

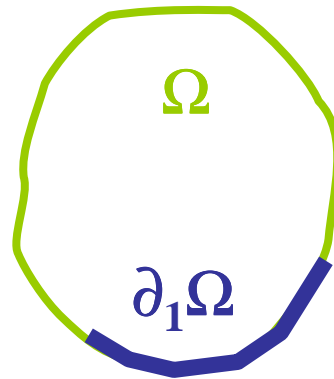
# Introduzione alla teoria della frattura di G. Francfort e J.J. Marigo

Gianpietro DEL PIERO

Facoltà di Ingegneria, Pisa, 13-6-2006

# Teoria **variazionale** della frattura

- Griffith (1920), Barenbatt (1959)
- Francfort & Marigo (1998)
- Dal Maso & Toader (2001)



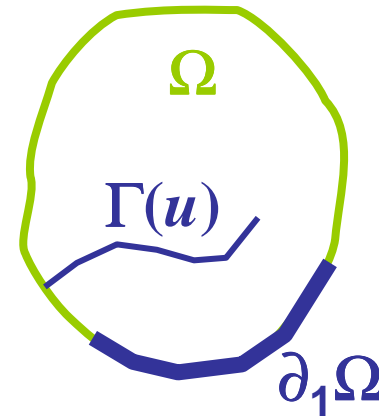
Dato un corpo elastico  $\Omega$ , vincolato su  $\partial_1 \Omega$   
e **inizialmente integro**,

Minimizzare

$$E(u) = \int_{\Omega} w(\nabla u(x)) dx + \gamma \text{area}(\Gamma(u))$$

sotto la condizione

$$u = u_1 \text{ su } \partial_1 \Omega$$



- $w$  densità di energia elastica,
- $u$  spostamento
- $\gamma$  densità di energia di frattura,
- $\Gamma(u)$  insieme di frattura di  $u$ .

Soluzione del problema **monodimensionale**:  
minimizzare

$$E(u) = \int_0^l w(u'(x)) dx + \gamma \# [u]_k$$

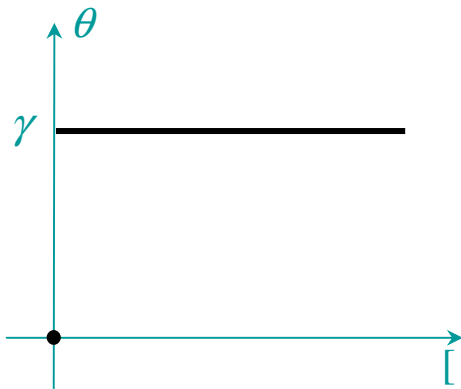
sotto le condizioni

$$\int_0^l u'(x) dx + \sum_k [u]_k = \beta l, \quad [u]_k \geq 0.$$

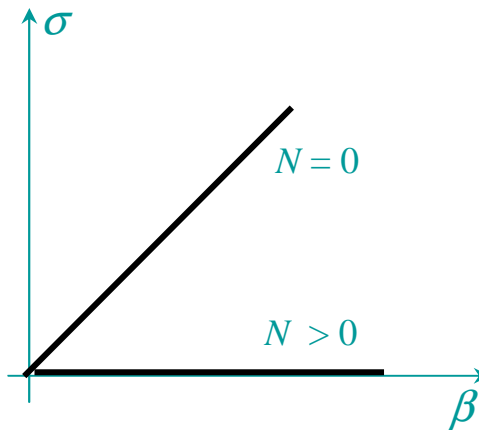
condizione necessaria di stazionarietà (equilibrio):

$$w'(u'(x)) = \text{cost.}$$

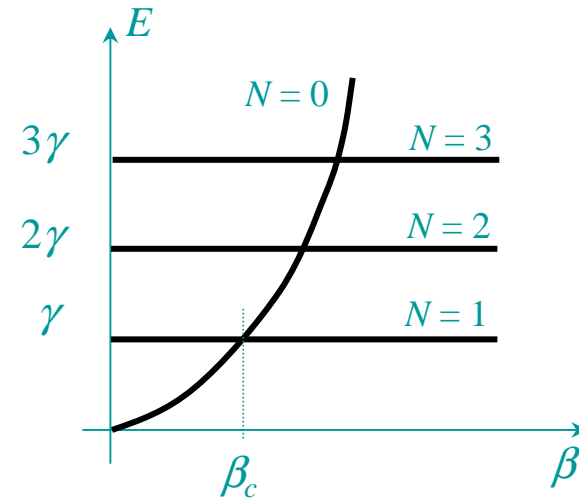
energia  
di frattura



curve di risposta  
tensione-allungamento

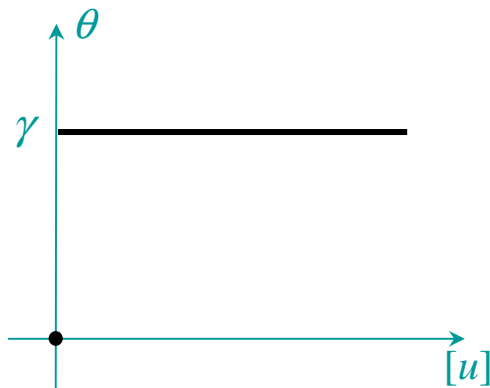


curve di risposta  
energia-allungamento

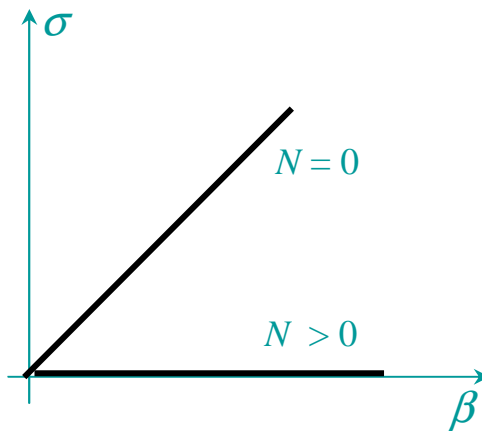


Per  $\beta = \beta_c$  il minimo globale passa dal ramo  $N = 0$  al ramo  $N = 1$ .  
Si può concludere che  $\beta_c$  è l'allungamento di rottura?

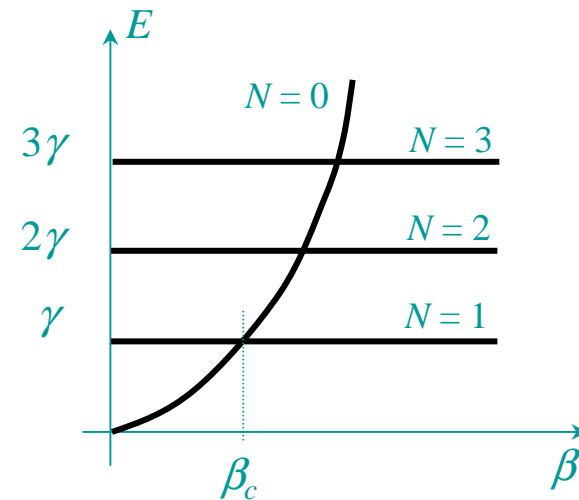
energia  
di frattura



curve di risposta  
tensione-allungamento



curve di risposta  
energia-allungamento



Per  $\beta = \beta_c$  il minimo globale passa dal ramo  $N = 0$  al ramo  $N = 1$ .  
Si può concludere che  $\beta_c$  è l'allungamento di rottura?

## Problema evolutivo (Francfort & Marigo, 1998)

Dati  $\partial_1\Omega$ ,  $\Gamma(t)$ ,  $t \mapsto u_1(t)$

minimizzare  $E(u)$  sotto le condizioni

$u = u_1(t)$  su  $\partial_1\Omega$ ,  $\Gamma \supset \Gamma(t)$

- La  $\Gamma \supset \Gamma(t)$  è una condizione di **irreversibilità della frattura**
- La soluzione dipende dall'evoluzione di  $\Gamma$  al crescere di  $t$
- La ricerca, ad ogni  $t$ , del minimo **globale** impedisce di caratterizzare il problema come **problema incrementale**

Differenza tra le risposte del problema evolutivo e del problema incrementale (caso monodimensionale)

problema evolutivo

$$E(u_t) = \frac{1}{2} kl u_t'^2 + \gamma \#[u_t]_k = \min,$$
$$u_t(l) = tl, \quad \#[u_0]_k = 0.$$

problema incrementale

$$E(u_t + \eta) = \frac{1}{2} kl (u_t' + \eta)^2 + \gamma \#[u_t + \eta]_k = \min,$$
$$\eta(l) = \delta t l, \quad \#[u_t]_k = 0.$$

(e quindi,  $\eta$  piccolo)



