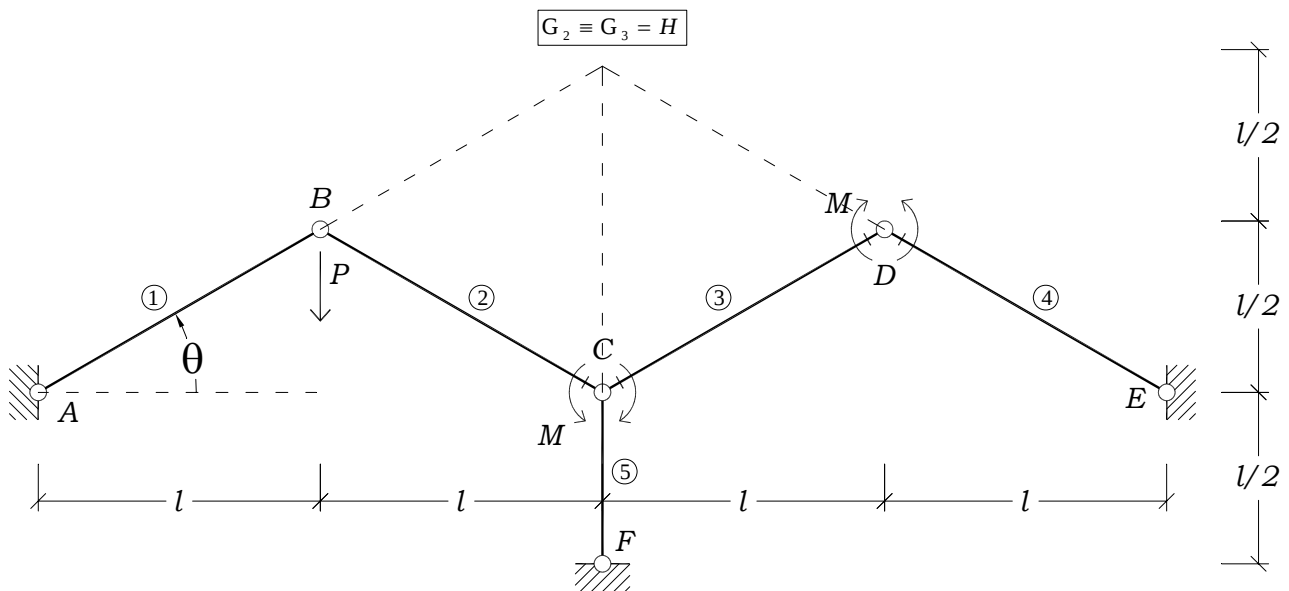


Correzione del Compito di SDCI del 05-06-2006

Esercizio 1

Punto 1)

Schema della struttura:



Spostamento del punto B valutato a partire da A:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \theta_1 \underline{k} \wedge (B - A)$$

Legame cinematico

$$(B - A) = l \underline{i} + \frac{l}{2} \underline{j}$$

Distanza BA

$$\underline{v}_A = 0$$

Vincolo in A

$$\underline{v}_B = \left(-\frac{\theta_1 l}{2} \right) \underline{i} + (\theta_1 l) \underline{j}$$

Espressione dello spostamento di B

$$G_1 \equiv A$$

Centro di istantanea rotazione

Spostamento del punto C valutato a partire da F:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_F + \theta_5 \underline{k} \wedge (C - F)$$

Legame cinematico

$$(C - F) = \frac{l}{2} \underline{j}$$

Distanza CF

$$\underline{v}_F = 0$$

Vincolo in A

$$\underline{v}_C = \left(-\frac{\theta_5 l}{2} \right) \underline{i}$$

Espressione dello spostamento di C

$$G_5 \equiv F$$

Centro di istantanea rotazione

Spostamento del punto C valutato a partire da B:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \theta_2 \underline{k} \wedge (C - B) \quad \text{Legame cinematico}$$

$$(C - B) = l \underline{i} - \frac{l}{2} \underline{j} \quad \text{Distanza CB}$$

$$\underline{v}_C = \underbrace{\left(-\frac{\theta_1 l}{2}\right) \underline{i} + (\theta_1 l) \underline{j}}_{\underline{v}_B} + \left(\frac{\theta_2 l}{2}\right) \underline{i} + (\theta_2 l) \underline{j} \quad \text{Espressione dello spostamento di C}$$

