Università di Pisa

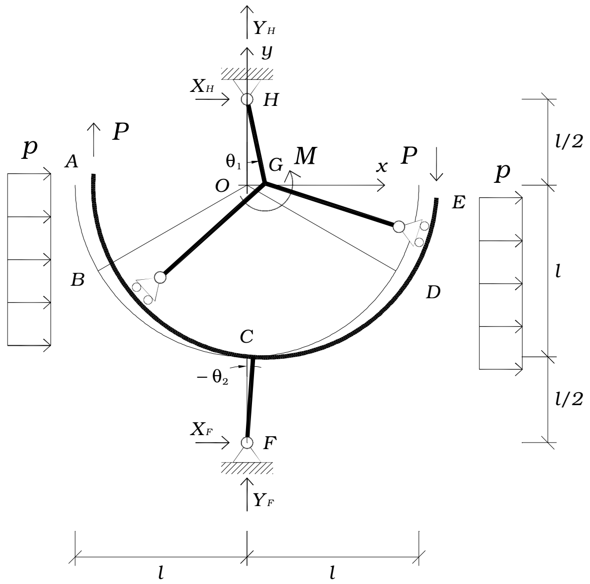
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I

Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Nucleare

(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 9 settembre 2006 - Soluzione

Problema 1



1) Si fissi un sistema di riferimento *Oxy* con origine in G, asse *x* (versore **i**) diretto secondo la direzione *GE* ed asse *y* (versore **j**) diretto come l'asta *GH*.
Vincoli esterni in *F* e *H*:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{u}_H = 0$$

Vincoli interni in *B* e *D*:

$$\Delta\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{0} \text{ e } \Delta\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = \mathbf{0}$$

dove

$$\Delta\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_B^1 - \mathbf{u}_B^2 \text{ e } \Delta\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D^1 - \mathbf{u}_D^2$$

sono gli spostamenti relativi e tra i punti B e D, pensati appartenenti ai corpi ① e ②, e

$$\mathbf{n}_B = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \text{ e } \mathbf{n}_D = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

sono le normali ai piani dei rispettivi vincoli.

Siano θ_1 e θ_2 le rotazioni (positive se orarie) dei corpi ① e ②.
Spostamento di *B*∈ ① e *D*∈ ①:

$$\mathbf{u}_B^1 = \mathbf{u}_H + \theta_1\,\mathbf{k}\times(B-H) = \theta_1\,\mathbf{k}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}l\,\mathbf{i} - l\,\mathbf{j}) = l\theta_1(\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_D^1 = \mathbf{u}_H + \theta_1\,\mathbf{k}\times(D-H) = \theta_1\,\mathbf{k}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}l\,\mathbf{i} - l\,\mathbf{j}) = l\theta_1(\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j})$$

Spostamento di *B*∈ ② e *D*∈ ②:

$$\mathbf{u}_B^2 = \mathbf{u}_F + \theta_2\,\mathbf{k}\times(B-F) = \theta_2\,\mathbf{k}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}l\,\mathbf{i} + l\,\mathbf{j}) = l\theta_2(-\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_D^2 = \mathbf{u}_F + \theta_2\,\mathbf{k}\times(D-F) = \theta_2\,\mathbf{k}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}l\,\mathbf{i} + l\,\mathbf{j}) = l\theta_2(-\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j})$$

Spostamenti relativi:

$$\Delta\mathbf{u}_B = l\theta_1(\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}) - l\theta_2(-\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}) = l(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}l(-\theta_1+\theta_2)\mathbf{j}$$

$$\Delta\mathbf{u}_D = l\theta_1(\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}) - l\theta_2(-\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}) = l(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\theta_1-\theta_2)\mathbf{j}$$