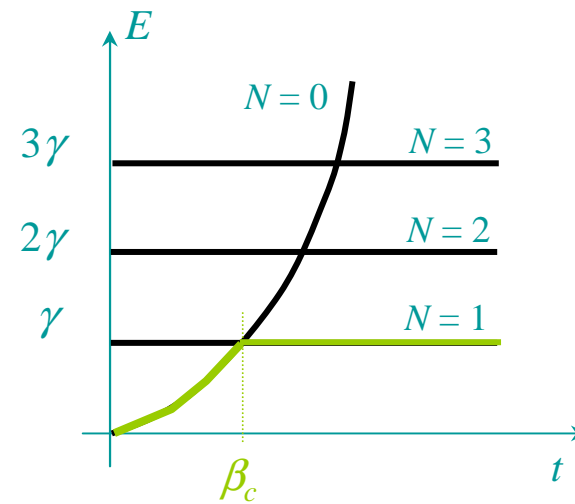
soluzione del problema evolutivo

per  $\frac{1}{2}kl t^2 < \gamma$  ( $t < \beta_c = (2\gamma / kl)$ )

$$u_t(x) = tx, \quad \#[u_t]_k = 0,$$

per  $t > \beta_c$

$$u'_t(x) = 0, \quad \#[u_t]_k = 1.$$



soluzione del problema incrementale

$$u_t(x) = tx, \quad \#[u_t]_k = 0 \text{ per ogni } t$$

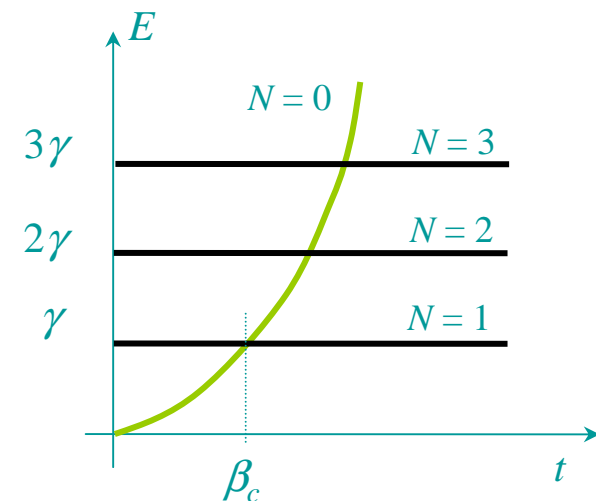
infatti, essendo

$$\begin{aligned} E(u_t + \eta) &= \frac{1}{2} k (u' + \eta')^2 + \gamma \#[u_t + \eta]_k \\ &= E(u_t) + kl u' \eta' + \frac{1}{2} kl \eta'^2 + \gamma \#[\eta]_k, \end{aligned}$$

e poiché  $\eta' l + \sum_k [\eta]_k = l \delta t$ ,

non si ha mai che  $kl u' \eta' + \frac{1}{2} kl \eta'^2 > \gamma$ .

La soluzione segue la curva  
dei minimi locali  $N=0$



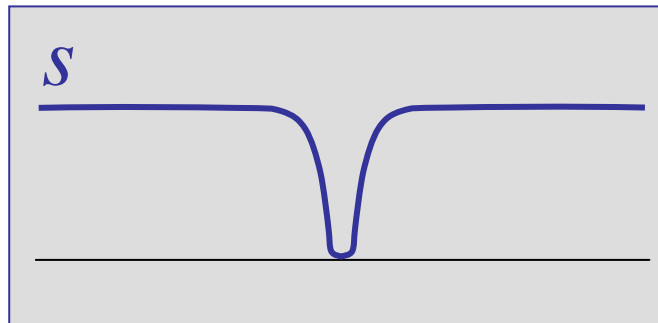
# Risoluzione numerica del problema evolutivo tridimensionale (Ambrosio & Tortorelli, 1990)

Fissato  $\varepsilon > 0$ , si approssimi  $E(u)$  col funzionale

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, s) = \int_{\Omega} (s^2(x) + k_\varepsilon) w(\nabla u(x)) dx + \frac{1}{2} \gamma \int_{\Omega} (\varepsilon |\nabla s(x)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - s(x))^2) dx$$

$$k_\varepsilon = o(\varepsilon), s(x) \in [0, 1],$$

$s = 1 \rightarrow$  no frattura,  $s = 0 \rightarrow$  frattura



Si dimostra la  $\Gamma$ -convergenza della famiglia  $\varepsilon \mapsto \mathcal{E}_\varepsilon$  ad  $E$ :

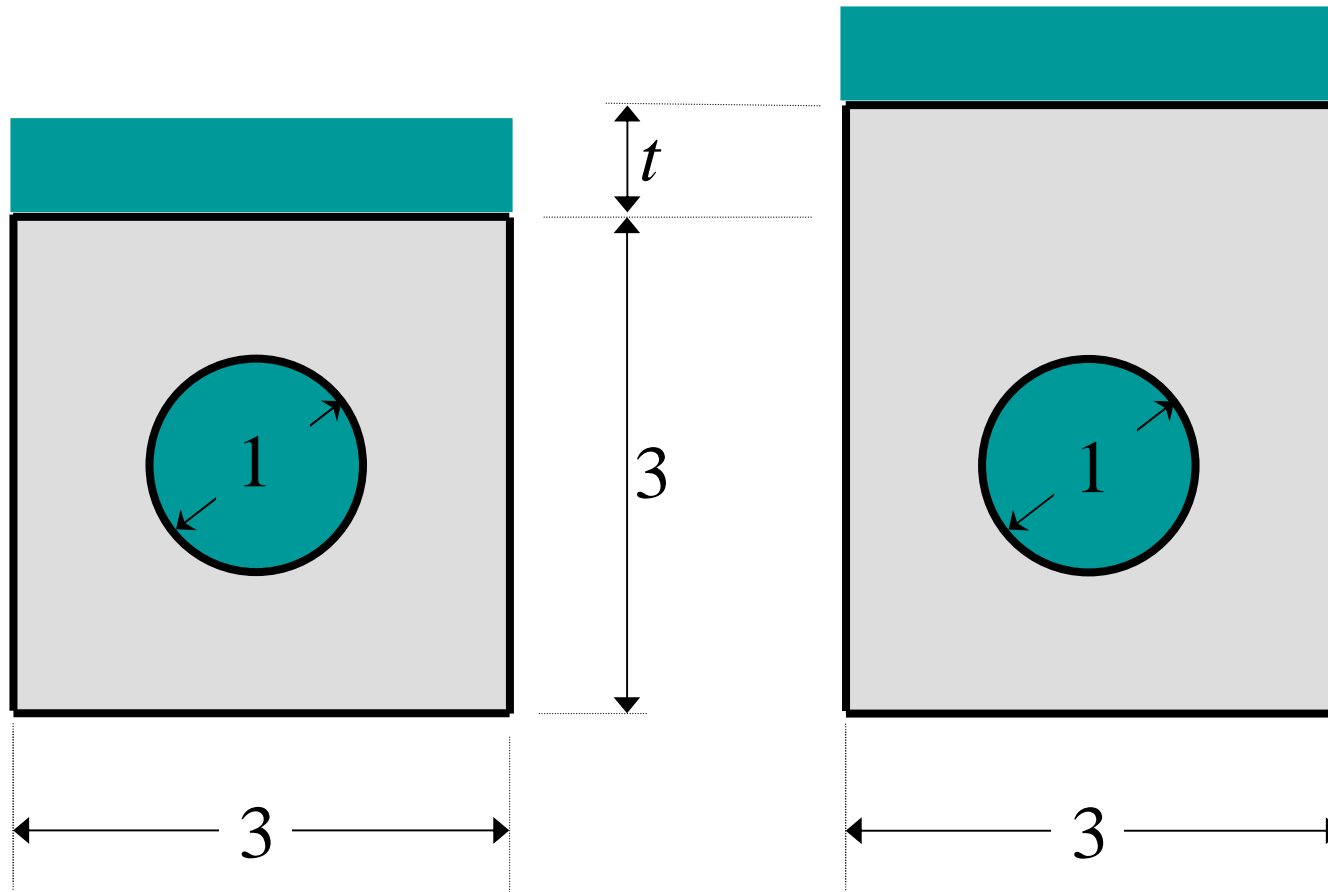
$$\begin{aligned} \forall u_\varepsilon \rightarrow u, \forall s_\varepsilon \rightarrow s, & \quad \liminf \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, s_\varepsilon) \geq E(u, s), \\ \exists u_\varepsilon \rightarrow u, s_\varepsilon \rightarrow s : & \quad \lim \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, s_\varepsilon) = E(u, s), \end{aligned}$$

Risultati di simulazioni numeriche per il **materiale di Blatz**  
(D., Lancioni & March, 2006)

