

Capitolo 5

■ Teoria classica dei laminati

| | |
|----------------------------------------------------|-----|
| □ Introduzione | 287 |
| □ Il modello meccanico | 291 |
| □ La legge fondamentale dei laminati | 298 |
| □ I tensori normalizzati | 317 |
| □ Inversione della legge fondamentale dei laminati | 321 |
| □ Laminati accoppiati e disaccoppiati | 325 |
| □ I moduli elastici del monostrato equivalente | 330 |
| □ Il comportamento igro-termo-elastico | 334 |
| □ Il caso dei laminati a strati identici | 350 |
| □ L'utilizzo del metodo polare | 355 |



Introduzione

- Le lamine in composito non sono mai utilizzate da sole, ma sotto forma di laminati, ossia in piastre ottenute sovrapponendo più strati, generalmente identici.
- Le caratteristiche meccaniche di rigidità e resistenza degli strati comunemente impiegati rendono infatti impossibile l'utilizzo di lamine singole, e questo principalmente a causa di:
 - una troppo forte anisotropia della risposta elastica, almeno per le lamine a rinforzo unidirezionale;
 - una troppo piccola resistenza in direzione trasversale;
 - un troppo piccolo spessore (≈ 0.125 mm per i preimpregnati in carbonio), che rende da un lato la rigidità, specialmente quella in flessione, troppo piccola e dall'altro un forte pericolo di instabilità a compressione, nelle due direzioni.
- Le lamine vengono dunque utilizzate per creare laminati, sovrapponendo un numero sufficiente di strati, secondo i bisogni progettuali.



Introduzione

- Questa operazione permette di creare delle piastre le cui caratteristiche meccaniche, di rigidezza e resistenza, possono essere oggetto di progettazione.
- In effetti, mentre per una piastra in materiale omogeneo il solo parametro progettuale è lo spessore, una volta scelto il materiale, un laminato ha delle caratteristiche meccaniche finali che dipendono sia da quelle degli strati che lo compongono, sia dal numero di questi strati e soprattutto dalla loro orientazione relativa.
- L'utilizzo di un laminato necessita dunque di una fase progettuale e di verifica.
- La fase progettuale deve comprendere normalmente la progettazione della resistenza e della rigidezza. Bisogna specificare che questo comporta non solo la determinazione di requisiti minimi di resistenza e rigidezza, secondo i bisogni progettuali, ma anche il tipo di risposta elastica (ortotropa, isotropa etc.).
- Un laminato è in definitiva un *materiale complesso completamente da progettare*.

288



Introduzione

- La teoria classica dei laminati risponde a questo scopo; il suo obiettivo è infatti quello di fornire un modello matematico capace di sintetizzare la risposta elastica di un laminato come se questo fosse costituito semplicemente da un solo strato equivalente.
- Si tratta in definitiva, come già anticipato, di un processo di omogeneizzazione, sullo spessore della piastra, delle caratteristiche meccaniche macroscopiche di rigidezza.
- I risultati della teoria classica sono condensati in una legge, che formalizza la risposta elastica della piastra monostrato equivalente del laminato, ed avente lo stesso spessore totale.
- Si deve precisare sin da ora che la teoria classica dei laminati è soltanto un modello matematico, che si basa sulla teoria classica delle piastre inflesse, e che come questa è soggetta a giuste critiche, ancora più importanti nel caso dei laminati per una serie di fattori dipendenti dall'anisotropia e soprattutto dall'eterogeneità (sovrapposizione di strati).

289



Introduzione

- Pur non fornendo tutti i risultati meccanici di rilievo (soprattutto le tensioni e deformazioni fuori piano), essa è utile in fase di progetto, ed è indispensabile nella predizione delle caratteristiche elastiche globali del laminato.
- Nel seguito, viene innanzitutto introdotto il modello meccanico e quindi viene ricavata la legge fondamentale dei laminati.
- In un secondo tempo, si esamina il comportamento igro-termo-elastico, sempre nel quadro della teoria classica dei laminati, e dopo si considera il caso particolare di laminati a strati identici.
- Si introduce infine l'uso della rappresentazione polare nella teoria classica dei laminati perché questo permette di meglio comprendere alcuni aspetti progettuali.
- Si è detto che la teoria classica trova la sua migliore applicazione nella fase di progetto. A tutt'oggi, la progettazione dei laminati è argomento di ricerca, in quanto non si dispone ancora di un unico metodo capace di rispondere a tutti i bisogni progettuali. A questo aspetto sono dedicati i capitoli che seguono.



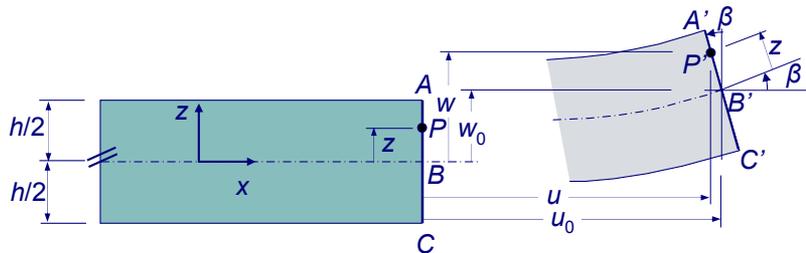
Il modello meccanico

- La teoria classica dei laminati si basa sulle seguenti ipotesi:
 - aderenza perfetta tra gli strati;
 - comportamento elastico lineare degli strati costituenti;
 - piccoli spostamenti, rotazioni e deformazioni;
 - spessore totale piccolo;
 - modello cinematico di Kirchhoff.
- Si ricorda che il modello di Kirchhoff comporta tre ipotesi che riguardano la deformazione di ogni segmento retto ortogonale al piano medio, segmento che in questo modello si postula rimanere:
 - rettilineo;
 - ortogonale al piano;
 - di lunghezza inalterata.
- La scelta di questo modello cinematico ha, come ben noto, delle conseguenze meccaniche importanti; in particolare, come vedremo, non si può risalire alle deformazioni da taglio, sullo spessore della piastra.



Il modello meccanico

- Consideriamo dunque, tramite l'aiuto della figura, quali sono nel piano x - z le conseguenze delle ipotesi assunte (nel piano y - z si ha una situazione analoga). Si cerca lo spostamento $\mathbf{u} = (u, v, w)$ di un punto qualsiasi P , di coordinate (x, y, z) .



- Il punto B ($z=0$) si porta in B' , con uno spostamento verticale w_0 , u_0 in direzione x e v_0 in direzione y .

292



Il modello meccanico

- Lo spostamento in direzione x di un punto P , situato sulla verticale di B a distanza z dal piano medio, sarà

$$u = u_0 - z \sin \beta,$$

dove β è l'angolo che la normale in B' alla superficie media forma con l'asse z . Da notare che la distanza di P' dalla superficie media è ancora z , per l'ipotesi assunta di indeformabilità del segmento verticale.

- Lo spostamento di P in direzione z sarà invece

$$w = w_0 + z (\cos \beta - 1).$$

- Poiché per ipotesi il segmento normale al piano medio resta rettilineo e ortogonale alla superficie media deformata, l'angolo β è anche l'angolo che il piano tangente alla superficie media forma con l'asse x .

293



Il modello meccanico

- Infine, essendo per ipotesi gli spostamenti e le rotazioni piccoli, è

$$\beta \cong \sin \beta \cong \tan \beta = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \cos \beta \cong 1.$$

- Ne consegue che nelle ipotesi assunte è

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x},$$

e analogamente

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y},$$

mentre per lo spostamento verticale si ottiene

$$w = w_0 \quad \forall z.$$

- Il campo di spostamenti di un punto P di coordinate (x,y,z) è dunque

294



Il modello meccanico

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \\ v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \\ w_0(x,y) \end{Bmatrix}.$$

- Da notare che il campo di spostamenti è lineare in z .
- Le deformazioni si calcolano facilmente: dall'ipotesi che queste sono infinitesime si trae per il campo di deformazioni

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right] - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y},$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \right] = 0,$$

295



Il modello meccanico

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \right] = 0,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z} = 0.$$

- La conseguenza delle assunzioni sul comportamento cinematico è dunque che *il campo di deformazioni è piano*.
- Se si indica con $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ il tensore delle piccole deformazioni del piano medio,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix},$$

296



Il modello meccanico

e con $\boldsymbol{\kappa}$ l'opposto del tensore delle curvatures del piano medio, assimilabile all'hessiano della funzione $w_0(x,y)$, grazie all'ipotesi di piccoli spostamenti e rotazioni,

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix},$$

si ottiene finalmente, per il tensore delle deformazioni,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z \boldsymbol{\kappa} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}.$$

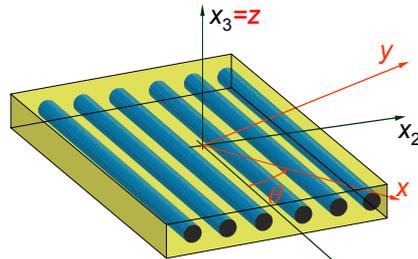
- Si nota che i vari tensori piani sono stati scritti in notazione di Voigt e ridotti quindi a vettori colonna, come è la consuetudine.