$$G_2 \equiv H \quad \text{Centro di istantanea rotazione}$$

Sistema risolvante della prima parte del cinematismo:

$$\begin{cases} \left(-\frac{\theta_1 l}{2}\right) + \left(\frac{\theta_2 l}{2}\right) = \left(-\frac{\theta_5 l}{2}\right) \text{ in direzione } \underline{i} \\ (\theta_1 l) + (\theta_2 l) = 0 \text{ in direzione } \underline{j} \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} \theta_5 = 2\theta_1 \\ \theta_2 = -\theta_1 \end{cases}$$

Spostamento del punto D valutato a partire da E:

$$\underline{v}_D = \underline{v}_E + \theta_4 \underline{k} \wedge (D - E) \quad \text{Legame cinematico}$$

$$(D - E) = -l \underline{i} + \frac{l}{2} \underline{j} \quad \text{Distanza CF}$$

$$\underline{v}_E = \underline{0} \quad \text{Vincolo in E}$$

$$\underline{v}_D = \left(-\frac{\theta_4 l}{2}\right) \underline{i} + (-\theta_4 l) \underline{j} \quad \text{Espressione dello spostamento di C}$$

$$G_4 \equiv E \quad \text{Centro di istantanea rotazione}$$

Spostamento del punto D valutato a partire da C:

$$\underline{v}_D = \underline{v}_C + \theta_3 \underline{k} \wedge (D - C) \quad \text{Legame cinematico}$$

$$(D - C) = l \underline{i} + \frac{l}{2} \underline{j} \quad \text{Distanza CF}$$

$$\underline{v}_C = \left(-2\theta_1 \frac{l}{2}\right) \underline{i}$$

$$\underline{v}_D = \underbrace{\left(-2\theta_1 \frac{l}{2}\right) \underline{i}}_{\underline{v}_C} + \left(-\frac{\theta_3 l}{2}\right) \underline{i} + (\theta_3 l) \underline{j} \quad \text{Espressione dello spostamento di C}$$

$$G_3 \equiv H \quad \text{Centro di istantanea rotazione}$$

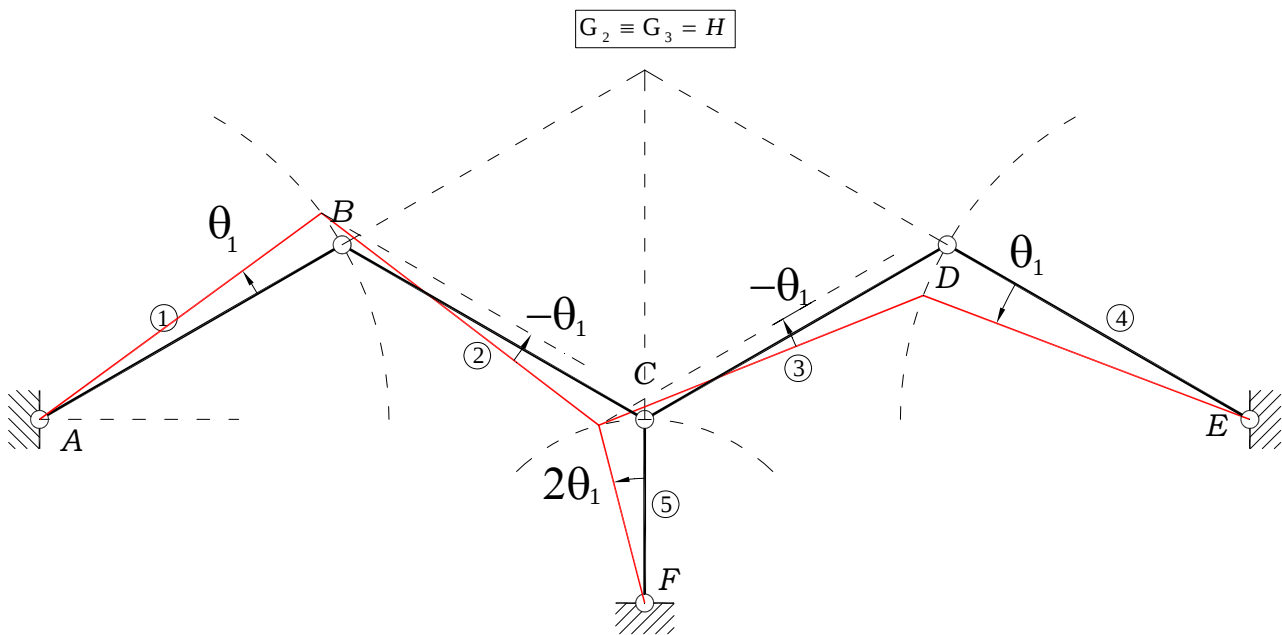
Sistema risolvante della seconda parte del cinematismo:

$$\begin{cases} \left(-\frac{\theta_4 l}{2}\right) = (-\theta_1 l) + \left(-\frac{\theta_3 l}{2}\right) \text{ in direzione } \vec{i} \\ (-\theta_4 l) = (\theta_3 l) \text{ in direzione } \vec{j} \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} \theta_3 = -\theta_4 = -\theta_1 \\ \theta_4 = \theta_1 \end{cases}$$

Diagramma del Cinematismo:



Punto 2)

Lavoro virtuale della forza P:

$$\vec{P} = P\vec{j}$$

Carico P

$$\vec{v}_B = \left(-\frac{\theta_1 l}{2}\right)\vec{i} + (\theta_1 l)\vec{j}$$

Spostamento di B

$$L_P = -P\theta_1 l$$

Lavoro di P

Lavoro virtuale delle coppie M

In C:

$$L_M^C = (M\vec{k}) \cdot (-\theta_1 \vec{k}) + (-M\vec{k}) \cdot (-\theta_1 \vec{k}) = 0$$

In D:

$$L_M^D = (-M\vec{k}) \cdot (-\theta_1 \vec{k}) + (M\vec{k}) \cdot (\theta_1 \vec{k}) = 2M\theta_1$$

Lavoro Totale:

$$-P\theta_1 l + 2M\theta_1 = 0 \rightarrow M = \frac{Pl}{2}$$

Punto 3)

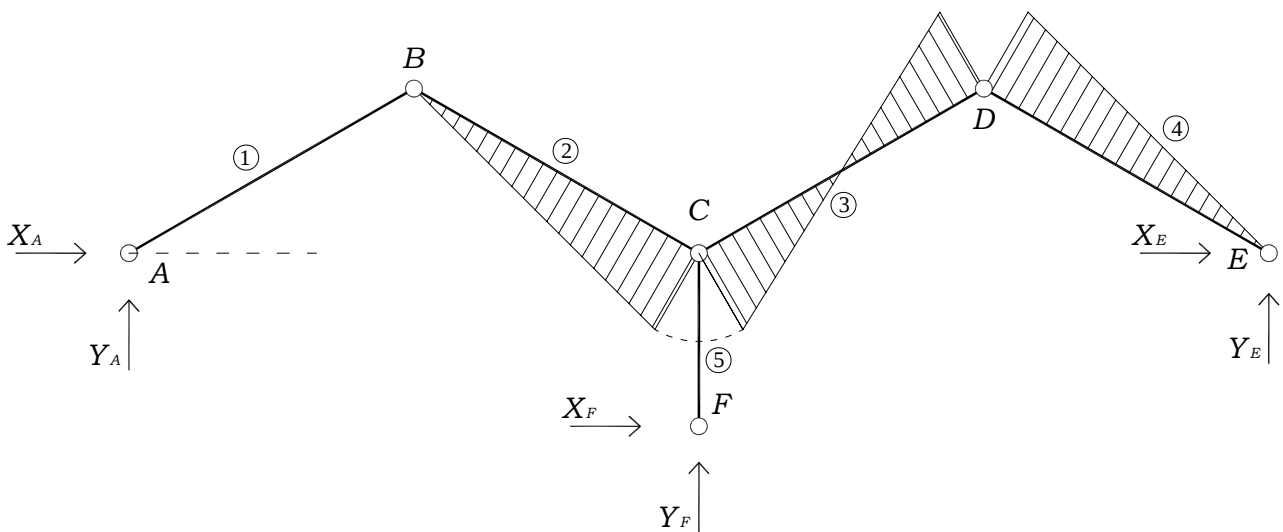
Calcolo delle reazioni vincolari:

$$\begin{cases} X_A + X_E = 0 \\ Y_A + Y_F + Y_E - P = 0 \\ X_F \frac{l}{2} = 0 \\ Y_A l - X_A \frac{l}{2} = 0 \\ 2Y_E l - M = 0 \\ X_E \frac{l}{2} + Y_E l + M = 0 \end{cases}$$