$$W(F) = \alpha F \cdot F + \varphi(\det F)$$

$\alpha > 0$ ,  $\varphi$  convessa positiva

# Simulazione I



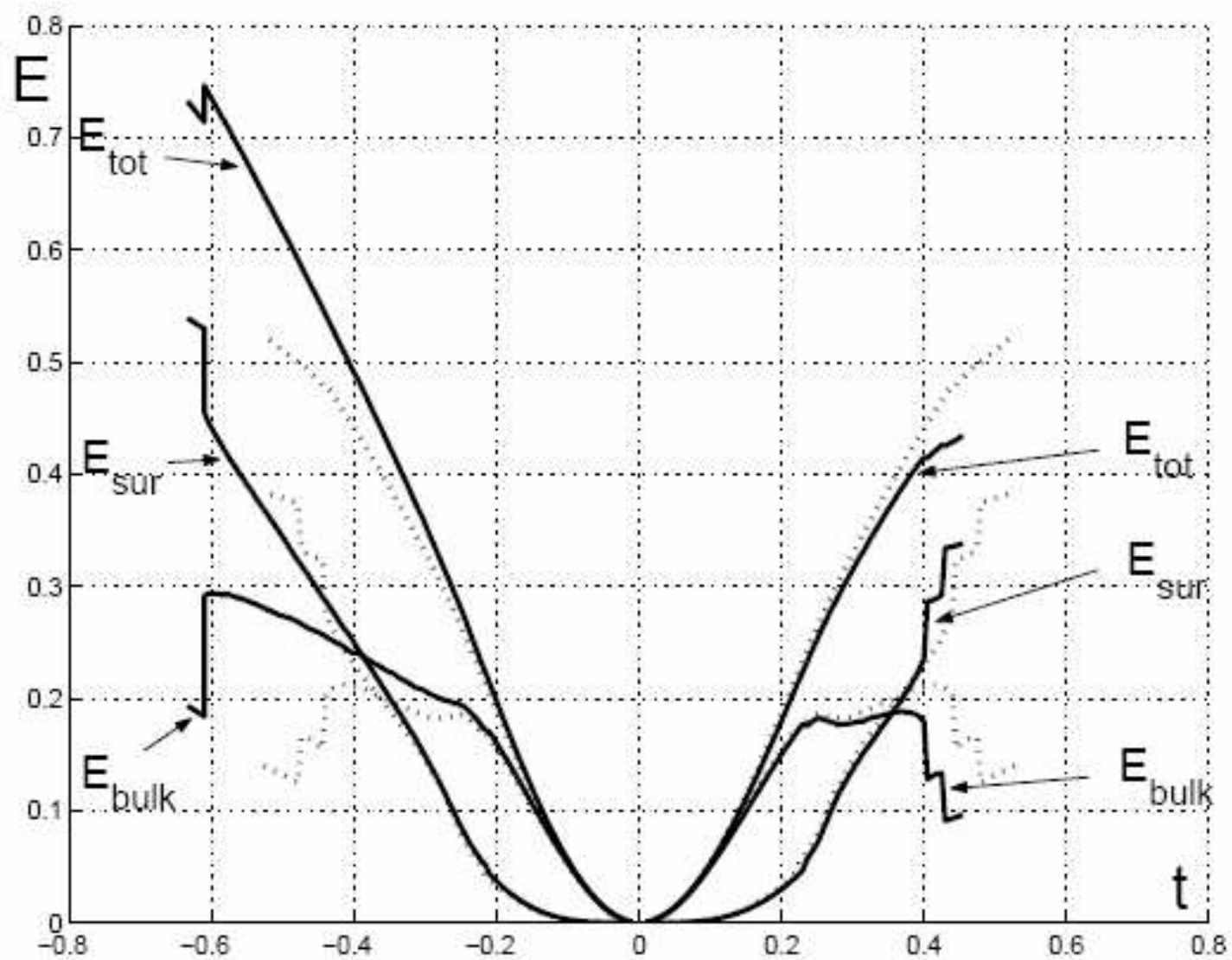


Figure 1: Simulation 1. Bulk, surface and total energies as functions of  $t$ : solid line  $\equiv$  neo-hookean material; dotted line  $\equiv$  linearly elastic material ( $[E] = \cdot 10^6 \text{ N cm}$ ).

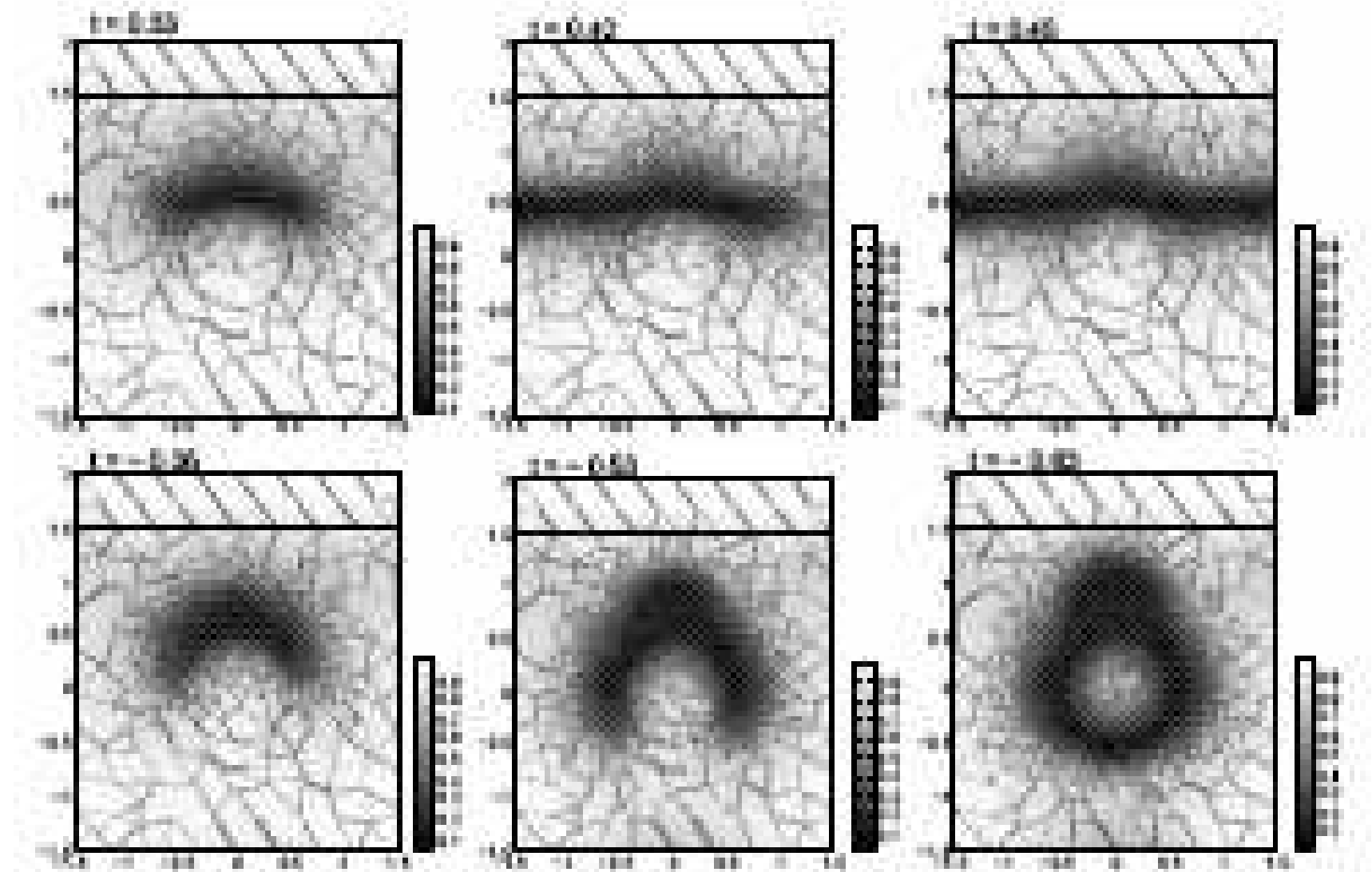


Figure 6: Simulation 1. Crack field  $s$  in  $\Omega_1$  at different values of  $t$ .