297



La legge fondamentale dei laminati

- La conoscenza del campo di deformazioni permette di risalire, tramite il calcolo delle tensioni, alle risultanti delle azioni interne, legando quindi queste ultime alle deformazioni. Questo è lo scopo principale della teoria classica dei laminati.
- Abbiamo visto che, nel modello meccanico assunto, il campo di deformazioni è piano. Ci prefiggiamo adesso, in primo luogo, di passare al campo delle tensioni.
- Questo passaggio è solo in apparenza immediato, mentre in realtà necessita una certa attenzione.
- Innanzitutto, fissiamo la situazione: si devono calcolare le tensioni in una lamina come in figura, considerando che deformazioni e tensioni devono essere note, in generale, nel riferimento qualsiasi $\{x, y, z\}$, nel quale le indicheremo con un apice (ε'_i e σ'_i , $i=1, \dots, 6$).



La legge fondamentale dei laminati

- Se si considera un materiale qualunque, a seguito del fatto che si ha uno stato di deformazione piano, le tensioni nel riferimento qualunque, saranno del tipo

$$\sigma'_i = C'_{1i}\varepsilon'_1 + C'_{2i}\varepsilon'_2 + C'_{6i}\varepsilon'_6, \quad i = 1, \dots, 6.$$

- Quindi, lo stato di tensione non è, in generale, piano. Se però si considera la situazione reale, dei materiali a rinforzo direzionale in cui, come da figura, il comportamento è isotropo trasverso, con direzione x_1 dell'asse ortogonale al piano di isotropia, per i quali

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$



La legge fondamentale dei laminati

allora si riconosce, seguendo le procedure viste per una rotazione di θ attorno all'asse x_3 della matrice $[C]$, che

$$\begin{aligned} C'_{14} = C'_{24} = C'_{64} = C'_{15} = C'_{25} = C'_{65} &= 0, \\ C'_{13} = C_{12}c^2 + C_{23}s^2, \quad C'_{23} = C_{12}s^2 + C_{23}c^2, \quad C'_{63} &= -sc(C_{12} - C_{23}), \\ s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta. \end{aligned}$$

- La prima linea qui sopra è vera anche per il caso più generale di lamina ortotropa con asse x_3 di ortotropia.

- Ne consegue

$$\sigma'_3 \neq 0, \quad \sigma'_4 = \sigma'_5 = 0.$$

- In altre parole, mentre lo stato di deformazione è piano, quello di tensione non lo è; in generale infatti

$$\sigma'_3 = (C_{12}c^2 + C_{23}s^2)\varepsilon'_1 + (C_{12}s^2 + C_{23}c^2)\varepsilon'_2 - sc(C_{12} - C_{23})\varepsilon'_6.$$

300



La legge fondamentale dei laminati

- A stretto rigore, quindi, non è possibile utilizzare i risultati visti in precedenza che riguardano il legame costitutivo per uno stato piano di tensione.

- Tuttavia, si ammette ancora che questo sia possibile, in altre parole si considera che sia $\sigma'_3=0$.

- Alcuni autori, per esempio Lekhnitskii, Jones, Pedersen, ammettono semplicemente questo fatto come ipotesi di base della teoria classica dei laminati.

- Una giustificazione di questa assunzione, può tuttavia essere trovata in quello che normalmente si ammette anche nella teoria classica delle piastre: sulle superfici esterne della piastra, il valore della tensione σ'_3 è pari a quello delle pressioni di contatto, che generalmente sono inferiori, per i carichi distribuiti ordinari, di uno o due ordini di grandezza rispetto alle tensioni ammissibili, a cui sono prossime le componenti nel piano del tensore degli sforzi.

301



La legge fondamentale dei laminati

- Essendo poi lo spessore piccolo, se le tensioni variano con continuità, è lecito ammettere che il valore assoluto di σ'_3 resti limitato e quindi trascurabile rispetto a quello delle tensioni nel piano.
- Questo argomento è classico in meccanica delle piastre; ovviamente, questa approssimazione non può essere considerata valida laddove si abbiano stati di tensione triassiali significativi, come è il caso delle zone di appoggio o incastro e quelle dei carichi concentrati.
- Un commento ulteriore riguarda la plausibilità meccanica delle assunzioni fatte: in effetti, queste conducono per i laminati a due conseguenze importanti.
- La prima, riguarda le tensioni da taglio in direzione x_3 , σ'_4 e σ'_5 : essendo queste nulle, è in principio impossibile l'equilibrio di un elemento di piastra sotto l'azione di carichi ortogonali al piano medio.



La legge fondamentale dei laminati

- Questo fatto è ben noto anche nella teoria classica delle piastre e si sana in quel caso con il ricorso alle equazioni di equilibrio.
- La seconda, si osserva direttamente dall'ultima equazione: la tensione σ'_3 è discontinua all'interfaccia degli strati. Questo è un paradosso che deriva dal modello cinematico adottato e che rende in principio più delicata l'ammissibilità dell'ipotesi che sia σ'_3 trascurabile.
- Entrambi questi paradossi sono risolti, per i laminati, facendo ricorso a teorie di ordine superiore.
- Queste indicazioni servono, insieme ad altre, a meglio comprendere il campo di applicazione della teoria classica dei laminati, che come già detto va vista soprattutto come uno strumento in grado di predire il comportamento elastico globale del laminato, piuttosto che come una teoria capace di calcolare con finezza appropriata i veri campi di sforzo e deformazione nel continuo stratificato.



La legge fondamentale dei laminati

- Ammettendo dunque che lo stato di tensione sia piano, si può utilizzare come legame costitutivo quello già introdotto,

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

con le componenti Q_{ij} funzione delle C_{ij} , vedere pagina 155.

- Nel riferimento qualunque $\{x, y, z\}$, sarà

$$\{\sigma\}' = [Q]'\{\varepsilon\}',$$

con le componenti della matrice $[Q]'$ date a pagina 161.

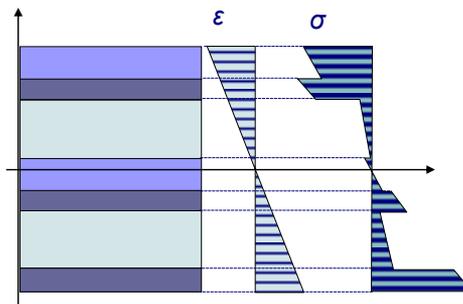
- Da ricordarsi che in un riferimento qualunque, la matrice $[Q]'$ non è in generale ortotropa, in altre parole, la lamina si comporta come un materiale anisotropo.

304



La legge fondamentale dei laminati

- Un'ulteriore osservazione è la seguente: nel modello adottato, il campo di deformazione è unico per tutto il laminato, ossia vi è continuità di deformazione tra uno strato e l'altro.
- Così non è per le tensioni; infatti, dalle formule della pagina precedente si osserva che, essendo in generale gli strati differenti e diversamente orientati, questi hanno rigidità diverse nelle stesse direzioni e quindi sono diversamente sollecitati per uno stesso livello di deformazione.
- Un esempio, puramente qualitativo, di ciò che accade è quello in figura, che mette in evidenza l'esistenza di discontinuità, che possono essere anche forti, delle tensioni all'interfaccia degli strati.



305



La legge fondamentale dei laminati

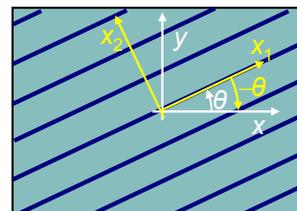
- Nel calcolo della matrice $[Q]'$ con le formule di pagina 161 si deve tuttavia fare un'ulteriore attenzione.
- Infatti, quelle formule permettono il calcolo della matrice di rigidezza nel passaggio dal riferimento $\{x_1, x_2, x_3\}$ al riferimento $\{x, y, z\}$, ruotato dell'angolo θ in senso trigonometrico.
- Ora, quando si ha a che fare con un laminato, ciò che naturalmente si fa è di fissare un riferimento unico, proprio al laminato, in cui si esprimeranno tutte le grandezze tensoriali e vettoriali di ciascuno strato e della piastra in generale.
- Questo riferimento non coincide necessariamente con il riferimento di ortotropia di tutti gli strati, potendo questi avere una orientazione qualunque.
- In effetti, le proprietà finali del laminato si ottengono proprio per rotazione relativa degli strati, in modo da ottimizzare il comportamento voluto.
- Sia dunque $\{x, y, z\}$ il riferimento globale del laminato.