Vincoli interni:

$$\Delta\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}_B = [l(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}l(-\theta_1+\theta_2)\mathbf{j}]\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}) = \frac{\sqrt{3}}{2}l(\theta_1+\theta_2) + \frac{\sqrt{3}}{4}l(-\theta_1+\theta_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}l(\theta_1+3\theta_2) = 0$$

$$\Delta\mathbf{u}_D\cdot\mathbf{n}_D = [l(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}l(\theta_1-\theta_2)\mathbf{j}]\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}l(\theta_1+\theta_2) + \frac{\sqrt{3}}{4}l(\theta_1-\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4}l(\theta_1+3\theta_2) = 0$$

da cui la relazione fra le rotazioni:

$$\theta_2 = -\frac{1}{3}\theta_1$$

Spostamenti di *A*, *B*∈②, *D*∈② ed *E*:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_F + \theta_2\,\mathbf{k}\times(A-F) = \theta_2\,\mathbf{k}\times(-l\,\mathbf{i} + \frac{3}{2}l\,\mathbf{j}) = -l\theta_2(\frac{3}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}) = l\theta_1(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_B^2 = l\theta_2(-\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}) = \frac{1}{3}l\theta_1(\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_D^2 = l\theta_2(-\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}) = \frac{1}{3}l\theta_1(\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_F + \theta_2\,\mathbf{k}\times(E-F) = \theta_2\,\mathbf{k}\times(l\,\mathbf{i} + \frac{3}{2}l\,\mathbf{j}) = l\theta_2(-\frac{3}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}) = l\theta_1(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j})$$

2) Lavoro virtuale ($P = 2pl$):

$$\delta L = M\theta_1 + pl\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}_B^2 + pl\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}_D^2 + P\mathbf{j}\cdot\mathbf{u}_A - P\mathbf{j}\cdot\mathbf{u}_E = M\theta_1 + \frac{1}{3}pl^2\theta_1 + \frac{1}{3}pl^2\theta_1 + \frac{2}{3}pl^2\theta_1 + \frac{2}{3}pl^2\theta_1 = M\theta_1 + 2pl^2\theta_1$$

Per l'equilibrio:

$$\delta L = 0,\quad \forall\theta_1 \quad\Rightarrow\quad (M + 2pl^2)\theta_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad M = -2pl^2$$

3) Equilibrio globale alla rotazione intorno a *H* ($M = -2pl^2$):

$$M + 2pl^2 - 2Pl + X_F 2l = 0 \quad\Rightarrow\quad X_F = 2pl$$

Equilibrio globale alla traslazione secondo *x*:

$$2pl + X_F + X_H = 0 \quad\Rightarrow\quad X_H = -4pl$$

Equilibrio globale alla traslazione secondo *y*:

$$P - P + Y_F + Y_H = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_H = -Y_F$$

Siano R_B e R_D le reazioni esercitate da ② su ① nei punti *B* e *D*, dirette secondo i versori normali $\mathbf{n}_B$ e $\mathbf{n}_D$ definiti sopra.
Per l'antisimmetria dei carichi:

$$R_D = -R_B$$

Equilibrio del corpo ① alla traslazione secondo *x*:

$$X_H + \frac{\sqrt{3}}{2} R_B - \frac{\sqrt{3}}{2} R_D = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{4\sqrt{3}}{3} pl = -R_D$$

Equilibrio del corpo ① alla traslazione secondo *y*:

$$Y_H + \frac{1}{2} R_B + \frac{1}{2} R_D = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_H = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_F = -Y_H = 0$$

Caratteristiche di sollecitazione sull'asta *HG*:

$$\begin{cases} N_{HG}(s) = Y_H = 0 \\ T_{HG}(s) = X_H = -4pl \\ M_{BG}(s) = X_H s = -4pls \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione sulle aste *BG* e *DG*:

$$\begin{cases} N_{BG}(s) = -R_B = -\frac{4\sqrt{3}}{3} pl \\ T_{BG}(s) = 0 \\ M_{BG}(s) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} N_{DG}(s) = -R_D = \frac{4\sqrt{3}}{3} pl \\ T_{DG}(s) = 0 \\ M_{DG}(s) = 0 \end{cases}$$

