Università di Pisa

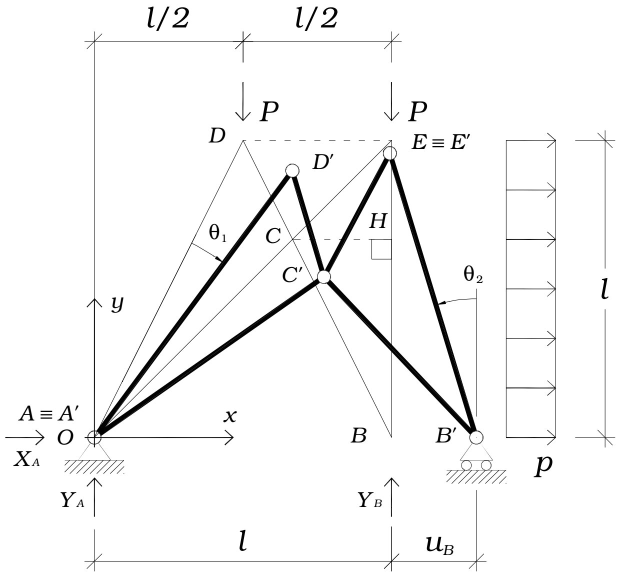
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I

Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Nucleare

(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 17 gennaio 2007 - Soluzione

Problema 1



1) Si fissi un sistema di riferimento Oxy con l'origine in A, asse x (versore $\mathbf{i}$) diretto secondo la direzione AB ed asse y (versore $\mathbf{j}$) ortogonale a quest'ultimo.
Detto H il piede della perpendicolare tracciata da C su BE, per la similitudine dei triangoli BDE e BCH, si ha

$$\overline{CH}:\overline{BH}=\overline{DE}:\overline{BE}=1/2 \quad\Rightarrow\quad \overline{CH}=\overline{BH}/2$$

Inoltre

$$\overline{CH}=\overline{HE}$$

da cui

$$\overline{BE}=l=\overline{BH}+\overline{HE}=\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{BH}+\overline{BH}/2=3/2\,\overline{BH} \quad\Rightarrow\quad x_C=y_C=\overline{BH}=2/3\,l$$

Vettore posizione nodi:

$$\mathbf{x}_A=\mathbf{0},\ \mathbf{x}_B=l\,\mathbf{i},\ \mathbf{x}_C=\frac{2}{3}l\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}),\ \mathbf{x}_D=l\,(\frac{1}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j})\ \text{ e }\ \mathbf{x}_E=l\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

Vincoli esterni in A e B:

$$\mathbf{u}_A=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{j}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{u}_B=u_B\,\mathbf{i}$$

Vincolo interno in C:

$$\mathbf{u}_C^1=\mathbf{u}_C^2$$

Siano θ_1 e θ_2 le rotazioni (positive se antiorarie) dei corpi ① e ②.
Spostamento di $C\in$ ① e $C\in$ ②:

$$\mathbf{u}_C^1=\mathbf{u}_A+\theta_1\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_C-\mathbf{x}_A)=\theta_1\,\mathbf{k}\times\frac{2}{3}l\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\frac{2}{3}l\theta_1(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_C^2=\mathbf{u}_B+\theta_2\,\mathbf{k}\times(\mathbf{x}_C-\mathbf{x}_B)=u_B\,\mathbf{i}+\theta_2\,\mathbf{k}\times\frac{1}{3}l\,(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})=(u_B-\frac{2}{3}l\theta_2)\,\mathbf{i}-\frac{1}{3}l\theta_2\,\mathbf{j}$$

Per il vincolo interno

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}l\theta_1 = u_B - \dfrac{2}{3}l\theta_2 \\ \dfrac{2}{3}l\theta_1 = -\dfrac{1}{3}l\theta_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} u_B = -2l\theta_1 \\ \theta_2 = -2\theta_1 \end{cases}$$

2) Lavoro virtuale:

$$\delta L = (-P\ \mathbf{j})\cdot \mathbf{u}_D + (-P\ \mathbf{j})\cdot \mathbf{u}_E + (pl\ \mathbf{i})\cdot \mathbf{u}_p$$