306



La legge fondamentale dei laminati

- Allora la situazione che si presenta d'ordinario è la seguente, vista nel piano x - y : uno strato che è ruotato dell'angolo θ rispetto al riferimento del laminato, $\{x, y, z\}$.
- Si deve considerare il fatto che normalmente si conoscono le proprietà elastiche dello strato, in altre parole la matrice $[Q]$ o i moduli dell'ingegnere che le corrispondono, nel riferimento $\{x_1, x_2, x_3\}$, che chiameremo *materiale* e che coincide con quello di ortotropia, con in genere l'asse x_1 che è l'asse forte, quello disposto lungo le fibre per gli strati a rinforzo unidirezionale.
- Questo implica che il calcolo della matrice $[Q]'$ si deve effettuare con le formule viste, ma considerando che adesso la rotazione da compiere a partire dal riferimento di ortotropia è $-\theta$, e non θ .
- Dunque, se si vogliono considerare come angoli di rotazione quelli misurati in senso trigonometrico a partire dal riferimento del laminato



307



La legge fondamentale dei laminati

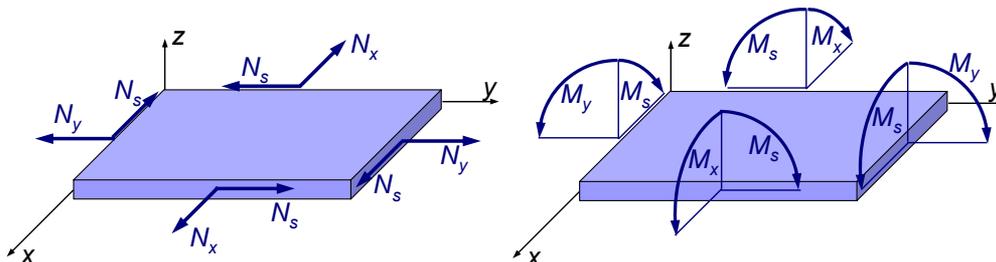
(perché sono questi in effetti gli angoli che si usano per il progetto e l'analisi del laminato) allora nelle formule che danno le componenti di $[Q]'$, pagina 161, si deve cambiare il segno delle potenze dispari di $\sin \theta$.

- La matrice che dà le caratteristiche elastiche di uno strato ruotato di θ in senso trigonometrico rispetto al riferimento del laminato è dunque la seguente:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4s^3c & s^4 \\ sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & 3s^2c^2 - s^4 & -s^3c \\ s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(s^3c - sc^3) & s^2c^2 \\ s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & c^4 - 3s^2c^2 & -sc^3 \\ s^4 & 4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{16} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{26} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}$$

La legge fondamentale dei laminati

- A questo punto, si può procedere al calcolo delle azioni interne; tenuto conto delle ipotesi fatte e dei loro risultati, in particolare dell'assenza delle tensioni in direzione z , le sole azioni interne che si possono calcolare con il modello meccanico utilizzato sono le azioni di *membrana* (o di *lastra*) e quelle di *flessione* (o di *piastra*), ossia gli sforzi normali e tangenziali nel piano medio e i momenti flettenti e torcenti del piano medio. Questi sono riassunti in figura.



La legge fondamentale dei laminati

- Ovviamente, le azioni interne sono forze e momenti per unità di lunghezza.
- Da notare che non tutti gli autori utilizzano la stessa nomenclatura per i momenti flettenti e nemmeno la stessa convenzione sui segni (ad esempio Jones).
- Quella adottata qui è coerente con la definizione stessa di momento flettente o torcente, in altre parole è quella che si ottiene spontaneamente sviluppando i calcoli indicati qui di seguito, nel riferimento adottato (come in Lekhnitskii o Vinson-Sierakowski; Vasiliev e Morozov utilizzano invece un riferimento orientato negativamente).
- La definizione delle azioni interne è classica e immediata: se h è lo spessore del laminato, allora

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz.$$

- In termini di componenti, utilizzando ancora la notazione di Voigt, è



La legge fondamentale dei laminati

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s dz \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s z dz \end{Bmatrix}.$$

- Il carattere tensoriale, di tensori del secondo ordine, di \mathbf{N} e \mathbf{M} discende direttamente dalla loro definizione.
- Il legame tra le azioni interne e le deformazioni del laminato si ottiene inserendo nelle relazioni sopra il legame costitutivo discusso in precedenza, e svolgendo l'integrazione. Nel far questo, si deve tener conto, ed è un punto essenziale, del fatto che il laminato è composto da più strati, in generale differenti e diversamente orientati rispetto al riferimento globale $\{x, y, z\}$.
- L'integrazione deve essere quindi spezzata in tante parti distinte quanti sono gli strati che compongono il laminato e in ciascuna di queste parti si deve prendere in considerazione la rigidità propria allo strato e alla sua orientazione, che chiameremo δ .



La legge fondamentale dei laminati

- Dal momento che nel modello adottato il campo di deformazione è unico per tutti gli strati e descritto da due tensori che non dipendono dalla coordinata z , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}] dz = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz \right] \boldsymbol{\kappa}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}_k z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}] dz = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z^2 dz \right] \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned}$$

- Nelle equazioni sopra, $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$ indica la matrice $[\mathbf{Q}]$ dello strato k che è ruotato di δ_k in senso trigonometrico rispetto al riferimento globale $\{x, y, z\}$.

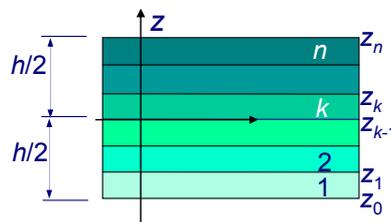
312



La legge fondamentale dei laminati

- Al fine di rendere la scrittura più semplice, si è utilizzata la notazione tensoriale invece di quella, più corretta, matriciale usata sinora; così si farà anche nel seguito.
- I limiti di integrazione z_{k-1} e z_k sono rispettivamente le quote delle facce inferiore e superiore dello strato k , secondo lo schema di figura (strati numerati a partire dal basso); n è il numero totale degli strati.
- Nelle equazioni precedenti si pone

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) dz, \\ \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz, \\ \mathbf{D} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z^2 dz. \end{aligned}$$



313



La legge fondamentale dei laminati

- Essendo i $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$ indipendenti dalla coordinata z , si ha che

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \mathbf{Q}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \mathbf{Q}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \mathbf{Q}_k(\delta_k).$$

- Si ottiene dunque quella che è la *legge fondamentale dei laminati*, che scritta in forma matriciale simbolica è

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}$$

- Questa è una vera e propria legge costitutiva, che nel quadro delle ipotesi assunte lega le azioni interne al campo di deformazione.

La legge fondamentale dei laminati

- Questo risultato deve essere adeguatamente commentato.
- In effetti, si vede che

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa},$$

e che

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}.$$

- Quindi, le azioni di lastra sono legate non solo alle deformazioni del piano medio, ma anche alle curvature di questo; allo stesso modo, i momenti flettenti e torcenti sono legati non solo alle curvature del piano medio, ma anche alle deformazioni di questo.
- In altre parole *vi è un accoppiamento tra azioni di lastra e curvature e tra momenti e deformazioni del piano medio* e questi accoppiamenti sono descritti dal medesimo tensore \mathbf{B} , che è appunto denominato *tensore di accoppiamento lastra-piastra* (o *membrana-flessione*).