Risultato:

$$\begin{cases} X_A = \frac{3}{2}P \\ Y_A = \frac{3}{4}P \\ X_E = -\frac{3}{2}P \\ Y_E = \frac{1}{4}P \\ X_F = 0 \\ Y_F = 0 \end{cases}$$

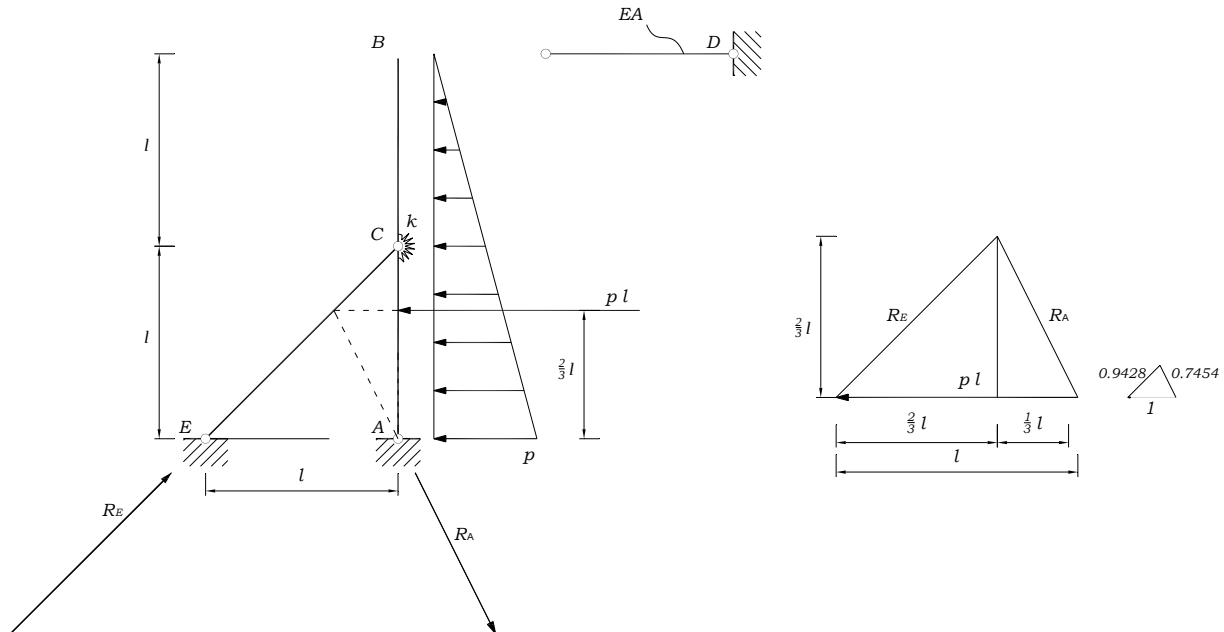
Diagramma del momento flettente:



Esercizio 2

Punto 1)

Sistema "0"



Calcolo delle reazioni vincolari

$$\begin{cases} R_{EY} + R_{AY} = 0 \\ R_{EX} + R_{AX} - pl = 0 \\ -R_{EX}l + R_{EY}l = 0 \\ R_{AX} \frac{2}{3}l + R_{AY} \frac{1}{3}l = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} R_{AX} = \frac{1}{3}pl \\ R_{AY} = -\frac{2}{3}pl \\ R_{EX} = \frac{2}{3}pl \\ R_{EY} = \frac{2}{3}pl \end{cases}$$

Caratteristiche della sollecitazione:

Tratto BC: $M_{BC}(s) = -\frac{ps}{2l} \frac{s}{2} \frac{s}{3} = -\frac{ps^3}{12l}$ $s \in [0, l]$

dove inoltre: $T_C = -\frac{pl}{4}$ e $M_C = M_K = -\frac{pl^2}{12}$

$M_{CA}(s) = -\frac{pl^2}{12} + \left(\frac{2pl}{3} - \frac{pl}{4}\right)s - \frac{p}{2}s \frac{s}{2} - \frac{ps}{2l} \frac{s}{2} \frac{s}{3} = \dots$