Spostamenti dei nodi *D* ed *E*:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_A + \theta_1\ \mathbf{k}\times(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_A) = \theta_1\ \mathbf{k}\times l\ (\frac{1}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}) = l\theta_1(-\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_B + \theta_2\ \mathbf{k}\times(\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_B) = -2l\theta_1\ \mathbf{i} - 2\theta_1\ \mathbf{k}\times l\ \mathbf{j} = -2l\theta_1\ \mathbf{i} + 2l\theta_1\ \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Spostamento della risultante del carico distribuito *p*:

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_B + \theta_2\ \mathbf{k}\times(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_B) = -2l\theta_1\ \mathbf{i} - 2\theta_1\ \mathbf{k}\times\frac{1}{2}l\ \mathbf{j} = -l\theta_1\ \mathbf{i}$$

Ne segue

$$\delta L = -P\ \mathbf{j}\cdot l\theta_1(-\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}) + pl\ \mathbf{i}\cdot l\theta_1(-\mathbf{i}) = -l\theta_1(\frac{P}{2}+pl)$$

Per l'equilibrio:

$$\delta L = 0, \quad \forall\theta_1 \quad \Rightarrow \quad P/2 + pl = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{P}{2l}$$

3) Reazioni vincolari:

$$X_A + pl = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = -pl = \frac{P}{2}$$

$$Y_B l - pl\frac{l}{2} - P\frac{l}{2} - Pl = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B = \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}pl = \frac{5}{4}P$$

$$Y_A + Y_B - P - P = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = \frac{3}{4}P$$

Problema 2

1) Si vuole sostituire la sottostruttura DEF con una molla equivalente, la cui legge costitutiva è

$$F = k_{eq}\ \delta$$

Chiamando θ la rotazione dell'asta DE (uguale e opposta alla rotazione di EF per simmetria), si ha

$$\delta = 2l\theta$$

Applichiamo il TLV al sistema DEF

$$\delta L = F\delta + 2(-k_0\theta)\theta + 2(-kl\theta)\delta/2 + (-k_0 2\theta)2\theta = 0$$

da cui

$$\delta L = k_{eq}(2l\theta)^2 - 2k_0\theta^2 - 2kl^2\theta^2 - 4k_0\theta^2 = 0, \quad \forall\theta$$

Rigidezza della molla equivalente

$$k_{eq} = \frac{3}{2}\frac{k_0}{l^2} + \frac{k}{2} = \frac{3}{2}\frac{3kl^2}{l^2} + \frac{k}{2} = 5k$$

2) Si assume come incognita iperstatica la reazione del vincolo che agisce sulla molla equivalente (positiva verso l'alto).

Taglio e momento flettente sull'asta AB e allungamento dell'asta EB nel sistema F_0:

$$T_0(s) = 2pl - ps \qquad \text{e} \qquad M_0(s) = 2pls - \frac{ps^2}{2}$$

$$\varepsilon_0 = \alpha t$$

Taglio e momento flettente sull'asta AB e forza assiale nell'asta EB nel sistema F_1:

$$T_1(s) = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad M_1(s) = -\frac{s}{2}$$

$$N_1 = -1$$

Coefficienti di Müller-Breslau (l'integrale su AB è moltiplicato x 2 per la simmetria):

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_{10} = 2\int_{AB} \frac{M_1 M_0}{EJ} ds + \int_{EB} N_1 \varepsilon_0 ds = 2\int_0^{2l} (-\frac{s}{2}) \frac{2pls - ps^2/2}{EJ} ds + \int_0^l (-1)\alpha t\, ds = -\frac{10}{3}\frac{pl^4}{EJ} - \alpha l t$$

$$\eta_{11} = 2\int_{AB} \frac{M_1^2}{EJ} ds + \int_{EB} \frac{N_1^2}{EA} ds + \frac{(-1)^2}{k_{eq}} = 2\int_0^{2l} \frac{(-s/2)^2}{EJ} ds + \int_0^l \frac{(-1)^2}{EA} ds + \frac{(-1)^2}{k_{eq}} = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ} + \frac{l}{EA} + \frac{1}{k_{eq}}$$

Incognita iperstatica:

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}}$$

da cui

$$X_1 = \frac{\frac{10}{3}\frac{pl^4}{EJ} + \alpha l t}{\frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ} + \frac{l}{EA} + \frac{1}{k_{eq}}} = \frac{5}{23}(10\frac{pl^3}{EJ} + 3\alpha t)kl$$

* * *