La legge fondamentale dei laminati

- Questo effetto è sconosciuto nelle piastre monostrato ed è per la presenza di questo accoppiamento che si è obbligati a trattare insieme il caso di lastra e piastra, spesso presentati in modo distinto nella teoria classica.
- Il tensore **A** è un tensore di rigidità che lega le azioni e le deformazioni di lastra, mentre il tensore **D** lega i momenti con le curvature. Per questo, **A** è detto *tensore di rigidità membranale* e **D** *tensore di rigidità flessionale*.
- Dalla definizione stessa dei tre tensori che descrivono, in rigidità, il comportamento elastico di un laminato, ne discende che, essendo simmetrici i tensori di rigidità degli strati,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T.$$



I tensori normalizzati

- Nella legge fondamentale dei laminati, i tre tensori **A**, **B** e **D** hanno dimensioni differenti:

$$[\mathbf{A}] = [F/L] \quad (\text{N/m}),$$

$$[\mathbf{B}] = [F] \quad (\text{N}),$$

$$[\mathbf{D}] = [FL] \quad (\text{Nm}).$$

- Di conseguenza, i tre tensori non sono direttamente confrontabili.
- Inoltre, questi tre tensori sono dei tensori di rigidità che descrivono la risposta elastica di un laminato avente uno spessore totale h .
- Ora, lo scopo principale, già annunciato, della teoria classica, è quello di dare una legge capace di simulare il comportamento del laminato multistrato come se questo fosse costituito da un solo strato, avente lo spessore totale del laminato (è una teoria monostrato).



I tensori normalizzati

- I tensori sopra introdotti descrivono dunque il comportamento elastico di questo monostrato elasticamente equivalente al laminato.
- Ci si può allora porre il seguente quesito: quali sono le caratteristiche elastiche del materiale fittizio costituente questo monostrato elasticamente equivalente al laminato?
- Dato che ci si è ridotti ad un monostrato, quindi omogeneo, anche se in generale anisotropo, la risposta è immediata, e si trova direttamente nella teoria delle piastre omogenee (per \mathbf{B} è convenzionale): le caratteristiche elastiche di questo materiale fittizio si trovano a partire dai tensori di rigidezza tramite le operazioni seguenti:

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{h}, \quad \mathbf{B}^* = 2 \frac{\mathbf{B}}{h^2}, \quad \mathbf{D}^* = 12 \frac{\mathbf{D}}{h^3}.$$

- Il simbolo * indica dunque i tensori normalizzati; è facile vedere che i tensori normalizzati hanno tutti le stesse dimensioni, quelle di un modulo $[FL^{-2}]$, (MPa), e quindi sono direttamente confrontabili.



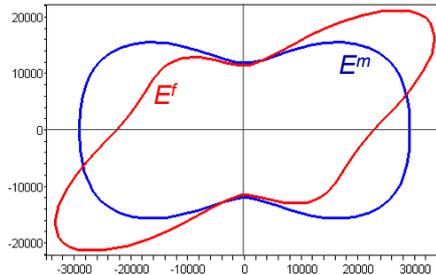
I tensori normalizzati

- In effetti, il significato meccanico dei tensori normalizzati è quello di essere dei tensori di elasticità del materiale elastico fittizio costituente il monostrato equivalente.
- Ora, in generale si ha che \mathbf{A}^* è diverso da \mathbf{D}^* , il che significa che in realtà è come se il monostrato equivalente fosse costituito da due materiali fittizi distinti, uno per il comportamento di membrana e uno per quello di flessione: i comportamenti di lastra e di piastra sono differenti (questo è vero, ovviamente, anche per l'accoppiamento, ma in quel caso l'interpretazione è più sfuggente).
- In altre parole, si ha in generale a che fare con una piastra che può, ad esempio, essere ortotropa in membrana ed in flessione, ma con assi di ortotropia ruotati; oppure, un laminato può essere isotropo in membrana e completamente anisotropo in flessione e così di seguito, gli esempi possono moltiplicarsi.
- Non solo, ma anche il valore delle componenti di rigidezza dei materiali fittizi sono diversi.



I tensori normalizzati

- Concretamente, questo significa che uno stesso provino ricavato da un laminato e sottoposto a tests di laboratorio, mostrerà dei valori differenti, ad esempio, del modulo di Young equivalente, in un test di flessione ed in uno di trazione.
- Il comportamento elastico di un laminato visto come un corpo equivalente omogeneizzato ad un monostrato è dunque quello di un corpo complesso, che si caratterizza per un accoppiamento membrana-flessione e per un diverso comportamento elastico di lastra e di piastra.
- Un esempio è dato nella figura qui a lato, che mostra il diagramma direzionale del modulo di Young in membrana (ortotropo) ed in flessione (anisotropo) per uno stesso laminato (sequenza $[30^\circ/-30^\circ/0^\circ/-30^\circ/30^\circ]$ in vetro-epoxy).



320



Inversione della legge fondamentale dei laminati

- L'inversione della legge fondamentale dei laminati è semplice e si può fare in diversi modi.
- Ad esempio,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o \rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o) \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} \rightarrow \\ \boldsymbol{\varepsilon}^o &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{N} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}. \end{aligned}$$

- Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \\ \boldsymbol{\kappa} &= -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{M}. \end{aligned}$$

321



Inversione della legge fondamentale dei laminati

- Si pone allora

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1},$$

$$\mathbf{b}_1 = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1},$$

$$\mathbf{d} = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1},$$

$$\mathbf{b}_2 = -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1},$$

e si riconosce facilmente che, per la simmetria di \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}]^T = [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^T]^{-1} = \\ &= [\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T(\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

- Analogamente, si ricava che $\mathbf{d} = \mathbf{d}^T$, mentre invece

322



Inversione della legge fondamentale dei laminati

$$\mathbf{b}_1^T = (-\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1})^T = -(\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{a}^T = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{a} \neq \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_2^T = (-\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^T = -(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{d}^T = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{d} \neq \mathbf{b}_2.$$

- Tuttavia,

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_1^T)^{-1} &= -(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{a})^{-1} = -\mathbf{a}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} = -\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}, \\ \mathbf{b}_2^{-1} &= (-\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = -\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}^{-1} = -\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = -\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1^T)^{-1}, \end{aligned}$$

e quindi, per l'unicità dell'inverso,

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1^T.$$

- Si pone allora

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b},$$

e si ottiene infine l'inversione della legge fondamentale dei laminati:

323



Inversione della legge fondamentale dei laminati

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}.$$

- Dunque, anche se la matrice della legge inversa ha conservato la simmetria globale, non ha più tutte le simmetrie della matrice della legge diretta, dal momento che \mathbf{b} non è simmetrico, in generale.
- In effetti, mentre \mathbf{A} e \mathbf{D} sono dei veri tensori di rigidità, per esempio sono definiti positivi, \mathbf{B} non lo è, non è definito e non ha le stesse simmetrie del suo inverso.
- Dalle relazioni alla pagina precedente, si ricava per \mathbf{b} un'espressione simile a quelle ottenute per \mathbf{a} e \mathbf{d} :

$$(\mathbf{b}^T)^{-1} = -\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{b} = (\mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1}.$$

324



Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Gli effetti dell'accoppiamento lastra-piastra possono essere meglio valutati utilizzando la legge inversa dei laminati.
- Infatti, supponiamo che il laminato sia sottoposto soltanto a delle azioni membranali, cioè $\mathbf{M}=\mathbf{O}$; allora

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{O} \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{a}\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b}^T\mathbf{N}.$$

- A seguito dell'accoppiamento, le azioni membranali provocano nel laminato non solo una deformazione del piano medio, ma anche una curvatura. Se per esempio il laminato è sottoposto soltanto ad una forza membranale monoassiale, sia N_x , allora

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix} = N_x \begin{Bmatrix} b_{xx} \\ b_{xy} \\ b_{xs} \end{Bmatrix}.$$

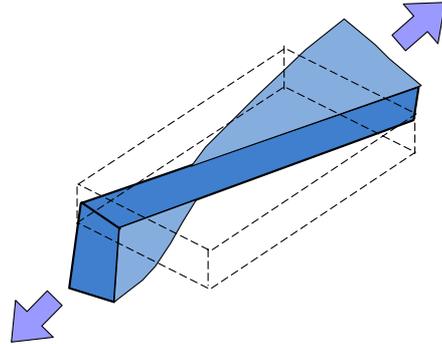
- In altre parole, il laminato si incurva nelle due direzioni e si torce.

325



Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Se invece si fosse applicato un momento M_x , avremmo ottenuto un risultato analogo per quanto riguarda le deformazioni nel piano.
- Alcune volte, questi effetti deformativi dovuti all'accoppiamento membranale-flessionale sono ricercati e sfruttati per certi scopi.
- Ad esempio, l'accoppiamento che provoca una torsione come effetto di una trazione (vedi figura) è a volte utilizzato nelle eliche dei generatori eolici e delle pale di elicottero per effettuare un controllo passivo automatico del passo dell'elica.
- In genere, tuttavia, l'accoppiamento è un effetto parassita indesiderato, ed i progettisti fanno in modo di eliminarlo (vedremo come nel capitolo seguente).