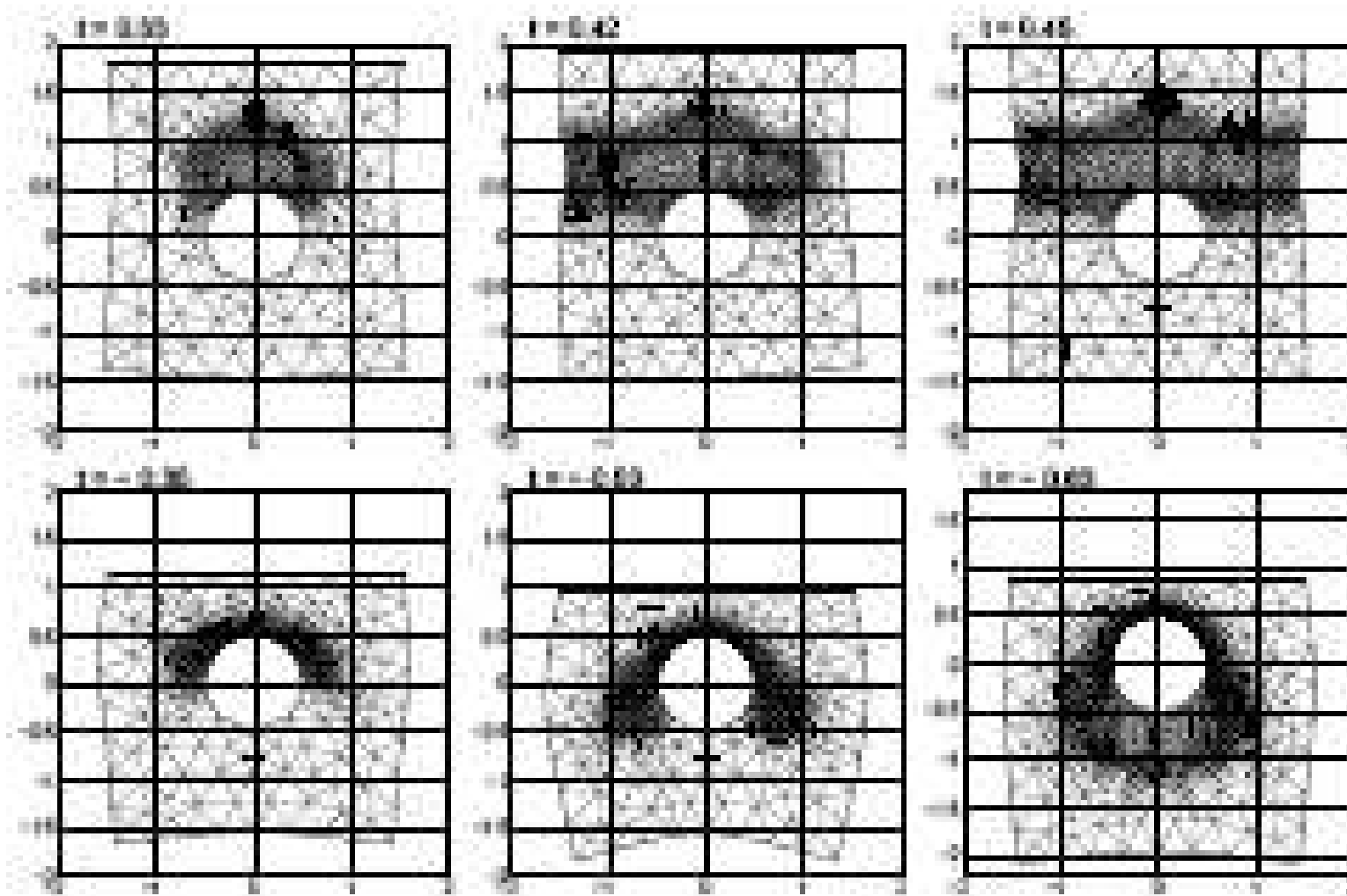
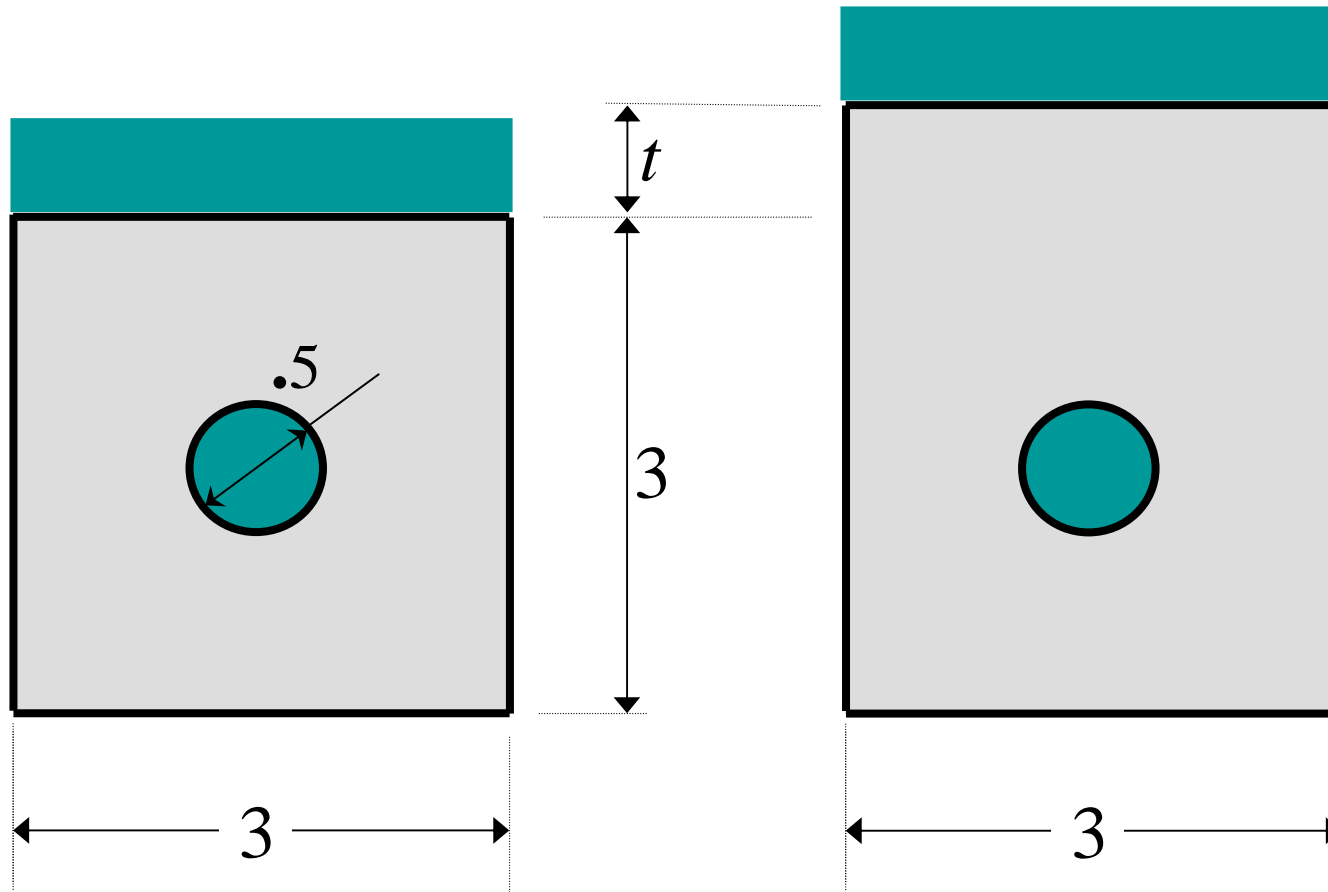


Figure 6: Simulation 1. Deformed mesh at different values of  $t$ .



# Simulazione II



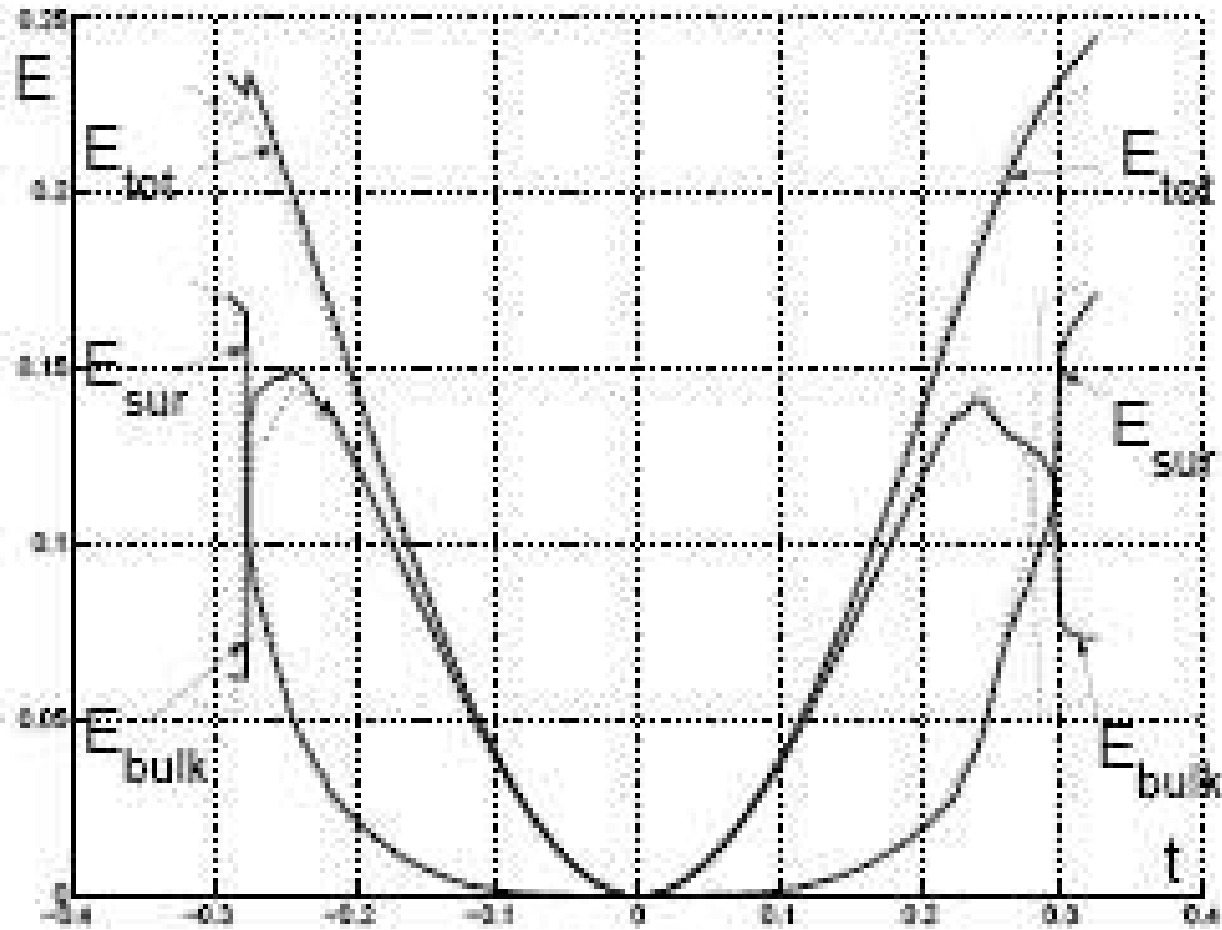


Figure 8: Simulation 2. Bulk, surface and total energies as functions of  $t$ : solid line = non-Hookean material; dotted line = linearly elastic material ( $E = 10^4 N$ ).

