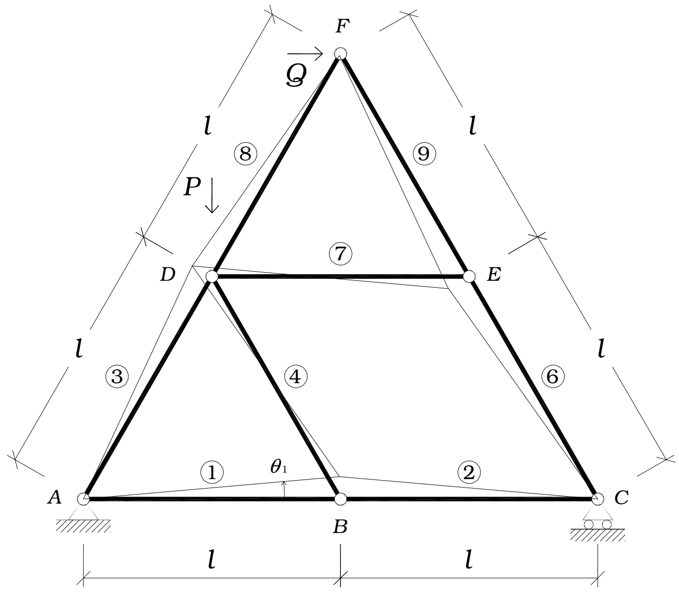
Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Nucleare
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 14 luglio 2006 - Soluzione

Problema 1



1) Si fissi un sistema di riferimento *OXY* con origine in *A*, asse *X* (versore **i**) diretto secondo l'asta *AB* ed asse *Y* (versore **j**) ortogonale a quest'ultima.

Vincoli in *A* e *C*:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0} \ \text{ e } \ \mathbf{u}_C \cdot \mathbf{j} = 0$$

Triangoli ABD e DEF rigidi:

$$\theta_3 = \theta_4 = \theta_1 \ \text{ e } \ \theta_8 = \theta_9 = \theta_7$$

Spostamento di *B*:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \theta_1 \mathbf{k} \times (B - A) = \theta_1 \mathbf{k} \times l\mathbf{i} = l\theta_1 \mathbf{j}$$

Spostamento di *C*:

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_B + \theta_2 \mathbf{k} \times (C - B) = l\theta_1 \mathbf{j} + \theta_2 \mathbf{k} \times l\mathbf{i} = l(\theta_1 + \theta_2)\mathbf{j}$$

Per il vincolo in *C*:

$$\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{j} = l(\theta_1 + \theta_2)\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = l(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_C = \mathbf{0}$$

Spostamento di *D*:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_A + \theta_3 \mathbf{k} \times (D - A) = \theta_1 \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}) l / 2 = l\theta_1 (-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) / 2$$

Spostamento di $E \in$ ⑥:

$$\mathbf{u}_E^6 = \mathbf{u}_C + \theta_6 \mathbf{k} \times (E - C) = \theta_6 \mathbf{k} \times (-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}) l / 2 = -l\theta_6 (\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) / 2$$

Spostamento di $E \in$ ⑦:

$$\mathbf{u}_E^7 = \mathbf{u}_D + \theta_7 \mathbf{k} \times (E - D) = l\theta_1 (-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) / 2 + \theta_7 \mathbf{k} \times l\mathbf{i} =$$
$$= l\theta_1 (-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) / 2 + l\theta_7 \mathbf{j} = -\sqrt{3} l\theta_1 / 2\mathbf{i} + l(\theta_1 / 2 + \theta_7)\mathbf{j}$$

Dall'uguaglianza dei due spostamenti segue

$$\begin{cases} -\sqrt{3}l\theta_6/2 = -\sqrt{3}l\theta_1/2 \\ -l\theta_6/2 = l(\theta_1/2+\theta_7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_6 = \theta_1 \\ \theta_7 = -\theta_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_E = -l\theta_1(\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j})/2$$

Spostamento di F:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_D + \theta_7\mathbf{k}\times(F-D) = l\theta_1(-\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j})/2 - \theta_1\mathbf{k}\times(\mathbf{i}+\sqrt{3}\mathbf{j})l/2 = l\theta_1(-\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j})/2 + l\theta_1(\sqrt{3}\mathbf{i}-\mathbf{j})/2 = \mathbf{0}$$