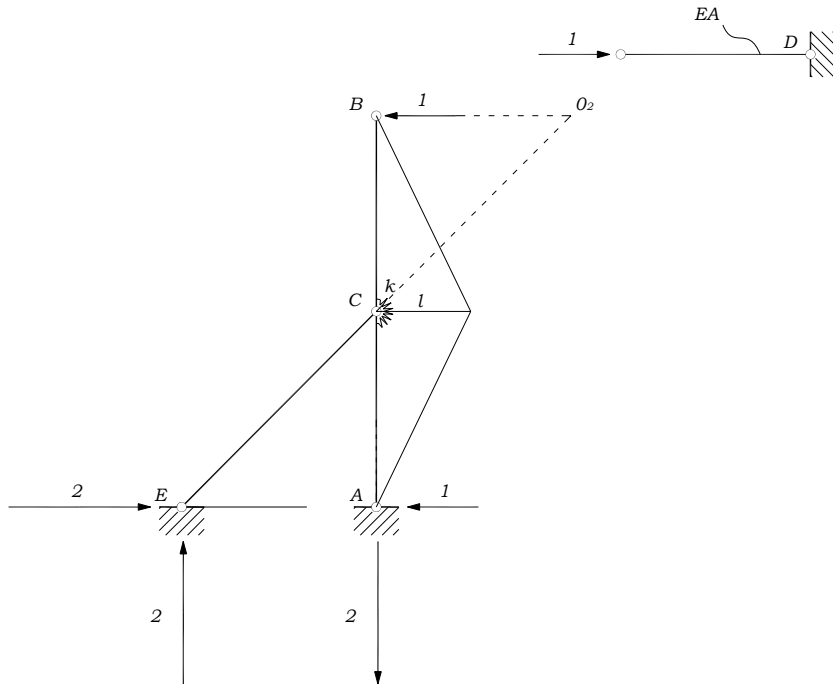
Tratto CA:

$$\dots = -\frac{pl^2}{12} + \frac{5}{12}pls - \frac{ps^2}{4} - \frac{ps^3}{12l}$$

Nota: $M_{CA}(l) = -\frac{pl^2}{12} + \frac{5}{12}pl^2 - \frac{pl^2}{4} - \frac{pl^3}{12l} = 0$

$$s \in [0, l]$$

Sistema “1”



Calcolo delle reazioni vincolari:

$$\begin{cases} R_{EY} + R_{AY} = 0 \\ R_{EX} + R_{AX} - 1 = 0 \\ -R_{EX}l + R_{EY}l = 0 \\ R_{AX}2l - R_{AY}l = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} R_{AX} = -1 \\ R_{AY} = -2 \\ R_{EX} = 2 \\ R_{EY} = 2 \end{cases}$$

Caratteristiche della sollecitazione:

$$\text{Tratto BC:} \quad M_{BC}(s) = -s \quad s \in [0, l]$$

dove inoltre: $T_C = -1$ e $M_C = M_K = -l$

$$\text{Tratto CA:} \quad M_{CA}(s) = -l - 1s + 2s = -(l - s) = s - l \quad s \in [0, l]$$

Coefficienti di Muller-Breslau:

Coefficiente η_{10} :

$$\eta_{10}^{BC} = \int_0^l \left(-\frac{ps^3}{12l} \right) (-s) \frac{ds}{EJ} = \left[\frac{ps^5}{60EJl} \right]_0^l = \frac{pl^4}{60EJ}$$

$$\eta_{10}^{CA} = \int_0^l \left(-\frac{pl^2}{12} + \frac{5pls}{12} - \frac{ps^2}{4} - \frac{ps^3}{12l} \right) (s-l) \frac{ds}{EJ} = \dots$$

$$\dots = \int_0^l \left(-\frac{pl^2s}{12} + \frac{5pls^2}{12} - \frac{ps^3}{4} - \frac{ps^4}{12l} \right) \frac{ds}{EJ} - l \int_0^l \left(-\frac{pl^2}{12} + \frac{5pls}{12} - \frac{ps^2}{4} - \frac{ps^3}{12l} \right) \frac{ds}{EJ} = \dots$$