326



Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Si parla allora di *laminati disaccoppiati*, per i quali $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ e quindi

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}.$$

- Inoltre, in tal caso si ha immediatamente che

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}^{-1}.$$

- Allora, in questo caso, ed in generale solo in questo caso, c'è corrispondenza di simmetria elastica tra i tensori diretti ed inversi.
- In altre parole, per un laminato disaccoppiato \mathbf{a} ed \mathbf{A} hanno le stesse simmetrie elastiche, e così pure \mathbf{d} ed \mathbf{D} .
- Ad esempio, se \mathbf{A} è ortotropo, \mathbf{a} lo è ancora e con gli stessi assi di ortotropia.

327



Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Questo non è vero, in generale, per un laminato accoppiato; per convincersene, basta considerare, ad esempio, la formula che dà il tensore \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

- Le eventuali simmetrie di \mathbf{a} sono determinate da quelle di \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} , che non sono in generale le stesse.
- Ad esempio, un laminato accoppiato e con \mathbf{A} isotropo avrà, in generale, \mathbf{a} completamente anisotropo. Si ha dunque il caso di una risposta elastica che non ha le stesse simmetrie in rigidezza e in cedevolezza.
- Questa situazione è tipica dei laminati accoppiati; per questa ragione, parlare di simmetrie elastiche per un laminato è difficile e delicato. Quello che si può affermare è che se una simmetria elastica esiste, questa concerne una rigidezza o una cedevolezza di lastra o di piastra e non, in generale, l'intero comportamento del laminato.

328



Laminati accoppiati e disaccoppiati

- Vedremo nel capitolo seguente una classe di laminati per i quali la definizione di simmetria elastica è precisa ed assume la stessa valenza che nel caso di un monostrato.
- Rimane il fatto che, in generale, non si può sempre parlare di simmetria elastica corrispondente ad una simmetria materiale, ossia ad una sottostante simmetria geometrica, ad esempio nella disposizione degli strati.
- E' infatti possibile ottenere una qualsiasi simmetria elastica con una disposizione di un numero sufficiente di strati disposti senza alcuna simmetria geometrica.
- Tutto questo fa capire come il concetto di simmetria materiale per i laminati sia ben più delicato e articolato che quello utilizzato per i continui omogenei o dei monostrati.
- Quello che rimane, tuttavia, è che ci si può sempre limitare a considerare le simmetrie tensoriali, e questo è sempre possibile ed ha una affinità completa con quello che si fa nel caso dei continui omogenei.

329



I moduli elastici del monostrato equivalente

- Come già anticipato, i tensori normalizzati rappresentano il comportamento di un materiale fittizio con cui è realizzato un monostrato equivalente, di identico spessore del laminato.
- E' quindi lecito chiedersi quali sono i moduli dell'ingegnere di questo materiale fittizio, in altre parole, quali sono i moduli dell'ingegnere del laminato visto come un continuo omogeneo.
- I moduli sono definiti a partire dalle componenti del tensore di cedevolezza, ossia, in questo caso, dei tensori inversi, \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{d} normalizzati:

$$\mathbf{a}^* = h \mathbf{a} = (\mathbf{A}^* - 3 \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{B}^*)^{-1},$$

$$\mathbf{b}^* = \frac{h^2}{2} \mathbf{b} = \left(\mathbf{B}^* - \frac{1}{3} \mathbf{D}^* \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{A}^* \right)^{-1},$$

$$\mathbf{d}^* = \frac{h^3}{12} \mathbf{d} = (\mathbf{D}^* - 3 \mathbf{B}^* \mathbf{A}^{*-1} \mathbf{B}^*)^{-1}.$$



I moduli elastici del monostrato equivalente

- I moduli dell'ingegnere sono dunque definiti come d'abitudine, in funzione delle componenti dei tensori di cedevolezza:

$$E_x^m = \frac{1}{a_{xx}^*}, \quad E_y^m = \frac{1}{a_{yy}^*}, \quad G_{xy}^m = \frac{1}{a_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^m = -\frac{a_{xy}^*}{a_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,x}^m = \frac{a_{xs}^*}{a_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,y}^m = \frac{a_{ys}^*}{a_{yy}^*};$$

$$E_x^f = \frac{1}{d_{xx}^*}, \quad E_y^f = \frac{1}{d_{yy}^*}, \quad G_{xy}^f = \frac{1}{d_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^f = -\frac{d_{xy}^*}{d_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,x}^f = \frac{d_{xs}^*}{d_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,y}^f = \frac{d_{ys}^*}{d_{yy}^*}.$$

- Con l'apice m si sono indicati i moduli che descrivono il comportamento di membrana, con f quelli del comportamento in flessione.
- I moduli dell'accoppiamento si introducono nello stesso modo, con le componenti di \mathbf{b}^* , ma in genere non si utilizzano perché il loro significato meccanico è meno diretto.



I moduli elastici del monostrato equivalente

- Il calcolo dei moduli dell'ingegnere in un riferimento qualsiasi, ruotato di θ rispetto a quello globale, si fa ancora utilizzando delle formule di trasformazione analoghe a quelle di pagina 163.
- Allo stesso modo, le componenti di **A**, **B** e **D** in un riferimento ruotato di θ rispetto a quello globale, e quelle dei corrispondenti tensori normalizzati, si ottengono tramite delle formule di trasformazione analoghe a quelle di pagina 161, introdotte per la matrice [Q], mentre per i tensori inversi **a**, **b** e **d** e i loro corrispondenti normalizzati si devono usare le formule di pagina 162, introdotte per la matrice [S].
- Infatti, si deve tener conto del fatto che nella definizione dei tensori ϵ^o e κ si è utilizzata la notazione di Voigt, con la convenzione che ne segue sulla componente di deformazione di taglio, a indice misto. Di conseguenza, le trasformazioni per rotazione dei tensori di rigidità e di cedevolezza non sono uguali. In definitiva, tutti i tensori di rigidità si comportano come la matrice [Q] e tutti quelli di cedevolezza come la matrice [S].



I moduli elastici del monostrato equivalente

- Una sola avvertenza rispetto alle formule sopra citate: in esse, il riferimento di partenza era $\{x_1, x_2, x_3\}$, riferimento materiale della lamina, e quello di arrivo $\{x, y, z\}$, un riferimento qualsiasi.
- In questo caso, il riferimento di partenza è quello globale del laminato, che si è chiamato $\{x, y, z\}$, e quello di arrivo è un riferimento qualsiasi, che chiameremo $\{x', y', z'\}$.
- Quindi, ad esempio, per il tensore **A** la trasformazione per rotazione va letta come segue (per gli altri si procede analogamente):

$$\begin{Bmatrix} A'_{xx} \\ A'_{xs} \\ A'_{xy} \\ A'_{ss} \\ A'_{ys} \\ A'_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4s^3c & s^4 \\ -sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ -s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 \\ s^4 & -4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{xs} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{ys} \\ A_{yy} \end{Bmatrix}$$



Il comportamento igro-termo-elastico

- Come ogni altro materiale, i compositi fibrorinforzati sono sensibili alle azioni della temperatura, che provocano delle deformazioni.
- Queste azioni sono particolarmente importanti nel caso dei laminati, che spesso sono realizzati con un processo di polimerizzazione termica sotto pressione costante (cottura a $\sim 180^\circ\text{C}$).
- In aggiunta, si deve considerare la possibilità che il materiale si deformi per assorbimento di umidità; questo fenomeno si produce nei compositi a matrice organica (ad esempio resine epossidiche).
- Vediamo quindi cosa accade in queste circostanze; l'obiettivo è quello di trovare una generalizzazione della legge fondamentale dei laminati in modo da tener conto degli effetti igro-termo-elastici.
- La teoria che segue è una generalizzazione al caso dei multistrati anisotropi della teoria classica delle piastre sottoposte a variazioni termiche, oltre che ad azioni meccaniche.
- Le ipotesi meccaniche di base sono le medesime già viste per la teoria classica dei laminati.

Il comportamento igro-termo-elastico

- In generale, si può dire che la deformazione totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ è la somma di tre termini:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_f + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_c,$$

con $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ la quota di deformazione dovuta alle forze applicate, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ quella dovuta alla variazione termica e $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ quella dovuta alla variazione di concentrazione di umidità.

- Naturalmente, per la legge di Hooke è

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma},$$

e si ammette che sia

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = t\boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = c\boldsymbol{\beta}.$$

- Nelle equazioni precedenti, t e c sono rispettivamente la variazione di temperatura e di concentrazione di umidità rispetto ad uno stato in cui si considerano nulle le deformazioni termiche e igroscopiche; $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ sono rispettivamente i tensori del secondo ordine dei coefficienti di dilatazione termica e igroscopica.