2) Teorema dei lavori virtuali:

$$L_v = -P\mathbf{j}\cdot\mathbf{u}_D + Q\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}_F = -P\mathbf{j}\cdot l\theta_1(-\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}) + Q\mathbf{i}\cdot\mathbf{0} = -Pl\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P = 0 \\ Q = qualsiasi \end{cases}$$

3) Reazioni vincolari:

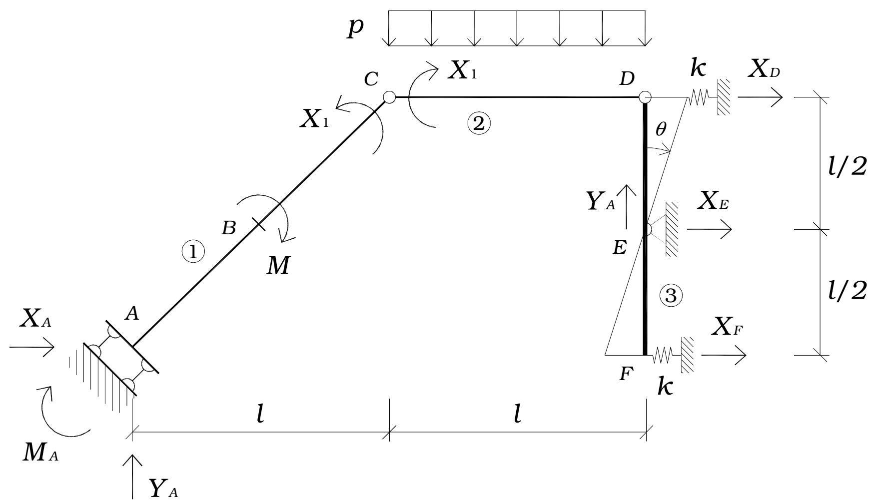
$$X_A = -Q\,,\ Y_A = -\sqrt{3}Q/2 \ \text{ e } \ Y_C = \sqrt{3}Q/2$$

Sforzo normale nelle aste:

$$N_1 = N_{AB} = Q/2$$
$$N_2 = N_{BC} = Q/2$$
$$N_3 = N_{AD} = Q$$
$$N_4 = N_{BD} = 0$$

$$N_6 = N_{CE} = -Q$$
$$N_7 = N_{DE} = 0$$
$$N_8 = N_{DF} = Q$$
$$N_9 = N_{EF} = -Q$$

Problema 2



1) Il sistema effettivo F si scompone nella somma dei sistemi F_0 (dove agiscono i carichi *p* e *M*) + F_1 (dove agisce l'incognita iperstatica X_1).

   Si risolve per prima il sistema F_0. Per la natura del vincolo in *A*:

$$X_A^0 = Y_A^0$$

   Equilibrio alla rotazione intorno a *C* (eq. sconnessione) della trave *AC*:

$$M + M_A^0 - X_A^0 l + Y_A^0 l = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A^0 = -M$$

   Equilibrio globale alla traslazione secondo *X*, *Y* ed alla rotazione intorno ad *A*:

$$X_A^0 + X_D^0 + X_E^0 + X_F^0 = 0$$

$$Y_A^0 - pl + Y_E^0 = 0$$

$$M_A^0 + M + pl\frac{3}{2}l + X_D^0 l + X_E^0 \frac{l}{2} - Y_E^0 2l = 0 \quad (*)$$

   Equilibrio alla rotazione intorno a *D* (eq. sconnessione) della trave (rigida) *DF*:

$$X_E^0 \frac{l}{2} + X_F^0 l = 0$$

   Reazioni elastiche delle molle in funzione della rotazione di *DF*:

$$X_D^0 = -kl\theta_0 / 2$$

$$X_F^0 = kl\theta_0 / 2$$

   Sostituendo le ultime due espressioni nelle precedenti, si ricavano le reazioni vincolari in funzione di θ_0:

$$X_E^0 = -2X_F^0 = -kl\theta_0$$

$$X_A^0 = -X_D^0 - X_E^0 - X_F^0 = kl\theta_0$$

$$Y_A^0 = X_A^0 = kl\theta_0$$

$$Y_E^0 = pl - Y_A^0 = pl - kl\theta_0$$

   Infine, sostituendo nella (*), si trova l'eq. che fornisce θ_0:

$$-M + M + \frac{3}{2}pl^2 - \frac{1}{2}kl^2\theta_0 - \frac{1}{2}kl^2\theta_0 - 2l(pl - kl\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{p}{2k}$$

da cui

$$X_A^0 = \frac{pl}{2} \text{ e } Y_A^0 = \frac{pl}{2}$$
$$X_D^0 = -\frac{pl}{4}$$
$$X_E^0 = -\frac{pl}{2} \text{ e } Y_E^0 = \frac{pl}{2}$$
$$X_F^0 = \frac{pl}{4}$$