praticamente simmetrica a trazione-compressione

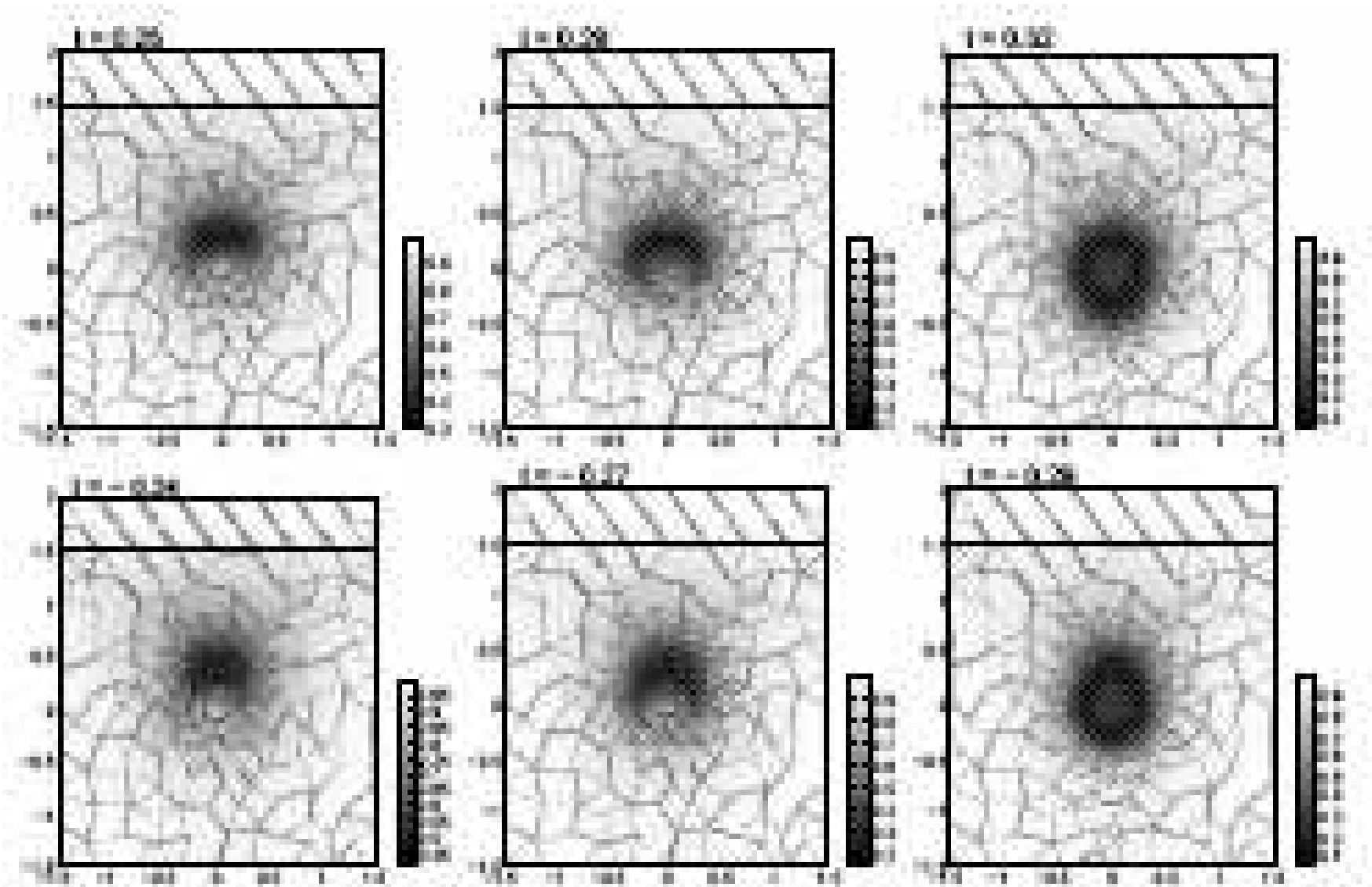
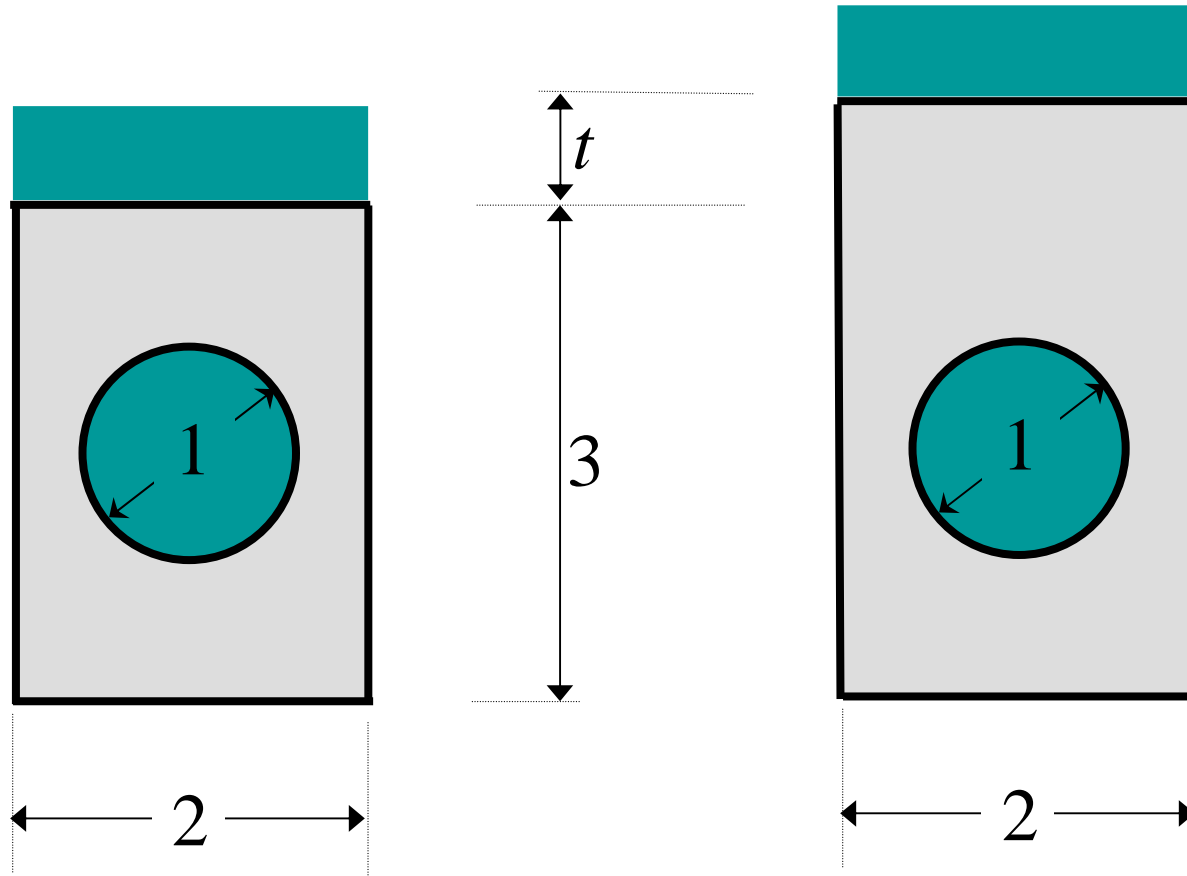


Figure 10: Simulation 2: Crack field  $s$  in  $\Omega_f$  at different values of  $t$ .

# Simulazione III



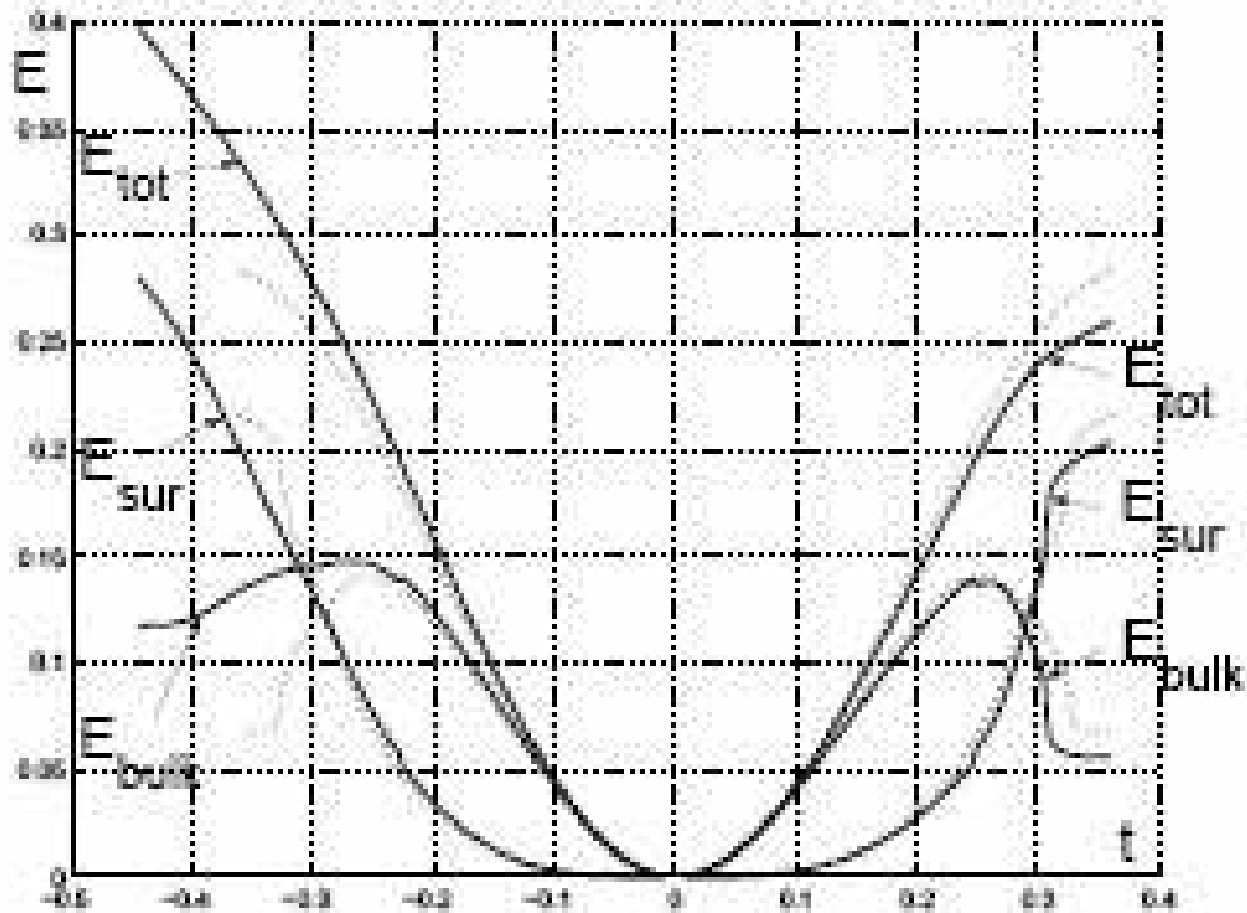


Figure 4: Simulation 3. Bulk, surface and total energies as functions of  $t$ : solid line = neo-hookean material; dotted line = linearly elastic material ( $|E| = \cdot 10^8 \text{ N cm}$ ).