Il comportamento igro-termo-elastico

- L'inversione della legge precedente dà

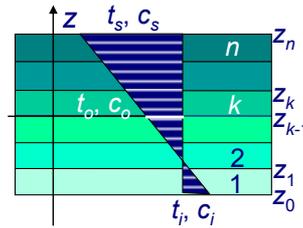
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_t - \varepsilon_c) = E\varepsilon - tE\alpha - cE\beta.$$

- Consideriamo dunque il caso di un laminato.
- L'ipotesi classica che si fa è che il laminato sia sottoposto ad un *flusso permanente di calore e di umidità* e che le proprietà fisiche del laminato siano costanti attraverso lo spessore; è il caso dei laminati a strati identici, ma non soltanto.
- In tale ipotesi, la variazione di t e di c attraverso lo spessore è lineare e si può porre, vedi figura,

$$t = t_o + \frac{\Delta t}{h} z, \quad c = c_o + \frac{\Delta c}{h} z, \quad \text{dove}$$

$$t_o = \frac{t_s + t_i}{2}, \quad c_o = \frac{c_s + c_i}{2}, \quad \Delta t = t_s - t_i, \quad \Delta c = c_s - c_i.$$

- Di conseguenza, nel quadro della teoria classica dei laminati il campo di tensione nello strato k del laminato sarà



336



Il comportamento igro-termo-elastico

$$\sigma_k = \mathbf{Q}_k(\bar{\delta}_k) \left[\varepsilon^o + z\kappa \right] - \left(t_o + \frac{\Delta t}{h} z \right) \mathbf{Q}_k(\bar{\delta}_k) \alpha_k(\bar{\delta}_k) - \left(c_o + \frac{\Delta c}{h} z \right) \mathbf{Q}_k(\bar{\delta}_k) \beta_k(\bar{\delta}_k).$$

- Con ovvio significato dei simboli, $\alpha_k(\bar{\delta}_k)$ e $\beta_k(\bar{\delta}_k)$ indicano rispettivamente il tensore dei coefficienti di dilatazione termica e igroscopica dello strato numero k , ruotato dell'angolo $\bar{\delta}_k$.
- Se adesso questa relazione si usa nel calcolo delle azioni interne \mathbf{N} e \mathbf{M} , con le formule già impiegate nella teoria classica, accanto ai termini già visti, che conducono ai tensori \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} , si hanno altri termini, che tengono conto dell'apporto delle variazioni termiche e igroscopiche:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} - t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} - c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

dove i tensori del secondo ordine \mathbf{U} , \mathbf{V} e \mathbf{W} descrivono rispettivamente, in rigidità, il comportamento termoelastico di membrana, l'accoppiamento termoelastico membrana-flessione ed il

337



Il comportamento igro-termo-elastico

comportamento termoelastico in flessione. In altre parole, sono i corrispondenti di **A**, **B** e **D** per le rigidzze termoelastiche.

- I tensori **F**, **G** e **H** svolgono rispettivamente gli stessi ruoli ma nei riguardi delle variazioni di umidità.
- I tensori sopra sono dati dalle relazioni seguenti, che si ottengono immediatamente inserendo nel calcolo delle azioni interne la formula delle tensioni alla pagina precedente:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \gamma_k(\delta_k) dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \gamma_k(\delta_k), \\ \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \gamma_k(\delta_k) dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \gamma_k(\delta_k), \\ \mathbf{W} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \gamma_k(\delta_k) dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \gamma_k(\delta_k), \\ &\text{dove } \gamma_k(\delta_k) = \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k). \end{aligned}$$

338



Il comportamento igro-termo-elastico

- In modo analogo si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k), \\ \mathbf{G} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k), \\ \mathbf{H} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k), \\ &\text{dove } \boldsymbol{\lambda}_k(\delta_k) = \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\beta}_k(\delta_k). \end{aligned}$$

- La legge di pagina 337 generalizza la legge fondamentale dei laminati nel caso in cui si abbiano effetti igro-termici. L'inversione di questa legge può farsi nel seguente modo: si pone

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M}^* \end{Bmatrix} = t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} + c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

e si ottiene

339



Il comportamento igro-termo-elastico

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix},$$

di cui si conosce già la relazione inversa:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^* \end{Bmatrix}.$$

- Dunque, tenendo conto dell'espressione di \mathbf{N}^* e \mathbf{M}^* , si ha infine

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} + c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix},$$

dove

340



Il comportamento igro-termo-elastico

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a}\mathbf{U} + \mathbf{b}\mathbf{V} = \mathbf{a}[\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}), \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{V} + \mathbf{b}\mathbf{W} = \mathbf{a}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}), \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{U} + \mathbf{d}\mathbf{V} = \mathbf{d}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{b}^T\mathbf{V} + \mathbf{d}\mathbf{W} = \mathbf{d}[\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}). \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{a}\mathbf{F} + \mathbf{b}\mathbf{G} = \mathbf{a}[\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}), \\ \mathbf{g}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{G} + \mathbf{b}\mathbf{H} = \mathbf{a}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}), \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{F} + \mathbf{d}\mathbf{G} = \mathbf{d}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{b}^T\mathbf{G} + \mathbf{d}\mathbf{H} = \mathbf{d}[\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}). \end{aligned}$$

341



Il comportamento igro-termo-elastico

- Si osserva dunque che il legame termoelastico inverso dipende non da 3 tensori, ma da 4, essendo in generale \mathbf{v}_1 diverso da \mathbf{v}_2 . Tuttavia, i tensori termoelastici inversi indipendenti non sono 4, ma solo 3, perché esiste la relazione seguente, facilmente ricavabile dalle precedenti

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}] = \mathbf{a}[\mathbf{d}^{-1}\mathbf{v}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W})]$$

- La stessa osservazione vale per il comportamento igro-elastico, per il quale si ha una relazione analoga alla precedente

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}] = \mathbf{a}[\mathbf{d}^{-1}\mathbf{g}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{H})]$$

- E' utile fare alcune osservazioni sui risultati trovati.
- Innanzitutto, si conferma che i laminati sono continui "complessi" per il fatto che ancora una volta il comportamento igro-termo-elastico in cedevolezza non è retto da leggi del tutto "simmetriche" rispetto a quelle in rigidezza.



Il comportamento igro-termo-elastico

- Infatti, si hanno due diversi tensori di accoppiamento termo- e igro-elastico, anche se non indipendenti.
- E' importante capire il significato dei tensori \mathbf{u} , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{w} (per i tensori \mathbf{f} , \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 e \mathbf{h} vale un discorso analogo).
- Confrontando la legge inversa di pagina 340 con le relazioni che danno in generale le deformazioni, pagina 335, si evince immediatamente quanto segue.
- Il tensore \mathbf{u} descrive le deformazioni del piano medio per una variazione di temperatura costante sullo spessore; il significato fisico delle sue componenti è dunque quello di essere dei *coefficienti di dilatazione termica del monostrato equivalente*. In altre parole, \mathbf{u} è per il laminato ciò che α è per una lamina.
- Il tensore \mathbf{v}_1 descrive le deformazioni del piano medio per una variazione lineare antisimmetrica della temperatura sullo spessore; le sue componenti hanno un significato analogo a quelle di \mathbf{u} , con la differenza vista sul campo di temperatura, variabile in questo caso.



Il comportamento igro-termo-elastico

- Il tensore \mathbf{w} descrive le curvature di origine termica dovute ad una variazione lineare antisimmetrica della temperatura sullo spessore; le sue componenti sono dei *coefficienti di curvatura termica del monostrato equivalente*.
- Infine, il tensore \mathbf{v}_2 descrive le curvature di origine termica dovute ad una variazione di temperatura costante sullo spessore; le sue componenti hanno un significato analogo a quelle di \mathbf{w} , con la differenza vista sul campo di temperatura, costante in questo caso.
- A causa dell'accoppiamento \mathbf{v}_1 , un laminato sottoposto a variazione termica lineare e antisimmetrica sullo spessore non soltanto si curva, come una piastra omogenea, ma anche si dilata nel suo piano medio, in modo diverso nelle varie direzioni a causa dell'anisotropia (ed è anche possibile avere delle direzioni in cui la deformazione è in realtà una contrazione).
- A causa invece dell'accoppiamento \mathbf{v}_2 , un laminato sottoposto a variazione termica costante sullo spessore non soltanto si



Il comportamento igro-termo-elastico

deformerà nel suo piano medio, ma anche si incurverà, ancora una volta in modo in generale diverso secondo la direzione a causa dell'anisotropia.