$$\dots = \left[-\frac{pl^2s^2}{24} + \frac{5pls^3}{36} - \frac{ps^4}{16} - \frac{ps^5}{60l} \right]_0^l - l \left[-\frac{pl^2s}{12} + \frac{5pls^2}{24} - \frac{ps^3}{12} - \frac{ps^4}{48l} \right]_0^l = \dots$$

$$\dots = -\frac{pl^4}{24} + \frac{5pl^4}{36} - \frac{pl^4}{16} - \frac{pl^4}{60} + \frac{pl^4}{12} - \frac{5pl^4}{24} + \frac{pl^4}{12} + \frac{pl^4}{48l} = \dots$$

$$\dots = \frac{-30+100-45-12+60-150+60+15}{720} pl^4 = -\frac{pl^4}{360}$$

$$\eta_{10}^K = \left(-\frac{pl^2}{12} \right) (-l) \frac{1}{K} = \frac{pl^3}{12} \frac{l}{EL} = \frac{pl^4}{12EJ}$$

$$\eta_{10} = \frac{pl^4}{60EJ} - \frac{pl^4}{360EJ} + \frac{pl^4}{12EJ} = \frac{6-1+30}{360} \frac{pl^4}{EJ} = \frac{35}{360} \frac{pl^4}{EJ} = \frac{7pl^4}{72EJ}$$

Coefficiente η_{11} :

$$\eta_{11}^{BC} = \int_0^l (-s)^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ} \quad \eta_{11}^{CA} = \int_0^l (s-l)^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ} \quad \eta_{11}^K = (-l)^2 \frac{1}{K} = l^2 \frac{l}{EL} = \frac{l^3}{EJ}$$

$$\eta_{11} = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{l^3}{3EJ} + \frac{l^3}{EJ} = \frac{5l^3}{3EJ}$$

Coefficiente η_1

$$\eta_1 = - \left(\frac{Xl}{EA} \right) = - \frac{Xl^3}{10EJ}$$

Incognita iperstatica:

$$\frac{7pl^4}{72EJ} + \frac{5l^3}{3EJ} X = - \frac{Xl^3}{10EJ}$$

$$X = - \frac{\frac{7pl^4}{72EJ}}{\frac{5l^3}{3EJ} + \frac{Xl^3}{10EJ}} = - \frac{35}{636} pl$$

Punto 2)

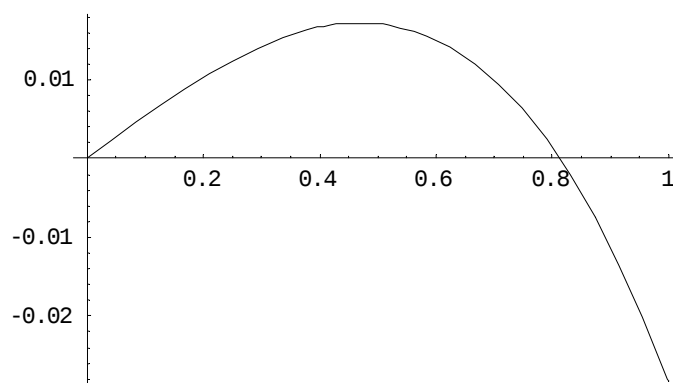
Calcolare il diagramma del momento nei tratti BC e CA:

$$M_{BC}(s) = -\frac{ps^3}{12l} + X(-s) = -\frac{ps^3}{12l} + \frac{35}{636} pls$$

Tratto BC: $M_{\max} = 0.0172129 pl^2$ per $s = 0.469176l$ $s \in [0, l]$

$$M_{\min} = -0.0283019 pl^2 \text{ per } s = l$$

Ordinata $\frac{M}{pl^2}$



ascissa $\frac{s}{l}$

$$M_{CA}(s) = -\frac{pl^2}{12} + \frac{5}{12}pls - \frac{ps^2}{4} - \frac{ps^3}{12l} + X(s-l)$$