transizione bulk-surface più graduale

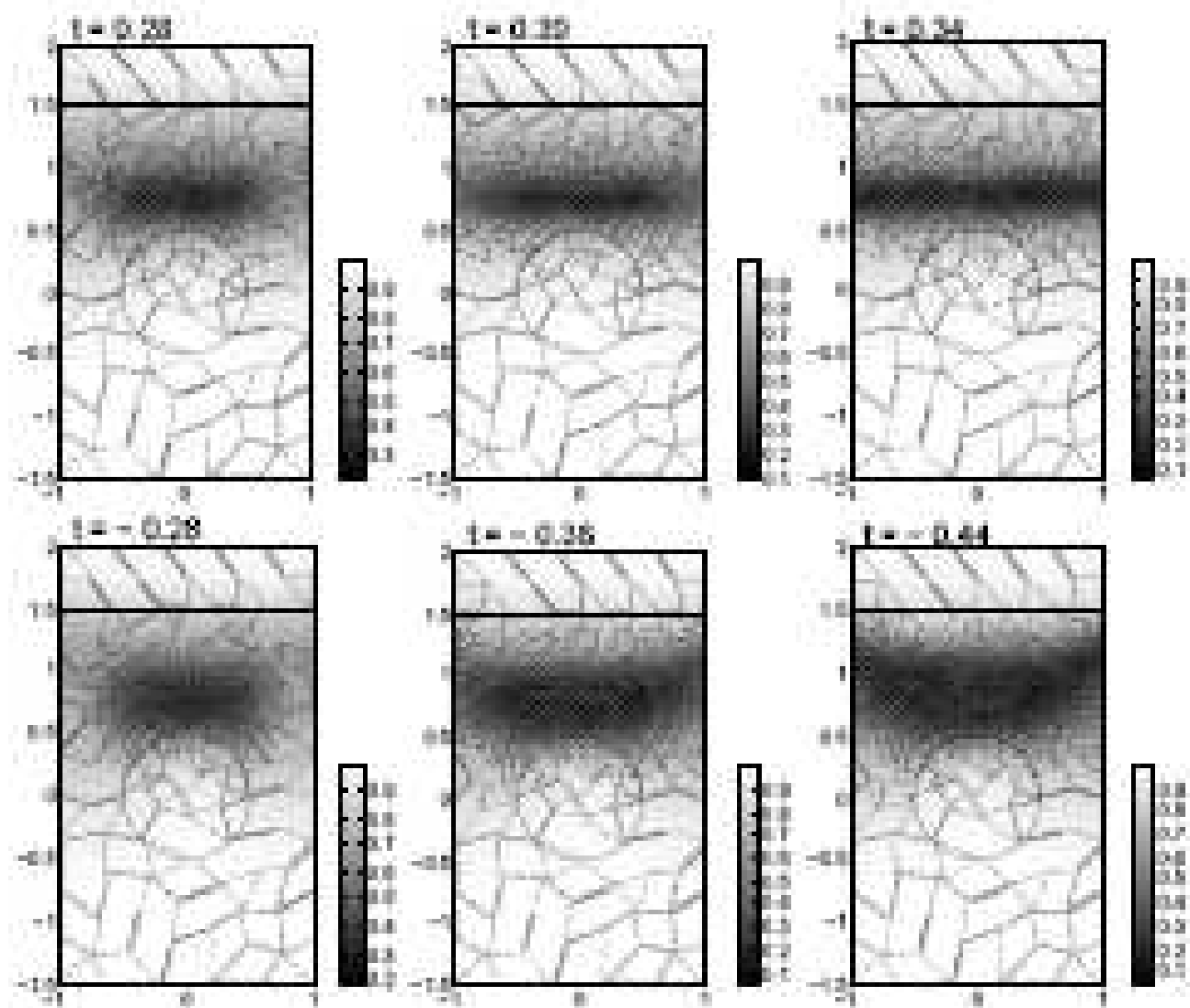


Figure 14: Simulation 3. Crack field  $s$  in  $\Omega_0$  at different values of  $\tau$ .

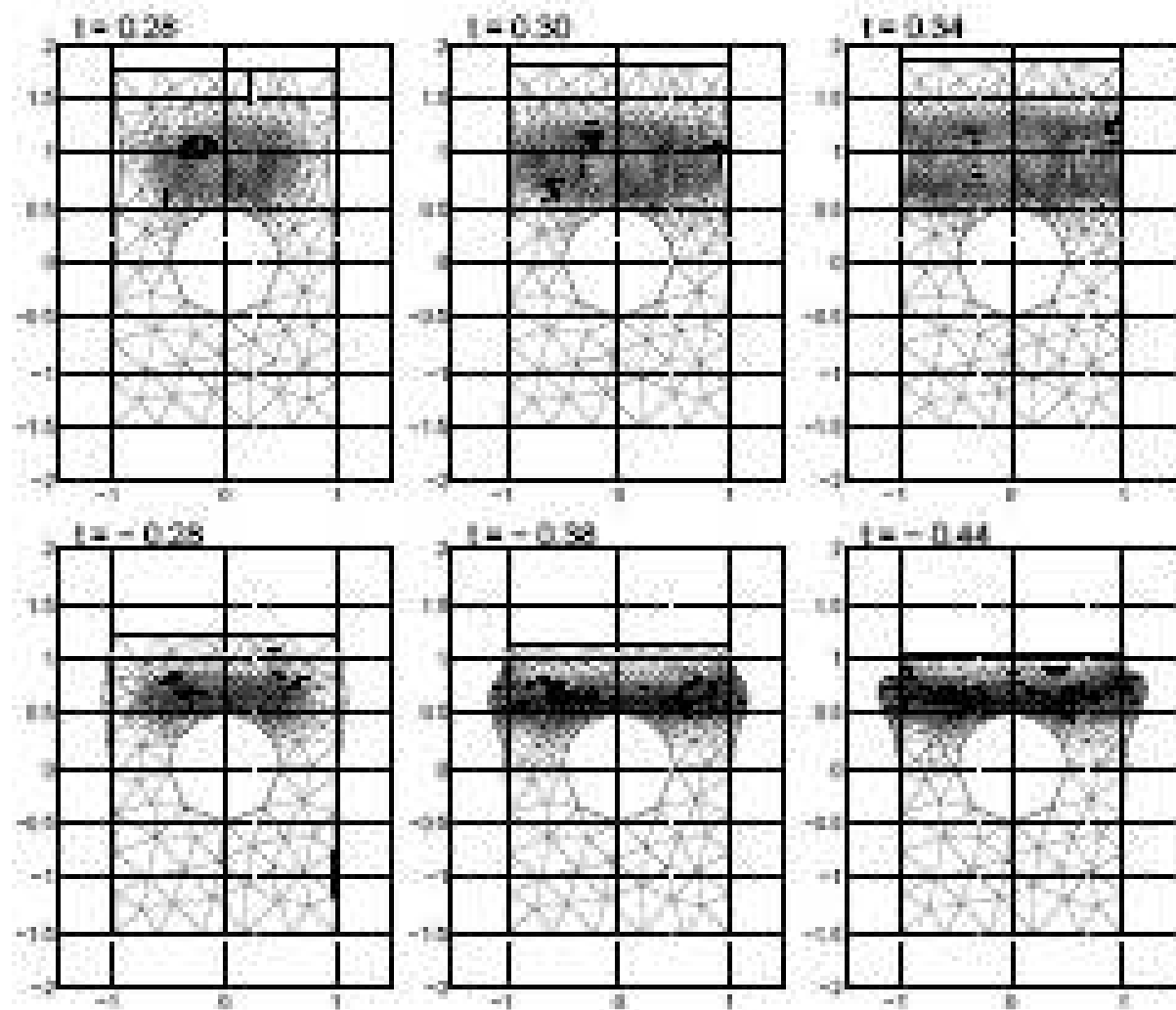


Figure 15: Simulation 3. Deformed mesh at different values of  $t$ .