- Questo fatto è importante in quanto come detto spesso i laminati vengono prodotti per polimerizzazione sotto temperatura piuttosto elevata (intorno ai 180°C).
- Quindi, se il laminato ha un accoppiamento di tipo \mathbf{v}_2 , una volta raffreddato non manterrà la forma originaria e prevista, ma si incurverà (per esempio una lastra diventa un guscio).
- Di conseguenza, il controllo dell'accoppiamento termo-elastico è importante in fase di progetto di un laminato.
- Alcune considerazioni circa le relazioni tra l'accoppiamento elastico e quello termo- o igro-elastico possono essere fatte nel caso di laminati a strati identici (vedi pagina 360).
- Invece, nel caso di laminati a strati qualsiasi, la sola cosa che si può affermare è che un eventuale disaccoppiamento elastico ($\mathbf{B}=\mathbf{O}$) non



Il comportamento igro-termo-elastico

comporta necessariamente un disaccoppiamento termo- o igro-elastico ($\mathbf{V}=\mathbf{G}=\mathbf{O}$), e viceversa.

- Tuttavia, se $\mathbf{V}=\mathbf{O}$ si ha che

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}\mathbf{W} = -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{U} = -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} = -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}.$$

- In altre parole, possono esistere laminati accoppiati elasticamente ($\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$), ed accoppiati termo-elasticamente in cedevolezza ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\neq\mathbf{O}$), ma disaccoppiati termoelasticamente in rigidità ($\mathbf{V}=\mathbf{O}$).
- Se però, oltre a $\mathbf{V}=\mathbf{O}$ è anche $\mathbf{B}=\mathbf{O}$, allora il disaccoppiamento è totale ($\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{O}$).
- Una situazione analoga si ha ovviamente per il caso igro-elastico.
- Una considerazione a parte merita il problema della rotazione del riferimento. I tensori igro- termo- elastici sono tensori del secondo ordine, e scritti secondo la notazione di Voigt.

346



Il comportamento igro-termo-elastico

- Quindi le loro componenti in un riferimento $\{x',y',z'\}$ ruotato dell'angolo θ rispetto al riferimento $\{x, y, z\}$ si ottengono tramite delle formule analoghe a quelle di pagina 160.
- In particolare, quelle di $\{\sigma\}$ riguardano ovviamente i tensori di rigidità ($\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ e \mathbf{H}), mentre quelle di $\{\varepsilon\}$ riguardano i tensori di cedevolezza ($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}, \mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ e \mathbf{h}); si ha dunque, per esempio con riferimento ad \mathbf{U} ed \mathbf{u} ,

$$\begin{Bmatrix} U'_x \\ U'_y \\ U'_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_s \end{Bmatrix}.$$

- Come già nel caso dei tensori elastici, anche stavolta si deve fare attenzione al fatto che quando le suddette formule di rotazione si usano per ruotare nel riferimento globale del laminato le proprietà di uno strato descritte nel suo riferimento materiale, si devono cambiare di segno le potenze dispari di $\sin\theta$.

347



Il comportamento igro-termo-elastico

- Le matrici di trasformazione sono dunque, per questa operazione e ancora con riferimento ad \mathbf{U} ed \mathbf{u} ,

$$\begin{cases} U_x \\ U_y \\ U_s \end{cases} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_s \end{cases} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{cases}.$$

- Ovviamente, per gli altri tensori si applicano le stesse trasformazioni.
- Le dimensioni dei vari tensori sono le seguenti (τ indica una temperatura)

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= [1/\tau] \quad (1/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{v}_1] &= [L/\tau] \quad (\text{m}/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{v}_2] &= [1/(L\tau)] \quad (1/\text{m}^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{w}] &= [1/\tau] \quad (1/^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

348



Il comportamento igro-termo-elastico

- Dunque, i tensori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 non hanno nemmeno le stesse dimensioni, mentre \mathbf{u} e \mathbf{w} sì. Questo non accade per i tensori di rigidità termoelastica, che hanno le dimensioni seguenti

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}] &= [F/L\tau] \quad (\text{N}/\text{m}^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{V}] &= [F/\tau] \quad (\text{N}/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{W}] &= [FL/\tau] \quad (\text{Nm}/^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

- Questi possono essere normalizzati come \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} :

$$\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{U}}{h}, \quad \mathbf{V}^* = 2 \frac{\mathbf{V}}{h^2}, \quad \mathbf{W}^* = 12 \frac{\mathbf{W}}{h^3}.$$

- Le dimensioni sono allora $[F/L^2\tau]$ ($\text{N}/\text{m}^2^\circ\text{C}$). I tensori \mathbf{u} , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{w} non vengono in genere normalizzati, perché hanno già il significato fisico e le dimensioni volute (coefficienti di dilatazione, o di curvatura, termica).

349



Il caso dei laminati a strati identici

- La maggior parte dei laminati sono composti da strati identici, costituiti cioè dallo stesso materiale e aventi lo stesso spessore.
- Questa classe di laminati non è importante solo per le applicazioni, ma anche per i risvolti teorici. Infatti, solo in ipotesi di strati identici si riescono a ottenere delle regole generali sul comportamento e la progettazione dei laminati, come vedremo nel capitolo seguente.
- La circostanza di avere degli strati identici comporta delle semplificazioni nei risultati sin qui trovati.
- Innanzitutto, con la numerazione degli strati utilizzata (vedi pagina 313), si ha subito che

$$z_k = -\frac{h}{2} + k \frac{h}{n} = \frac{2k-n}{2n} h.$$

- Inoltre, la rigidità degli strati dipende solo dalla loro orientazione, non dal materiale, che è il medesimo per tutti gli strati.

Il caso dei laminati a strati identici

- In definitiva, sostituendo nelle formule di pagina 314 e di pagina 338 e 339 si ottiene

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

$$\mathbf{U} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(\delta_k), \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \gamma(\delta_k), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \gamma(\delta_k),$$

$$\mathbf{F} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \lambda(\delta_k), \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \lambda(\delta_k), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \lambda(\delta_k).$$

- I coefficienti b_k e d_k sono dati dalle formule che seguono:

$$b_k = 2k - n - 1, \\ d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2).$$

- Da notare che la somma dei b_k è nulla mentre quella dei d_k vale n^3 .

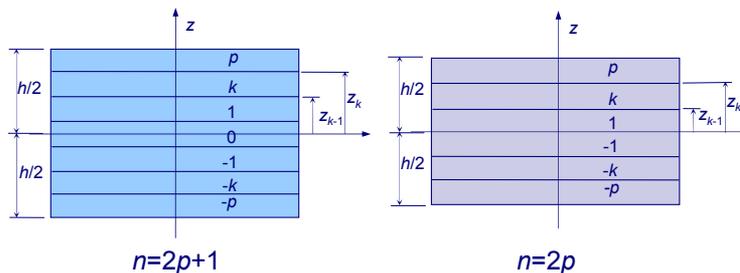
Il caso dei laminati a strati identici

- La prima osservazione che si può fare, è che il comportamento di lastra, tensori \mathbf{A} , \mathbf{U} e \mathbf{F} , non dipende dalla posizione degli strati sulla sequenza: *cambiare la sequenza degli strati senza cambiarne l'orientazione non varia le rigidzze di membrana*. Si può dimostrare che questo è vero anche per il caso di laminati a strati non identici.
- Questo non accade per i tensori di accoppiamento e per quelli di rigidzza in flessione: la posizione di uno strato sulla sequenza di impilamento influisce linearmente sull'accoppiamento e quadraticamente sulla rigidzza in flessione.
- Come vedremo, questo fatto è ciò che principalmente rende molto difficile la progettazione in flessione dei laminati.
- Nel prosieguo, risulterà utile anche un'altra numerazione degli strati, fatta a partire dal piano medio e rappresentata nella figura che segue.

352



Il caso dei laminati a strati identici



- In tal caso, si ha che

$$z_k = \frac{2k+1}{2} \frac{h}{n}, \quad z_{k-1} = \frac{2k-1}{2} \frac{h}{n}, \quad \text{per } n = 2p+1,$$

$$z_k = k \frac{h}{n}, \quad z_{k-1} = (k-1) \frac{h}{n} \quad \text{se } k > 0,$$

$$z_k = (k+1) \frac{h}{n}, \quad z_{k-1} = k \frac{h}{n} \quad \text{se } k < 0,$$

per $n = 2p$.

