Università di Pisa

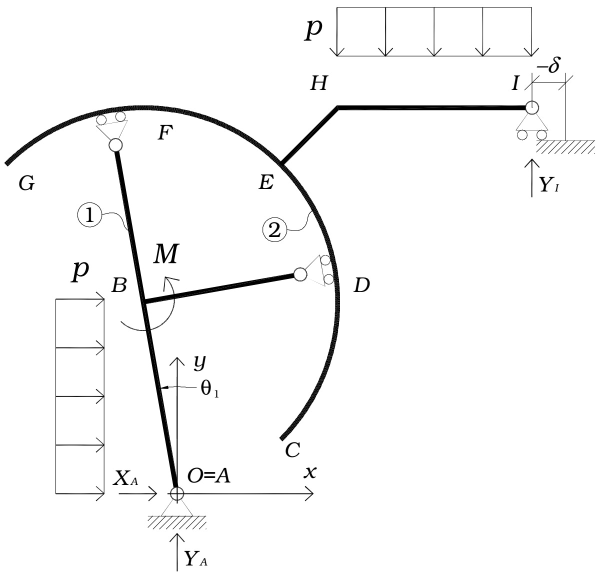
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I

Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Nucleare

(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 20 settembre 2006 - Soluzione

Problema 1



1) Si fissi un sistema di riferimento *Oxy* con origine in *A*, asse *y* (versore **j**) diretto come l'asta *AB* ed asse *x* (versore **i**) ortogonale a questa.

Siano θ_1 e θ_2 le rotazioni dei corpi ① e ②, positive se antiorarie.

Vincoli esterni in *A* e *I*:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0} \ \text{ e } \ \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Per il vincolo in *I* segue subito che

$$\mathbf{u}_I = \delta\, \mathbf{i}$$

Vincoli interni in *D* e *F*:

$$\Delta\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = \mathbf{0} \ \text{ e } \ \Delta\mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n}_F = \mathbf{0}$$

dove

$$\Delta\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D^2 - \mathbf{u}_D^1 \ \text{ e } \ \Delta\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_F^2 - \mathbf{u}_F^1$$

sono gli spostamenti relativi e tra i punti *D* e *F*, pensati appartenenti ai corpi ① e ②, e

$$\mathbf{n}_D = -\mathbf{i} \ \text{ e } \ \mathbf{n}_F = -\mathbf{j}$$

sono le normali ai piani dei rispettivi vincoli.

Spostamenti di $D \in$ ① e $F \in$ ①:

$$\mathbf{u}_D^1 = \mathbf{u}_A + \theta_1\, \mathbf{k} \times (D - A) = \theta_1\, \mathbf{k} \times (l\, \mathbf{i} + l\, \mathbf{j}) = l\theta_1(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$$
$$\mathbf{u}_F^1 = \mathbf{u}_A + \theta_1\, \mathbf{k} \times (F - A) = \theta_1\, \mathbf{k} \times (2l\, \mathbf{j}) = -2l\theta_1 \mathbf{i}$$

Spostamenti di $D \in$ ② e $F \in$ ②:

$$\mathbf{u}_D^2 = \mathbf{u}_I + \theta_2\, \mathbf{k} \times (D - I) = \delta\, \mathbf{i} + \theta_2\, \mathbf{k} \times (-l\, \mathbf{i} - l\, \mathbf{j}) = \delta\, \mathbf{i} + l\theta_2(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{u}_F^2 = \mathbf{u}_I + \theta_2\, \mathbf{k} \times (F - I) = \delta\, \mathbf{i} + \theta_2\, \mathbf{k} \times (-2l\, \mathbf{i}) = \delta\, \mathbf{i} - 2l\theta_2 \mathbf{j}$$

