} + 4\frac{l^2}{k_{eq}}\end{aligned} \tag{0.8}$$

Sostituendo le espressioni di k_{eq}:

$$\eta_1 = -\delta \tag{0.9}$$

$$\eta_{10} = -2\frac{pl^4}{EJ} - 4\frac{pl^3}{k_{eq}} = -2\frac{pl^4}{EJ} - \frac{16}{9}\frac{pl^4}{EJ} = -\frac{34}{9}\frac{pl^4}{EJ} \tag{0.10}$$

$$\eta_{11} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EJ} + 4\frac{l^2}{k_{eq}} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EJ} + \frac{16}{9}\frac{l^3}{EJ} = \frac{40}{9}\frac{l^3}{EJ} \tag{0.11}$$

Si giunge infine a:

$$X = \frac{\eta_1 - \eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{-\frac{pl^4}{EJ} + \frac{34}{9}\frac{pl^4}{EJ}}{\frac{40}{9}\frac{l^3}{EJ}} = \frac{-9+34}{40} pl = \frac{25}{40} pl = \frac{5}{8} pl \tag{0.12}$$

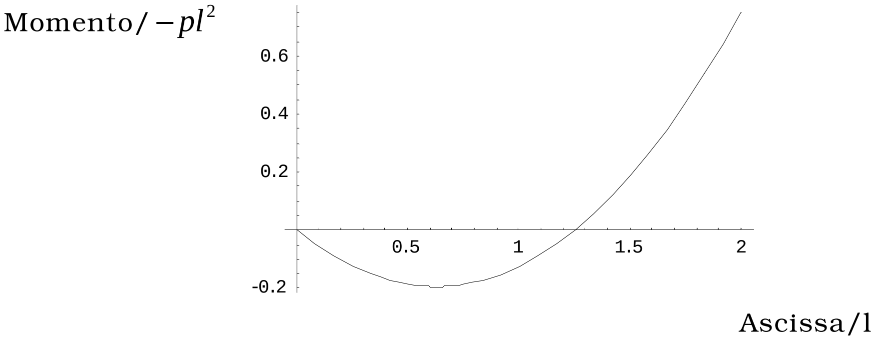
Caratteristiche della sollecitazione:

$$\begin{aligned} T(s) &= -ps + \frac{5}{8} pl \\ M(s) &= -p\frac{s^2}{2} + \frac{5}{8} pls \end{aligned} \tag{0.13}$$

Il massimo momento positivo si ha nel punto di taglio nullo, ovvero:

$$\begin{aligned} T(s) &= -ps + \frac{5}{8} pl = 0 \rightarrow s = \frac{5}{8} l \\ M\left(\frac{5}{8} l\right) &= -pl^2 \frac{1}{2}\frac{25}{64} + \frac{5}{8} pl \frac{5}{8} l = \frac{-25+50}{128} = \frac{25}{128} pl^2 = 0.195 pl^2 \end{aligned} \tag{0.14}$$

Mentre il massimo momento negativo si ha in $2l$ e vale $-\frac{3}{4} pl^2$.



* * *