* * *

Caratteristiche di sollecitazione sul tratto *AB* ($\alpha = s/l$):

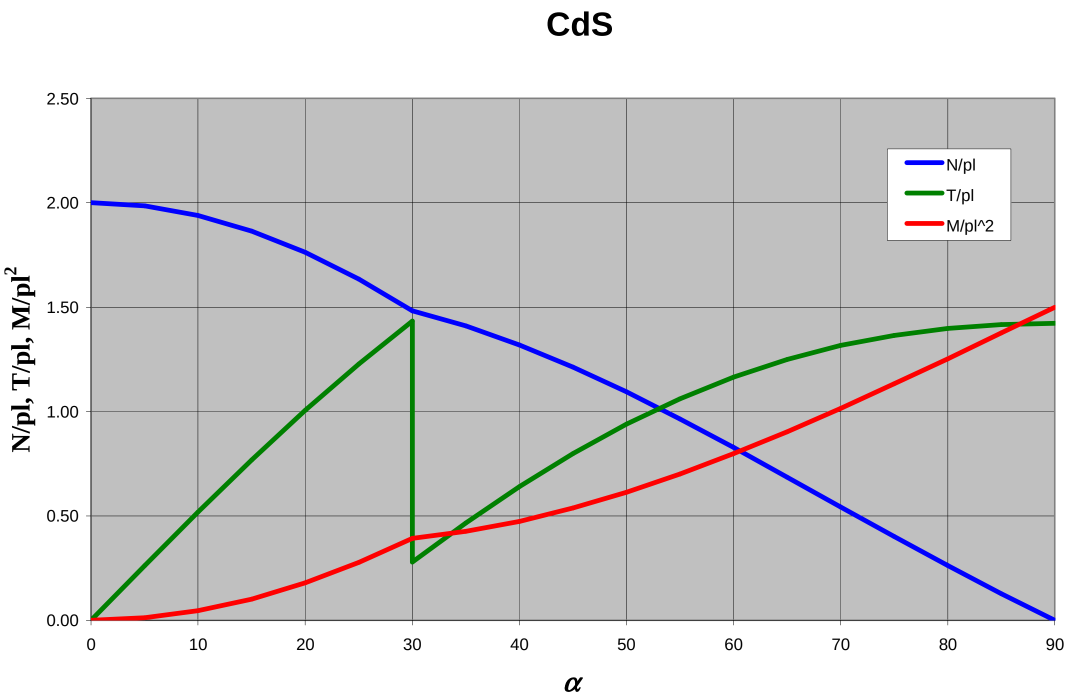
$$\begin{cases} pl\sin\alpha - T_{AB}(s)\cos\alpha + N_{AB}(s)\sin\alpha = 0 \\ P - T_{AB}(s)\sin\alpha - N_{AB}(s)\cos\alpha = 0 \\ -\frac{1}{2} pl^2 \sin^2\alpha - Pl(1-\cos\alpha) + M_{AB}(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{AB}(s) = pl(-1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) \\ T_{AB}(s) = pl(2+\cos\alpha)\sin\alpha \\ M_{AB}(s) = \frac{1}{2} pl^2[5 - 4\cos\alpha - \cos^2\alpha)] \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione sul tratto *BC* ($\alpha = s/l$):

$$\begin{cases} pl\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} R_B - T_{AB}(s)\cos\alpha + N_{AB}(s)\sin\alpha = 0 \\ P - \frac{1}{2} R_B - T_{AB}(s)\sin\alpha - N_{AB}(s)\cos\alpha = 0 \\ -\frac{1}{2} pl^2 \sin^2\alpha - Pl(1-\cos\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} R_B l(\sin\alpha - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} R_B l(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha) + M_{AB}(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{AB}(s) = pl[-1 + \sin\alpha + (2 - \frac{\sqrt{3}}{3})\cos\alpha + \cos^2\alpha] \\ T_{AB}(s) = pl[(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \cos\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha] \\ M_{AB}(s) = \frac{1}{2} pl^2[5 - 2\sin\alpha - 2(2 - \frac{\sqrt{3}}{3})\cos\alpha - \cos^2\alpha] \end{cases}$$

Le caratteristiche di sollecitazione sui tratti *CD* e *DE* si ottengono per simmetria.