Spostamenti relativi:

$$\Delta\mathbf{u}_D = \delta\,\mathbf{i} + l\theta_2(\mathbf{i}-\mathbf{j}) - l\theta_1(-\mathbf{i}+\mathbf{j}) = (\delta + l\theta_1 + l\theta_2)\mathbf{i} - l(\theta_1+\theta_2)\mathbf{j}$$
$$\Delta\mathbf{u}_F = \delta\,\mathbf{i} - 2l\theta_2\mathbf{j} + 2l\theta_1\mathbf{i} = (\delta + 2l\theta_1)\mathbf{i} - 2l\theta_2\mathbf{j}$$

Vincoli interni:

$$\Delta\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = [(\delta + l\theta_1 + l\theta_2)\mathbf{i} - l(\theta_1+\theta_2)\mathbf{j}]\cdot(-\mathbf{i}) = -\delta - l\theta_1 - l\theta_2 = 0$$
$$\Delta\mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n}_F = [(\delta + 2l\theta_1)\mathbf{i} - 2l\theta_2\mathbf{j}]\cdot(-\mathbf{j}) = 2l\theta_2 = 0$$

da cui le relazioni:

$$\delta = -l\theta_1 \text{ e } \theta_2 = 0$$

2) Lavoro virtuale:

$$\delta L = M\theta_1 + pl\,\mathbf{i}\cdot(-\frac{l}{2}\theta_1\mathbf{i}) + pl\,(-\mathbf{j})\cdot\mathbf{0} = M\theta_1 - \frac{1}{2}pl^2\theta_1$$

Per l'equilibrio:

$$\delta L = 0, \quad \forall\theta_1 \quad \Rightarrow \quad (M - \frac{1}{2}pl^2)\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{2}pl^2$$

3) Equilibrio globale alla rotazione intorno ad A ($M = pl^2/2$):

$$M - pl\frac{l}{2} - pl\frac{3}{4}2l + Y_I 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_I = \frac{3}{4}pl$$

Equilibrio globale alla traslazione secondo x:

$$X_A + pl = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = -pl$$

Equilibrio globale alla traslazione secondo y:

$$Y_A + Y_I - pl = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = \frac{1}{4}pl$$

Siano R_D e R_F le reazioni esercitate da ② su ① nei punti D e F, dirette secondo i versori normali $\mathbf{n}_D$ e $\mathbf{n}_F$ definiti sopra.
Equilibrio del corpo ① alla traslazione secondo x:

$$X_A + pl - R_D = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D = 0$$

Equilibrio del corpo ① alla traslazione secondo y:

$$Y_A - R_F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_F = \frac{1}{4}pl$$

L'asta BD e i tratti CDE e FG dell'asta curva sono scarichi.

Caratteristiche di sollecitazione sulle aste AB e BF:

$$\begin{cases} N_{AB}(s) = -Y_A = -\frac{1}{4}pl \\ T_{AB}(s) = -X_A - ps = p(l-s) \\ M_{AB}(s) = ps(l - \frac{s}{2}) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} N_{BF}(s) = -R_F = -\frac{1}{4}pl \\ T_{BF}(s) = 0 \\ M_{BF}(s) = 0 \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione sul tratto curvo *FE* ($s = l\alpha$):

$$\begin{cases} N_{FE}(s) = R_F \sin\alpha = \frac{1}{4} pl \sin\frac{s}{l} \\ T_{FE}(s) = R_F \cos\alpha = \frac{1}{4} pl \cos\frac{s}{l} \\ M_{FE}(s) = R_F l \sin\alpha = \frac{1}{4} pl^2 \sin\frac{s}{l} \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione sull'asta *EH*:

$$\begin{cases} N_{EH}(s) = -R_F \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8} pl \\ T_{EH}(s) = R_F \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} pl \\ M_{EH}(s) = R_F (l+s)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} pl(l+s) \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione sull'asta *HI*:

$$\begin{cases} N_{HI}(s) = 0 \\ T_{HI}(s) = -Y_I + p(l-s) = p(\frac{l}{4} - s) \\ M_{EH}(s) = Y_I (l-s) - p\frac{(l-s)^2}{2} = \frac{1}{4} p(l+2s)(l-s) \end{cases}$$

* * *