353



Il caso dei laminati a strati identici

- Allora, si ottiene

$$b_k = \begin{cases} 2k & \text{se } n = 2p + 1, \\ 2k - \frac{k}{|k|}, b_0 = 0 & \text{se } n = 2p; \end{cases} \quad d_k = \begin{cases} 12k^2 + 1 & \text{se } n = 2p + 1, \\ 12k^2 - 12|k| + 4, d_0 = 0 & \text{se } n = 2p. \end{cases}$$

- Con questa numerazione, le sommatorie che appaiono nelle definizioni di **A**, **B**, **D** etc. sono estese da $k=-p$ a $k=p$.
- Queste formule permettono di verificare subito che i coefficienti b_k variano linearmente con la posizione dello strato e che hanno una distribuzione antisimmetrica rispetto al piano medio.
- Invece, i coefficienti d_k variano quadraticamente ed hanno una distribuzione simmetrica rispetto al piano medio.



L'utilizzo del metodo polare

- Si fa qui cenno all'utilizzo del metodo polare nella teoria classica dei laminati, in quanto questo permette di meglio evidenziare alcune proprietà e risultati generali concernenti i laminati a strati identici.
- Le leggi di composizione dei tensori che descrivono il comportamento dei laminati (**A**, **B**, **D**, **U** etc.) si applicano a una qualunque rappresentazione tensoriale, non solo quindi alle componenti cartesiane, ma anche a quelle polari (del resto, basta un rapido esame delle relazioni di pagina 170 per convincersene).
- Questa osservazione ci offre immediatamente le componenti polari dei tensori propri al laminato. Si deve inoltre ricordare che la rotazione da far subire alle componenti tensoriali è $-\delta_k$, se δ_k è l'angolo di cui è ruotato in senso trigonometrico lo strato k rispetto al riferimento globale del laminato.
- Se i simboli $-$, \wedge e \sim apposti sopra una quantità si riferiscono rispettivamente al comportamento di membrana, di accoppiamento e di flessione, allora si ha, per il caso di laminati a strati identici,



L'utilizzo del metodo polare

tensore **A** :

$$\bar{T}_0 = h T_0,$$

$$\bar{T}_1 = h T_1,$$

$$\bar{R}_0 e^{4i\bar{\phi}_0} = \frac{h}{n} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n e^{4i\delta_k},$$

$$\bar{R}_1 e^{2i\bar{\phi}_1} = \frac{h}{n} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n e^{2i\delta_k};$$

tensore **B** :

$$\hat{T}_0 = 0,$$

$$\hat{T}_1 = 0,$$

$$\hat{R}_0 e^{4i\hat{\phi}_0} = \frac{1}{2n^2} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1 e^{2i\hat{\phi}_1} = \frac{1}{2n^2} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n b_k e^{2i\delta_k};$$

tensore **A*** :

$$\bar{T}_0^* = T_0,$$

$$\bar{T}_1^* = T_1,$$

$$\bar{R}_0^* e^{4i\bar{\phi}_0} = \frac{1}{n} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n e^{4i\delta_k},$$

$$\bar{R}_1^* e^{2i\bar{\phi}_1} = \frac{1}{n} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n e^{2i\delta_k};$$

tensore **B*** :

$$\hat{T}_0^* = 0,$$

$$\hat{T}_1^* = 0,$$

$$\hat{R}_0^* e^{4i\hat{\phi}_0} = \frac{1}{n^2} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1^* e^{2i\hat{\phi}_1} = \frac{1}{n^2} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n b_k e^{2i\delta_k};$$

356



L'utilizzo del metodo polare

tensore **D** :

$$\tilde{T}_0 = \frac{h^3}{3} \frac{T_0}{4},$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{h^3}{3} \frac{T_1}{4},$$

$$\tilde{R}_0 e^{4i\tilde{\phi}_0} = \frac{1}{12n^3} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n d_k e^{4i\delta_k},$$

$$\tilde{R}_1 e^{2i\tilde{\phi}_1} = \frac{1}{12n^3} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n d_k e^{2i\delta_k}.$$

tensore **D*** :

$$\tilde{T}_0^* = T_0,$$

$$\tilde{T}_1^* = T_1,$$

$$\tilde{R}_0^* e^{4i\tilde{\phi}_0} = \frac{1}{n^3} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n d_k e^{4i\delta_k},$$

$$\tilde{R}_1^* e^{2i\tilde{\phi}_1} = \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n d_k e^{2i\delta_k}.$$

- Si osserva allora che la parte isotropa di **B** è nulla, e quindi che questo tensore è un tensore costituito da termini a media nulla. Per i laminati a strati identici, *disaccoppiamento* e *isotropia di B* coincidono.
- Inoltre, per questa ragione, si ha, vedi pagina 170, che $B_{xy} = B_{ss}$.

357



L'utilizzo del metodo polare

- Invece, per i tensori \mathbf{A}^* e \mathbf{D}^* la parte isotropa è la medesima ed è identica a quella dello strato di base. Questo significa che il comportamento medio (parte isotropa) del monostrato equivalente è identico al comportamento medio dello strato di base.
- Inoltre, per questi laminati, a strati identici, si è potuto, per ciascuna quantità, separare la parte che attiene alle proprietà del singolo strato da quella che è invece determinata dalla sequenza degli strati e dalla loro orientazione.
- Vedremo che questa separazione è importante nelle tecniche di progettazione dei laminati.
- Lo stesso tipo di risultati si ha per i tensori che descrivono il comportamento igro- termo- elastico.
- Limitandoci ai soli tensori \mathbf{U} , \mathbf{V} e \mathbf{W} , si ha infatti (per i tensori \mathbf{F} , \mathbf{G} ed \mathbf{H} si hanno dei risultati analoghi):



L'utilizzo del metodo polare

tensore \mathbf{U} :

$$\bar{\mathbf{T}} = h \mathbf{T},$$

$$\bar{\mathbf{R}} e^{2i\bar{\phi}} = \frac{h}{n} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tensore \mathbf{V} :

$$\hat{\mathbf{T}} = 0,$$

$$\hat{\mathbf{R}} e^{2i\hat{\phi}} = \frac{1}{2n^2} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tensore \mathbf{W} :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{h^3}{3} \mathbf{T},$$

$$\tilde{\mathbf{R}} e^{2i\tilde{\phi}} = \frac{1}{12n^3} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k};$$

tensore \mathbf{U}^* :

$$\bar{\mathbf{T}}^* = \mathbf{T},$$

$$\bar{\mathbf{R}}^* e^{2i\bar{\phi}} = \frac{1}{n} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tensore \mathbf{V}^* :

$$\hat{\mathbf{T}}^* = 0,$$

$$\hat{\mathbf{R}}^* e^{2i\hat{\phi}} = \frac{1}{n^2} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tensore \mathbf{W}^* :

$$\tilde{\mathbf{T}}^* = \mathbf{T},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^* e^{2i\tilde{\phi}} = \frac{1}{n^3} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k}.$$



L'utilizzo del metodo polare

- Ancora una volta, la parte isotropa di \mathbf{V} è nulla, come per \mathbf{B} , e quella di \mathbf{U}^* e \mathbf{W}^* è identica a quella dello strato di base, come per \mathbf{A}^* e \mathbf{D}^* .
- Inoltre, confrontando \mathbf{B} e \mathbf{V} , si osserva immediatamente che, se gli strati sono identici,

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{O},$$

ma il contrario non è vero. In altre parole, si possono avere laminati disaccoppiati termoelasticamente, ma accoppiati elasticamente. Questa proprietà può essere talvolta opportunamente sfruttata, ad esempio per la realizzazione di eliche termoformate a controllo passivo del passo (Winkler, 1986).

- Invece, un laminato elasticamente disaccoppiato sarà anche sempre termoelasticamente disaccoppiato (se a strati uguali).
- Quanto detto va precisato meglio; infatti, si è già osservato, pagina 346, che se $\mathbf{V}=\mathbf{O}$,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}\mathbf{W}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{U}.$$

L'utilizzo del metodo polare

- In altre parole, il disaccoppiamento termoelastico si ha, in un tal caso e per laminati a strati diversi, solo in rigidezza, per \mathbf{N} e \mathbf{M} , ma non in cedevolezza, per $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ e $\boldsymbol{\kappa}$.
- Tuttavia, da quanto visto si evince che nel caso di strati identici il disaccoppiamento elastico implica tutti i disaccoppiamenti:

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{V} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{G} = \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{O}.$$