Tratto CA:
$$\dots = -\frac{pl^2}{12} + \frac{5}{12}pls - \frac{ps^2}{4} - \frac{ps^3}{12l} - \frac{35}{636}pl(s-l) \quad s \in [0, l]$$

$$M_{\max} = 0.0811859 pl^2 \quad \text{per } s = 0.56414l$$

$$M_{\min} = -0.0283019 pl^2 \quad \text{per } s = l$$

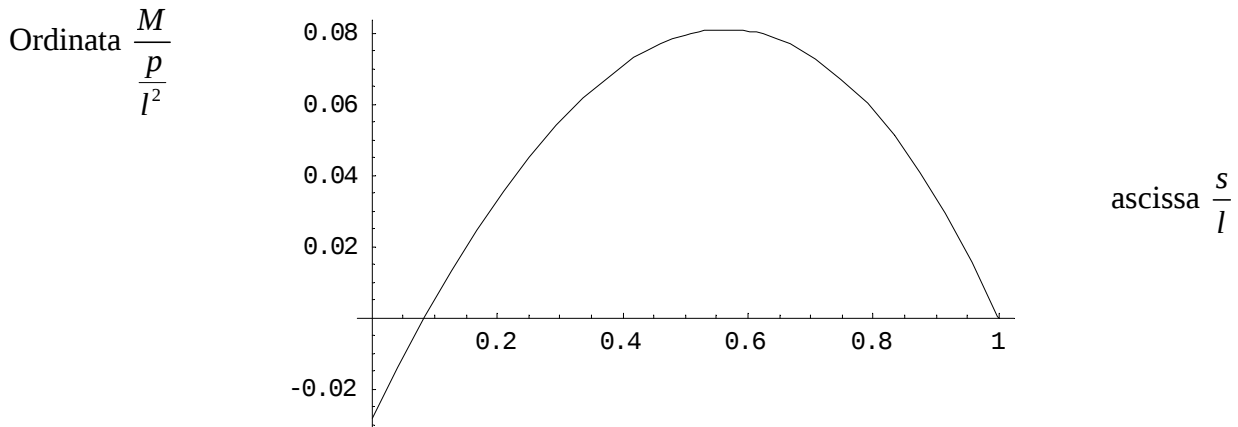
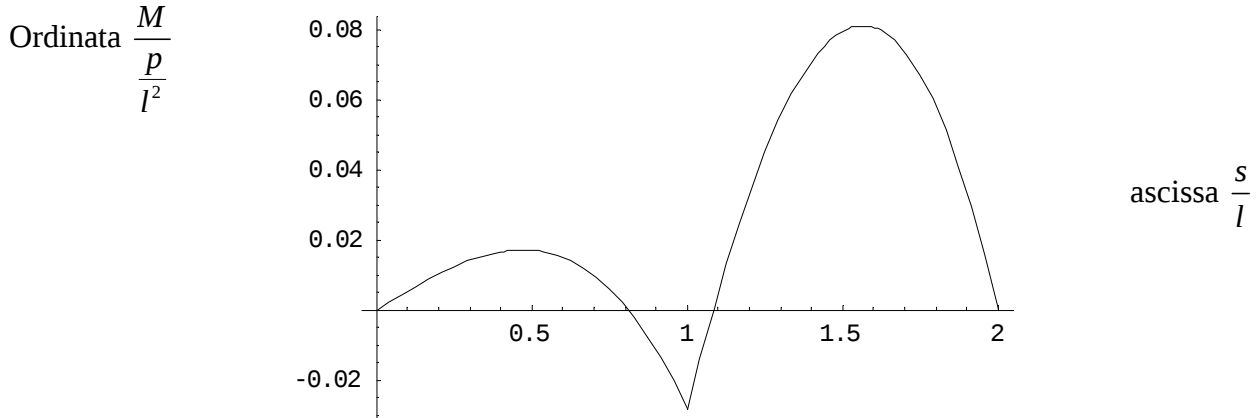


Diagramma Complessivo ($s \in [0, 2l]$)



Punto 3)

Determinare le espressioni dello spostamento nel tratto BC con la linea elastica:

Equazione generale:

$$-EJv''(s) = M_{BC}(s) \Rightarrow v(s) = -\frac{ps^5}{240l} - \frac{ps^4}{48l} + \frac{1151}{1908}ps^3 - \frac{3}{212}pl^2s^2 + C_1s + C_2$$

Condizioni al contorno:

$$v(0) = N \frac{l}{EA} = \left(\frac{35}{636} pl \right) \frac{l}{EA} \quad \text{Spostamento in B}$$

$$v(l) = 0 \quad \text{Spostamento in C}$$