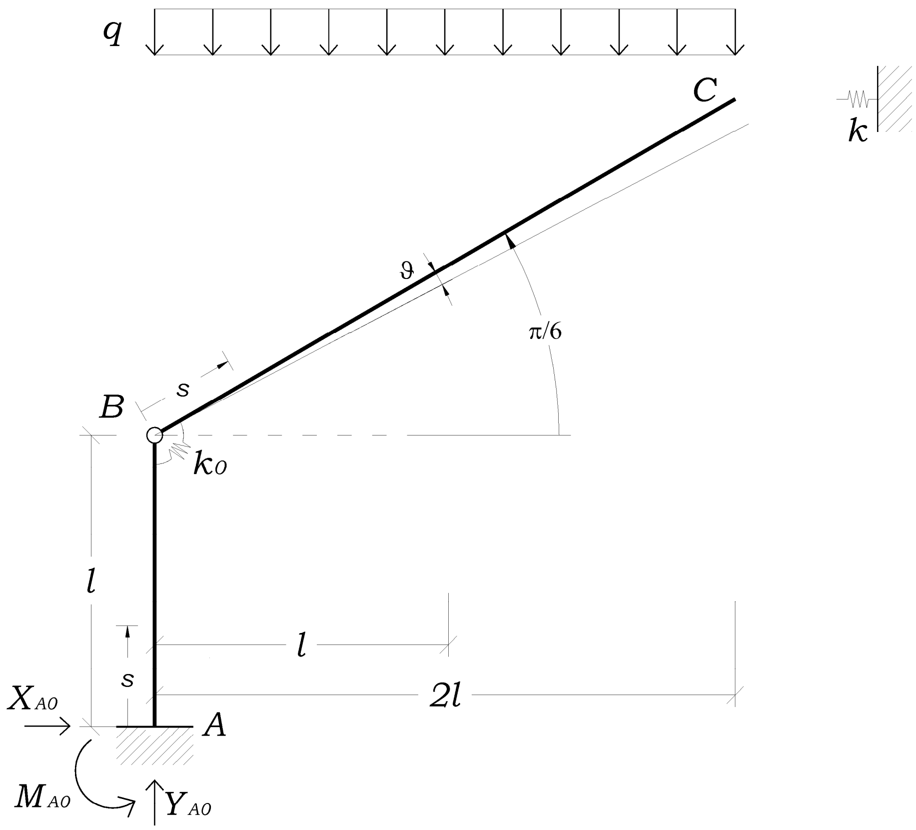

CdS
2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
N/pl, T/pl, M/pl^2
α
N/pl
T/pl
M/pl^2

Correzione del Compito di SDCI del 09-09-2006

Esercizio 2

Punto 1)

Sistema 0:



Calcolo delle reazioni vincolari:

$V_{A0} = 2ql$ Reazione verticale

$H_{A0} = 0$ Reazione orizzontale

$M_{A0} = -2ql^2$ Coppia di incastro

Caratteristiche della sollecitazione:

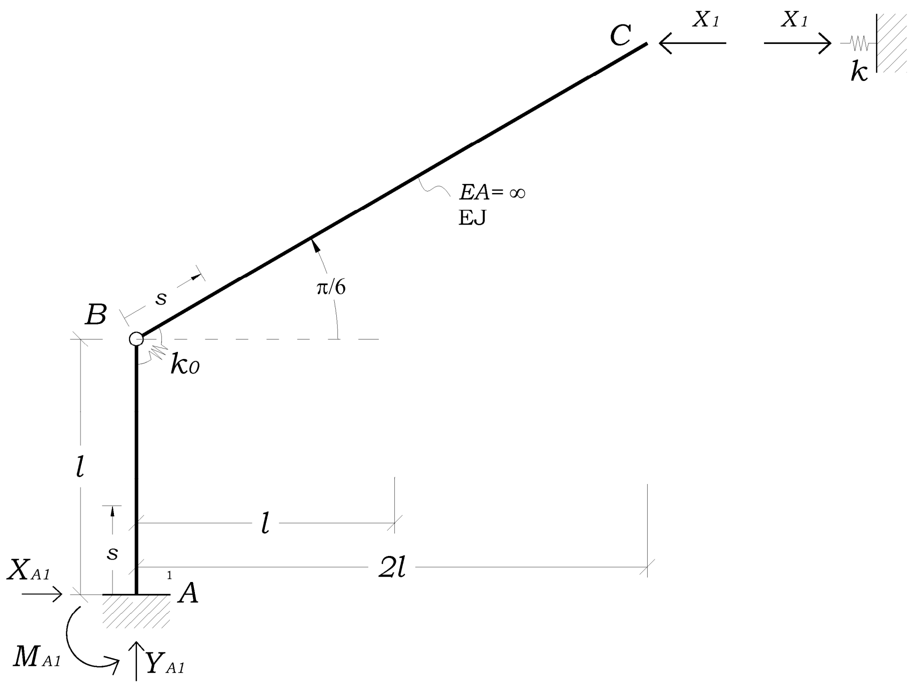
$$M_{AB}(s) = -2ql^2 \qquad 0 \le s \le l \qquad \text{Tratto AB}$$

$$M_{BC}(s) = -2ql^2 + 2ql\left(s\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{q}{2}\left(s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -2ql^2 + \sqrt{3}qls - \frac{3}{8}qs^2 \qquad 0 \le s \le \frac{4}{\sqrt{3}}l \qquad \text{Tratto BC}$$

$M_B = -2ql^2$ Momento nella molla in B

$F_C = 0$ Forza applicata nella molla in C

Sistema 1:



Calcolo delle reazioni vincolari:

$V_{A1} = 0$	Reazione verticale
$H_{A1} = 1$	Reazione orizzontale
$M_{A1} = -\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)L$	Coppia di incastro

Caratteristiche della sollecitazione:

$M_{AB}(s) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)l - s$	$0 \le s \le l$	Tratto AB
$M_{BC}(s) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)l - l - \frac{s}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}l - \frac{s}{2}$	$0 \le s \le \frac{4}{\sqrt{3}}l$	Tratto BC

$M_B = \frac{2}{\sqrt{3}}l$	Momento nella molla in B
$F_C = -1$	Forza applicata nella molla in C

Calcolo dei coefficienti di Muller Breslau:

Coefficiente η_{10}

$$\eta_{10}^{AB} = \int_0^l \left(-2ql^2\right)\left(\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)l - s\right)\frac{ds}{EJ} = \int_0^l \left(-\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)ql^3 + 2ql^2 s\right)\frac{ds}{EJ} = -\left(1+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\frac{ql^4}{EJ}$$

$$\eta_{10}^{BC} = \int_0^{\frac{4l}{\sqrt{3}}} \left(-2ql^2 + \sqrt{3}qls - \frac{3}{8}qs^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}l - \frac{s}{2}\right)\frac{ds}{EJ} = \int_0^{\frac{4l}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}ql^3 + 3ql^2 s - \frac{3\sqrt{3}}{4}qls^2 + \frac{3}{16}qs^3\right)\frac{ds}{EJ}$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{ql^4}{EJ}$$

Contributo delle molle:

$$\eta_{10}^{k_0} = \frac{1}{k_0}\left(-2ql^2\right)\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{ql^3}{k_0}$$