Caratteristiche della sollecitazione nel sistema F_0:

$$M_{AB}^0(s_1) = -M \qquad T_{AB}^0(s_1) = 0 \qquad N_{AB}^0(s_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}pl \qquad \text{con } s_1 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}l]$$
$$M_{BC}^0(s_2) = 0 \qquad T_{BC}^0(s_2) = 0 \qquad N_{BC}^0(s_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}pl \qquad \text{con } s_2 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}l]$$
$$M_{CD}^0(s_3) = \frac{p}{2}s_3(l - s_3) \qquad T_{CD}^0(s_3) = p(\frac{l}{2} - s_3) \qquad N_{CD}^0(s_1) = -\frac{pl}{2} \qquad \text{con } s_3 \in [0, l]$$

Si passa quindi a risolvere il sistema F_1. Per la natura del vincolo in *A*:

$$X_A^1 = Y_A^1$$

Equilibrio alla rotazione intorno a *C* (eq. sconnessione) della trave *AC*:

$$M_A^0 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A^1 = 1$$

Equilibrio globale alla traslazione secondo *X*, *Y* ed alla rotazione intorno ad *A*:

$$X_A^1 + X_D^1 + X_E^1 + X_F^1 = 0$$
$$Y_A^1 + Y_E^1 = 0$$
$$M_A^1 - 1 + 1 + X_D^1 l + X_E^1 \frac{l}{2} - Y_E^1 2l = 0 \ \ (**)$$

Equilibrio alla rotazione intorno a *D* (eq. sconnessione) della trave (rigida) *DF*:

$$X_E^1 \frac{l}{2} + X_F^1 l = 0$$

Reazioni elastiche delle molle in funzione della rotazione di *DF*:

$$X_D^1 = -kl\theta_1 / 2$$
$$X_F^1 = kl\theta_1 / 2$$

Sostituendo le ultime due espressioni nelle precedenti, si ricavano le reazioni vincolari in funzione di θ_1:

$$X_E^1 = -2X_F^1 = -kl\theta_1$$
$$X_A^1 = -X_D^1 - X_E^1 - X_F^1 = kl\theta_1$$
$$Y_A^1 = X_A^1 = kl\theta_1$$
$$Y_E^1 = -Y_A^1 = -kl\theta_1$$

Infine, sostituendo nella (**), si trova l'eq. che fornisce θ_1:

$$1 - \frac{1}{2}kl^2\theta_1 - \frac{1}{2}kl^2\theta_1 + 2kl^2\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = -\frac{1}{kl^2}$$

da cui

$$X_A^1 = -\frac{1}{l} \text{ e } Y_A^1 = -\frac{1}{l}$$

$$X_D^1 = \frac{1}{2l}$$

$$X_E^1 = \frac{1}{l} \text{ e } Y_E^1 = \frac{1}{l}$$

$$X_F^1 = -\frac{1}{2l}$$

Caratteristiche della sollecitazione nel sistema F_1:

$M_{AB}^1(s_1) = 1$ $\quad T_{AB}^1(s_1) = 0$ $\quad N_{AB}^1(s_1) = \frac{\sqrt{2}}{l}$ $\quad$ con $s_1 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}l]$

$M_{BC}^1(s_2) = 1$ $\quad T_{BC}^1(s_2) = 0$ $\quad N_{BC}^1(s_2) = \frac{\sqrt{2}}{l}$ $\quad$ con $s_2 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}l]$

$M_{CD}^1(s_3) = 1 - \frac{s_3}{l}$ $\quad T_{CD}^1(s_3) = -\frac{1}{l}$ $\quad N_{CD}^0(s_1) = \frac{1}{l}$ $\quad$ con $s_3 \in [0, l]$

Equazione di congruenza di Müller-Breslau:

$$\eta_1 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11}$$

dove

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0}$$

da cui:

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11} + \frac{1}{k_0}}$$

Calcolo dei coefficienti mediante TLV:

$$\eta_{10} = \int_0^{l\sqrt{2}/2} M_{AB}^1 \frac{M_{AB}^0}{EJ} ds_1 + \int_0^{l\sqrt{2}/2} M_{BC}^1 \frac{M_{BC}^0}{EJ} ds_2 + \int_0^{l} M_{CD}^1 \frac{M_{CD}^0}{EJ} ds_3 + X_D^1 \frac{X_D^0}{k} + X_F^1 \frac{X_F^0}{k} =$$

$$= \int_0^{l\sqrt{2}/2} 1 \frac{-M}{EJ} ds_1 + \int_0^{l\sqrt{2}/2} 1 \frac{0}{EJ} ds_2 + \int_0^{l} (1 - \frac{s_3}{l}) \frac{p s_3 (l - s_3)}{2EJ} ds_3 + \frac{1}{2l}(-\frac{pl}{4k}) + (-\frac{1}{2l})\frac{pl}{4k} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Ml}{EJ} + \frac{p}{2EJl}\int_0^{l} (l - s_3) s_3 (l - s_3) ds_3 - \frac{p}{4k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Ml}{EJ} + \frac{pl^3}{24EJ} - \frac{p}{4k}$$

$$\eta_{11} = \int_0^{l\sqrt{2}/2} \frac{(M_{AB}^1)^2}{EJ} ds_1 + \int_0^{l\sqrt{2}/2} \frac{(M_{BC}^1)^2}{EJ} ds_2 + \int_0^{l} \frac{(M_{CD}^1)^2}{EJ} ds_3 + \frac{(X_D^1)^2}{k} + \frac{(X_F^1)^2}{k} =$$

$$= \int_0^{l\sqrt{2}/2} \frac{1^2}{EJ} ds_1 + \int_0^{l\sqrt{2}/2} \frac{1^2}{EJ} ds_2 + \int_0^{l} \frac{(1 - \frac{s_3}{l})^2}{EJ} ds_3 + \frac{1}{k}(\frac{1}{2l})^2 + \frac{1}{k}(-\frac{1}{2l})^2 =$$

$$= \sqrt{2}\frac{l}{EJ} + \frac{1}{EJl^2}\int_0^{l} (l - s_3)^2 ds_3 + \frac{1}{2kl^2} = \sqrt{2}\frac{l}{EJ} + \frac{l}{3EJ} + \frac{1}{2kl^2}$$

Incognita iperstatica:

$$X_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Ml}{EJ} - \frac{pl^3}{24EJ} + \frac{p}{4k}}{\sqrt{2}\frac{l}{EJ} + \frac{l}{3EJ} + \frac{1}{2kl^2} + \frac{1}{k_0}}$$

che con le posizioni:

$$\frac{EJ}{l^2} = kl\ ,\ \ k_0 = kl^2 \ \text{ e } \ M = pl^2$$

si semplifica in:

$$X_1 = \frac{(5+12\sqrt{2})}{4(11+6\sqrt{2})}pl^2 = \frac{-89+102\sqrt{2}}{196}pl^2 \cong 0.2819pl^2$$

2) Caratteristiche della sollecitazione:

$$M_{AB}(s_1) = M^0_{AB} + X_1 M^1_{AB} = -M + X_1$$
$$T_{AB}(s_1) = T^0_{AB} + X_1 T^1_{AB} = 0$$
$$N_{AB}(s_1) = N^0_{AB} + X_1 N^1_{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}pl + \frac{\sqrt{2}}{l}X_1 \qquad \text{con } s_1 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}l]$$

$$M_{BC}(s_2) = M^0_{BC} + X_1 M^1_{BC} = X_1$$
$$T_{BC}(s_2) = T^0_{BC} + X_1 T^1_{BC} = 0$$
$$N_{BC}(s_2) = N^0_{BC} + X_1 N^1_{BC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}pl + \frac{\sqrt{2}}{l}X_1 \qquad \text{con } s_2 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}l]$$

$$M_{CD}(s_3) = M^0_{CD} + X_1 M^1_{CD} = \frac{p}{2}s_3(l-s_3) + (1-\frac{s_3}{l})X_1$$
$$T_{CD}(s_3) = T^0_{CD} + X_1 T^1_{CD} = p(\frac{l}{2} - s_3) - \frac{1}{l}X_1$$
$$N_{CD}(s_3) = N^0_{CD} + X_1 N^1_{CD} = -\frac{pl}{2} + \frac{1}{l}X_1 \qquad \text{con } s_3 \in [0, l]$$

* * *