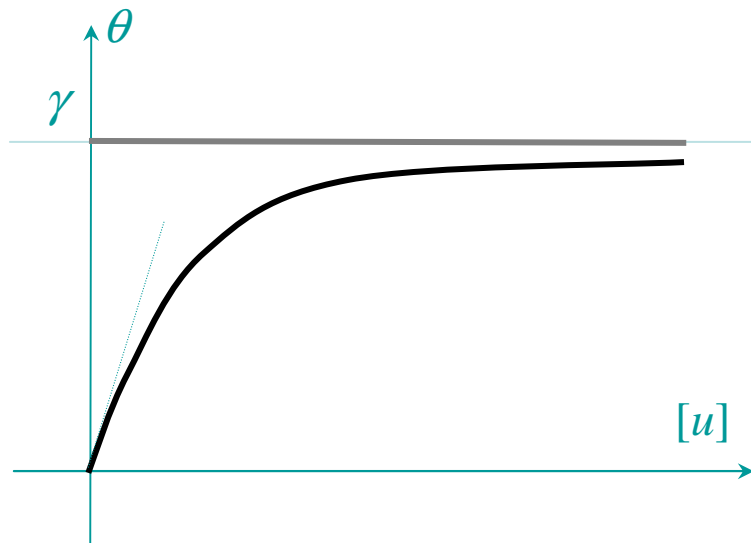
suggerisce rottura a compressione per dilatazione trasversale

Ma perché regolarizzare il procedimento numerico,  
e non l'espressione dell'energia?

Regolarizzazione **alla Barenblatt**

$$E(u) = \int_{\Omega} w(\nabla u(x)) dx + \int_{\Gamma} \theta([u](x)) da$$

$\theta$  = energia coesiva



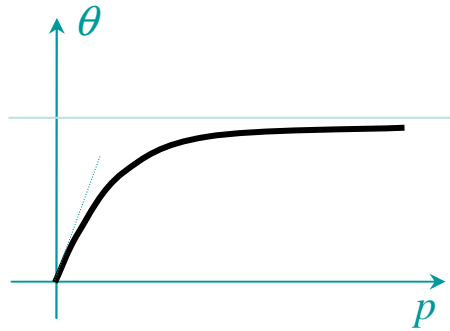


## equazioni fondamentali

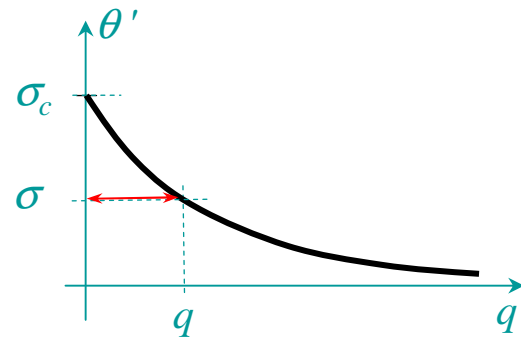
equilibrio:  $\sigma = \theta'(q) = w'(e), \quad \sigma \leq \sigma_c$

condizione al contorno:  $e + l^{-1}q = \beta$

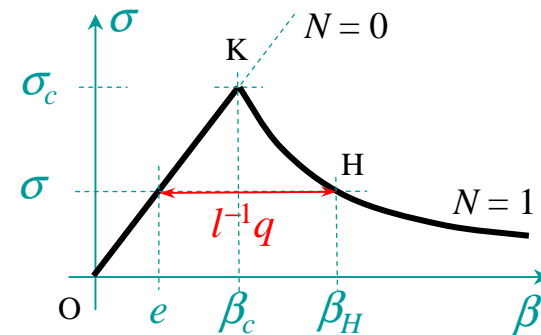
energia coesiva  
di Barenblatt



derivata  
di  $\theta$

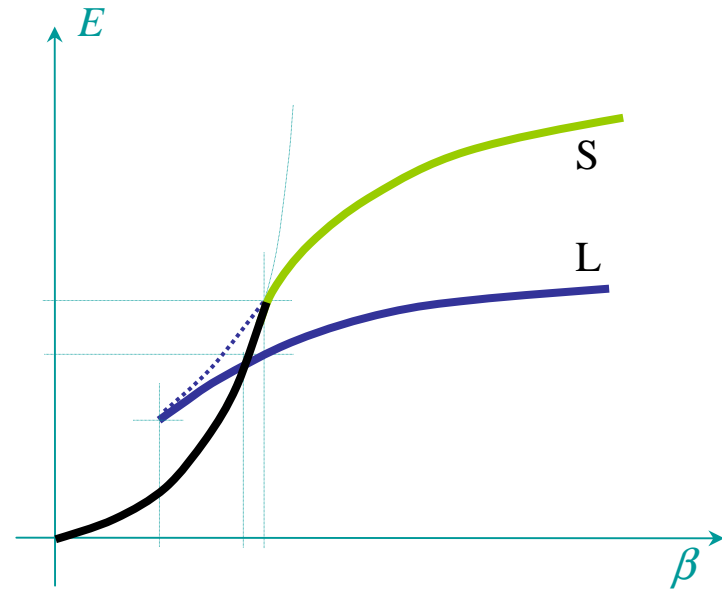
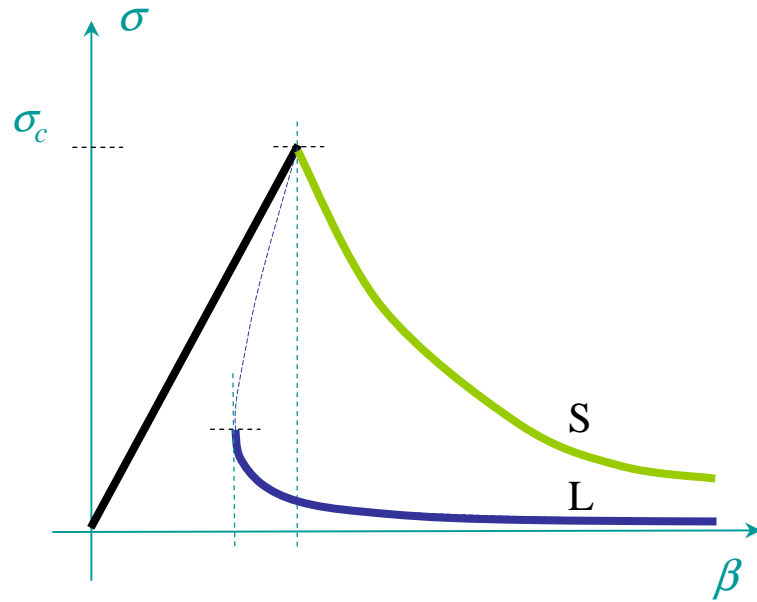


curve di risposta  
tensione-allungamento



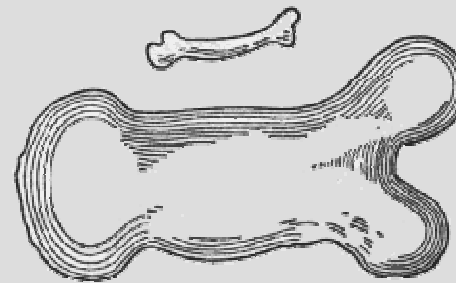
la presenza del fattore  $l^{-1}$  nella condizione al contorno  $e + l^{-1}q = \beta$  permette di cogliere l'effetto scala.

# effetto scala



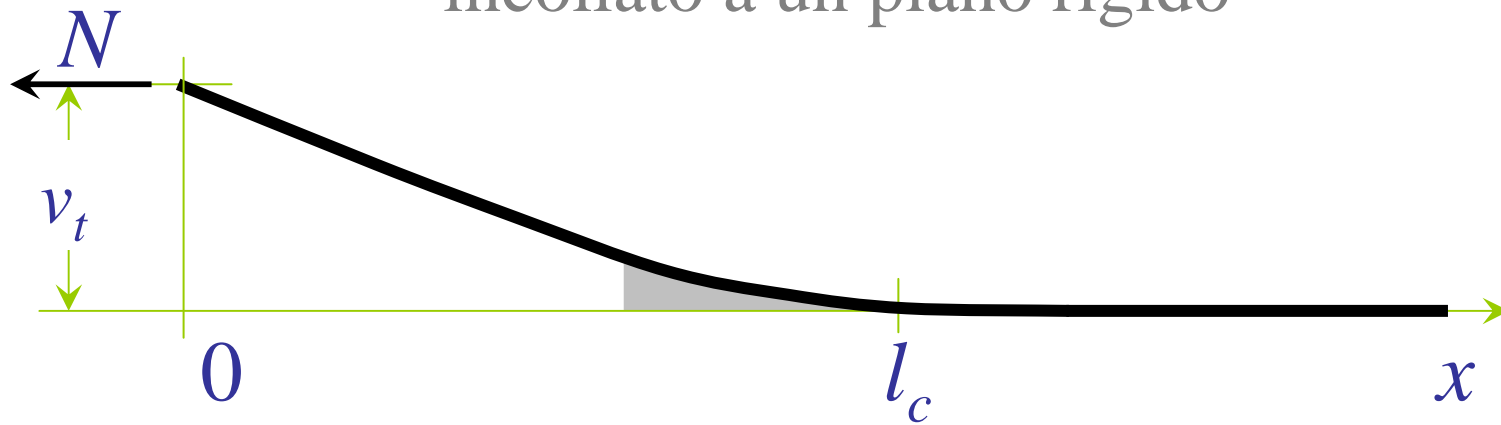
S = **small**

L = **large**



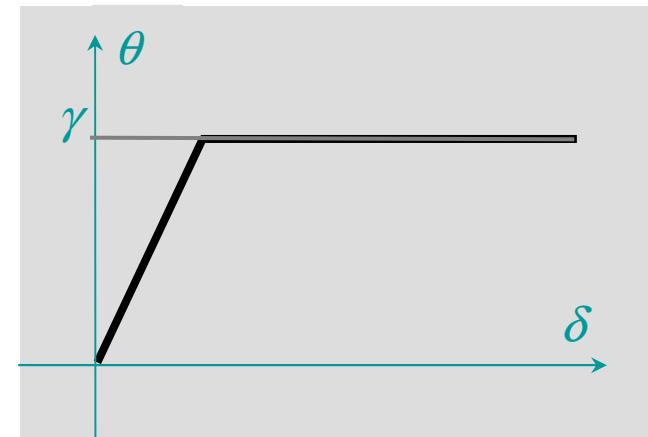
# Fatica

problema dello scollamento di un filo  
incollato a un piano rigido



$v_t \in (0, v_m)$  oscillante

$\theta =$  energia coesiva di Dugdale



minimizzare  $E(u_t) = \frac{1}{2} N \int_0^{\infty} u_t'^2(x) dx + \int_0^{\infty} \theta(\delta_t(x)) dx$