Contributo del difetto di montaggio:

$$\eta_{\delta 0} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}l\right)\left(-\vartheta_0\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}l\vartheta_0$$

Coefficiente finale:

$$\eta_{10} = -\left(1+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\frac{ql^4}{EJ} - \frac{4}{3}\frac{ql^4}{EJ} - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{ql^3}{k_0} - \frac{2}{\sqrt{3}}l\vartheta_0$$

$$= -\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{7}{3}\right)\frac{ql^4}{EJ} - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{ql^3}{k_0} - \frac{2}{\sqrt{3}}l\vartheta_0$$

Sostituendo i valori di k_0 e k si ottiene:

$$\eta_{10} = -\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{7}{3}\right)\frac{ql^4}{EJ} - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{ql^4}{EJ} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{ql^4}{EJ}$$

$$= -\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\frac{ql^4}{EJ} = -\left(\frac{7}{3} + \frac{10}{\sqrt{3}}\right)\frac{ql^4}{EJ}$$

Coefficiente η_{11}

$$\eta_{11}^{AB} = \int_0^l \left(\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)l - s\right)^2 \frac{ds}{EJ} = \int_0^l \left(\left(\frac{7}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)l^2 - \left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)ls + s^2\right)\frac{ds}{EJ} = \left(\frac{5+2\sqrt{3}}{3}\right)\frac{l^3}{EJ}$$

$$\eta_{10}^{BC} = \int_0^{\frac{4l}{\sqrt{3}}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}l - \frac{s}{2}\right)^2 \frac{ds}{EJ} = \int_0^{\frac{4l}{\sqrt{3}}} \left(\frac{4}{3}l^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}ls + \frac{s^2}{4}\right)\frac{ds}{EJ} = \frac{16}{9\sqrt{3}}\frac{l^3}{EJ}$$

Contributo delle molle:

$$\eta_{11}^{k_0} = \frac{4}{3}\frac{l^2}{k_0}$$

Coefficiente finale:

$$\eta_{11} = \left(\frac{5+2\sqrt{3}}{3}\right)\frac{l^3}{EJ} + \frac{16}{9\sqrt{3}}\frac{l^3}{EJ} + \frac{4}{3}\frac{l^2}{k_0} = \left(\frac{45+34\sqrt{3}}{27}\right)\frac{l^3}{EJ} + \frac{4}{3}\frac{l^2}{k_0}$$

Sostituendo i valori di k_0 e k si ottiene:

$$\eta_{11} = \left(\frac{45+34\sqrt{3}}{27}\right)\frac{l^3}{EJ} + \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ} = \left(\frac{81+34\sqrt{3}}{27}\right)\frac{l^3}{EJ}$$

Coefficiente η_1

$$\eta_1 = -\frac{X}{k}$$

Sostituendo i valori di k_0 e k si ottiene:

$$\eta_1 = -\frac{l^3}{EJ}X$$

Calcolo dell'iperstatica:

$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X$$

Sostituendo:

$$-\frac{l^3}{EJ}X = -\left(\frac{7}{3} + \frac{10}{\sqrt{3}}\right)\frac{ql^4}{EJ} + \left(\frac{81+34\sqrt{3}}{27}\right)\frac{l^3}{EJ}X$$

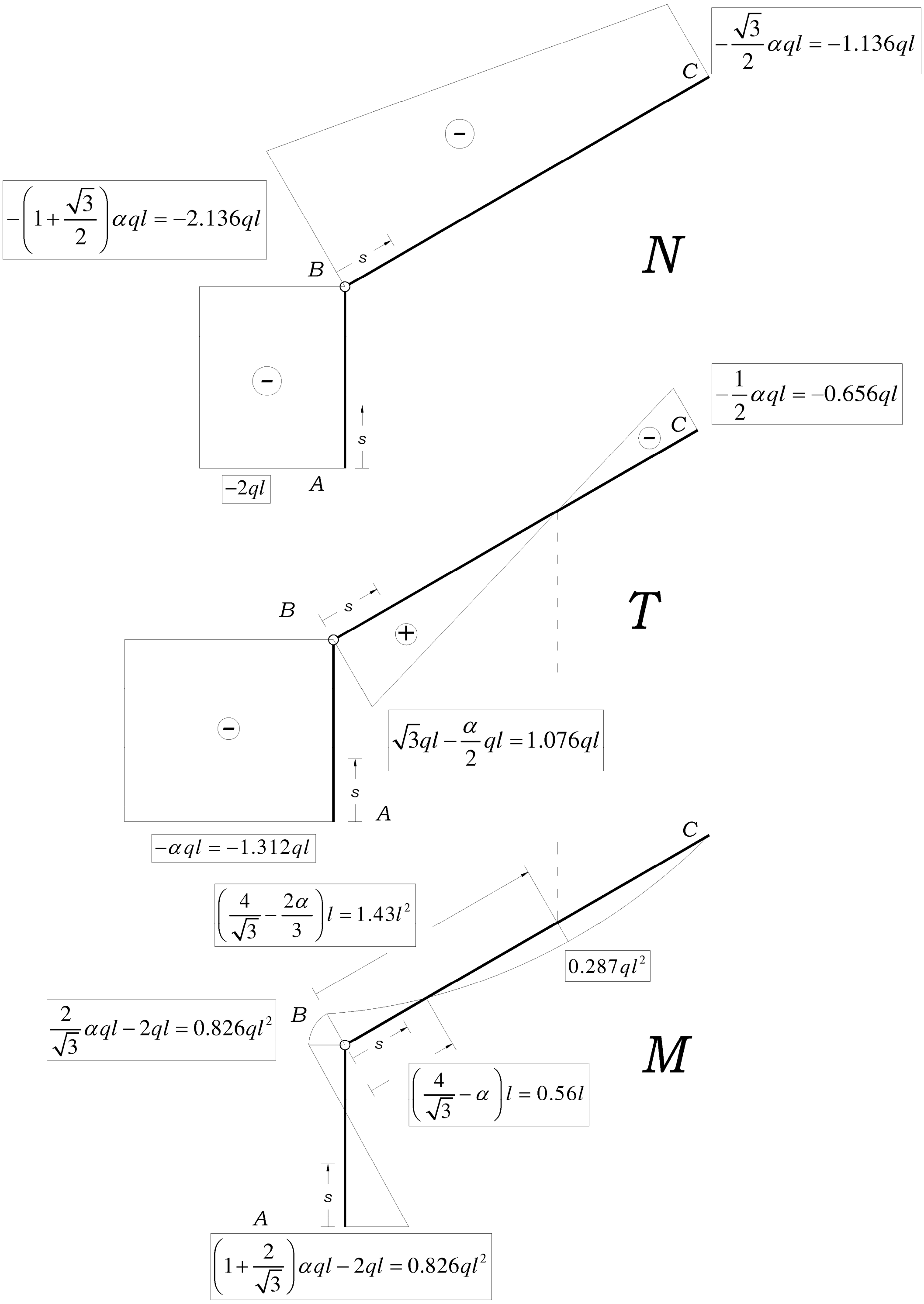
Si ottiene:

$$X\left(1 + \left(\frac{81+34\sqrt{3}}{27}\right)\right) = \left(\frac{7}{3} + \frac{10}{\sqrt{3}}\right)ql$$

$$X = \frac{\frac{7}{3} + \frac{10}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{81+34\sqrt{3}}{27}\right)}ql \cong \frac{8.107}{6.181}ql \cong 1.312ql$$

da cui il valore richiesto di α pari a 1.312.

Diagrammi delle Caratteristiche della Sollecitazione:



Calcolo dello Spostamento di C:

Calcolo lo spostamento orizzontale attraverso la molla:

$$v_H = \frac{X}{k} = \alpha \frac{ql^4}{EJ} = 1.312 \frac{ql^4}{EJ}$$