sotto le condizioni  $u_t \geq 0$ ,  $u_t(0) = v_t$

con:

$$\delta_t(x) = \int_0^t (\dot{u}(\tau))^+ d\tau$$

apertura cumulata in  $(x, t)$ ,  
( $a^+$  = parte positiva di  $a$ )

equazioni di Eulero:

$$N u''(x) = d\theta(\delta(x)) / d\delta$$

## Soluzione per $\theta$ di Griffith

$$u'' = \theta' = 0$$

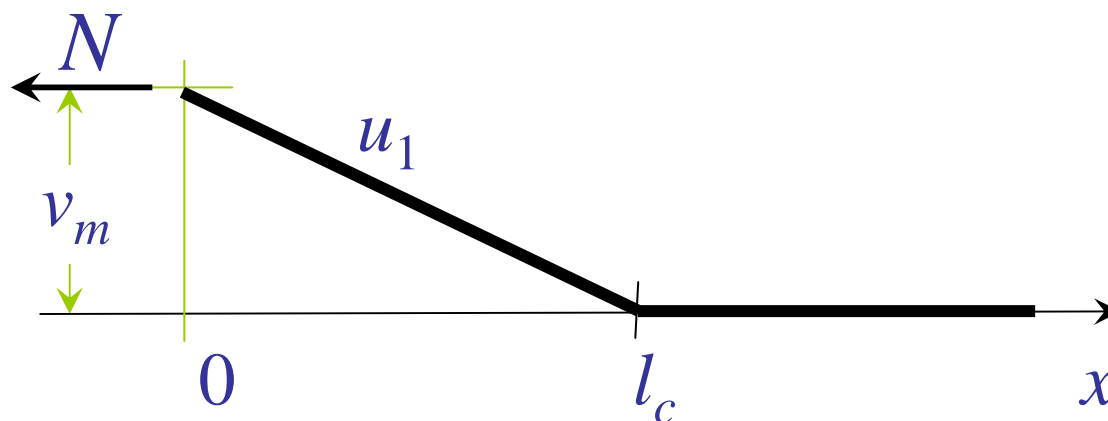
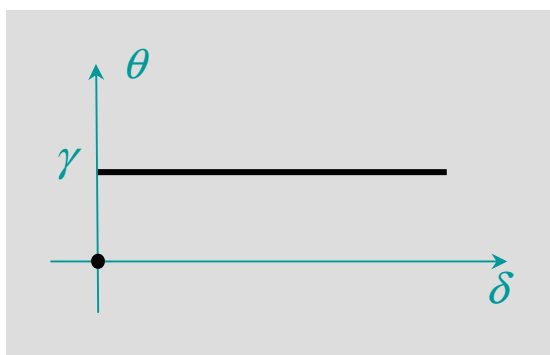
due tratti rettilinei, raccordati in  $l_c$

determinazione di  $l_c$  dopo il primo carico

$$\frac{1}{2} Nl \frac{v_m^2}{l^2} \leq \frac{1}{2} Nl \frac{v_m^2}{(l \pm \varepsilon)^2} \pm \gamma \varepsilon \Rightarrow N \frac{v_m^2}{l_c^2} = \gamma$$

$l_c$  non varia ai carichi-scarichi successivi

la  $\theta$  di Griffith non riproduce la fatica



## Soluzione per $\theta$ di Dugdale

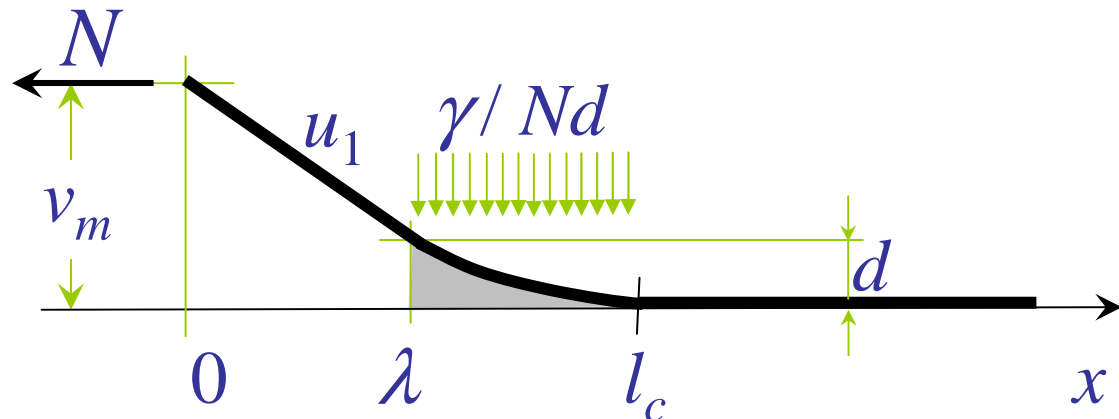
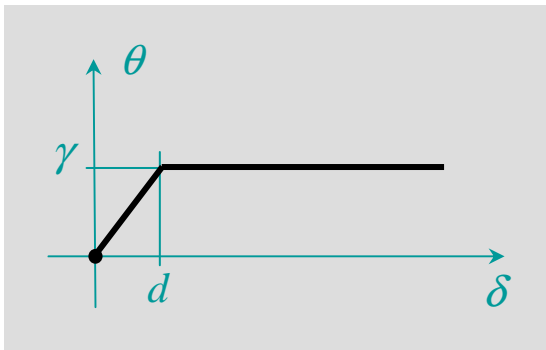
$$Nu'' = \begin{cases} 0 & \text{in } (0, \lambda) \\ \gamma/d & \text{in } (\lambda, l_c) \end{cases}$$

primo ciclo di carico:  $\delta_t(x) = u_t(x)$

due tratti rettilinei separati da un tratto parabolico su cui agiscono forze distribuite  $\gamma/N\delta$

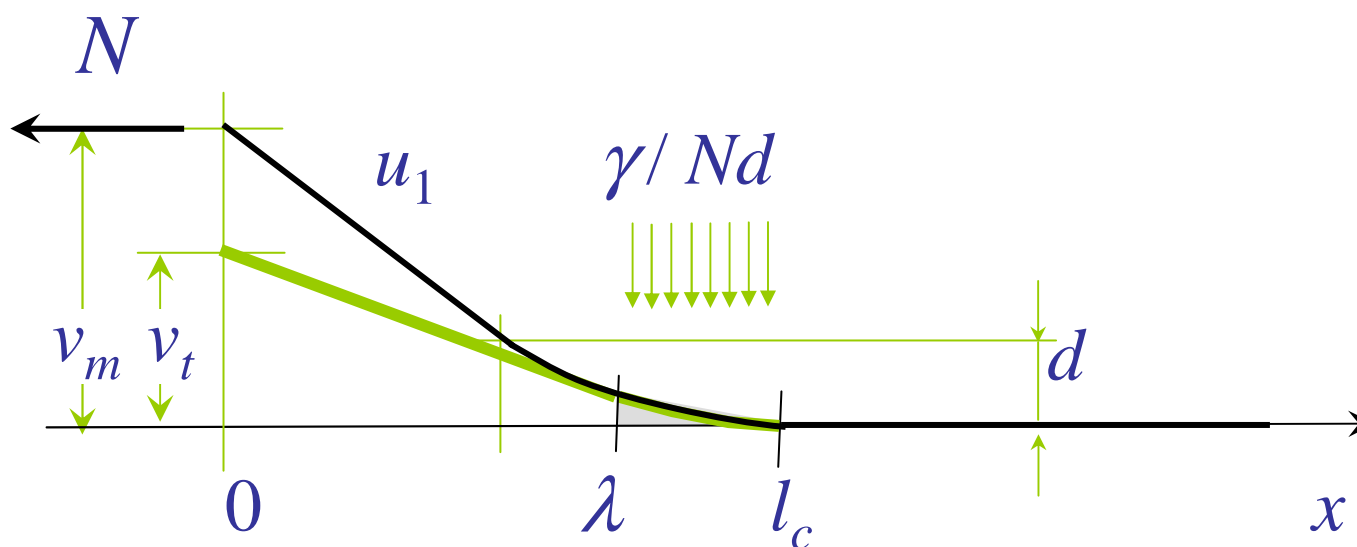
determinazione di  $\lambda, l_c$

$$u(0) = v_m, \quad u(\lambda) = d, \quad u(l_c) = u'(l_c) = 0,$$



## primo ciclo di scarico

al ridursi di  $v_t$  la zona parabolica si accorcia,  
fino a scomparire per  $v_t = 0$



## cicli di carico successivi

si ha un aumento progressivo e **illimitato** di  $\lambda$  e di  $l_c$

un vantaggio fondamentale di questa tecnica di analisi della fatica è che **non** è ristretta al caso di carico ciclico

Jaubert & Marigo (2006) hanno anche studiato l'effetto di una **sollecitazione anomala** all'interno di un carico ciclico



**THE END**