

Capitolo 4

■ Criteri di resistenza per i compositi

<input type="checkbox"/> Generalità	235
<input type="checkbox"/> Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi	237
<input type="checkbox"/> Il criterio della tensione massima	248
<input type="checkbox"/> Il criterio della deformazione massima	253
<input type="checkbox"/> Il criterio di Tsai-Hill	257
<input type="checkbox"/> Il criterio di Hoffmann	268
<input type="checkbox"/> Il criterio di Tsai-Wu	272
<input type="checkbox"/> Confronti con i dati dell'esperienza	277
<input type="checkbox"/> Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza	282



Generalità

- L'analisi della crisi meccanica, elastica o di rottura, di un materiale eterogeneo e anisotropo presenta dei problemi inesistenti nel caso dei materiali classici, monofase e isotropi.
- Questo ha avuto come effetto la proposizione di un certo numero di criteri di resistenza concepiti ad hoc per questo tipo di materiali.
- Nel seguito, focalizzeremo l'attenzione soprattutto al caso di una lamina ortotropa, che ci interessa di più nelle applicazioni.
- In maniera sintetica, si può dire che gli effetti dell'anisotropia sulla resistenza e sulla formulazione di un criterio di crisi meccanica sono principalmente:
 - la variazione delle caratteristiche di resistenza con la direzione;
 - questo implica, tra l'altro, la necessità di caratterizzare la resistenza, tramite i tests sperimentali, in alcune direzioni privilegiate, in particolare le direzioni di ortotropia (inoltre, tests in direzioni differenti da quelle di simmetria materiale sarebbero molto complicati);
 - la non coassialità di tensioni e deformazioni: nella direzione di massimo sforzo non si ha in genere la direzione di massima deformazione.



Generalità

- Dal canto suo, l'eterogeneità influenza il fenomeno della rottura, o comunque del raggiungimento di uno stato limite, per un effetto struttura interno alla compagine del continuo, il che comporta:
 - l'insorgere di differenti meccanismi locali di rottura (ad esempio il *pull-out*, ossia lo sfilamento delle fibre dalla matrice, l'instabilità locale delle fibre in compressione, il danneggiamento della matrice etc.);
 - l'influenza sulla propagazione delle fessure, spesso benefica;
 - la differente resistenza in trazione e in compressione.
- Nel seguito, ci limiteremo ad analizzare il problema della formulazione di un criterio di crisi per un continuo anisotropo omogeneo, in cui cioè l'eterogeneità non appare nella formulazione del modello.
- In altre parole, ci limiteremo ad analizzare il problema della crisi meccanica di una lamina in composito dal punto di vista macroscopico. Naturalmente, questo implica la rinuncia all'analisi di tutti quei fenomeni localizzati, citati qui sopra, che difficilmente possono essere colti da un'analisi di sintesi.



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Si è già detto che l'anisotropia ha diversi effetti rispetto alla formulazione di un criterio di resistenza; in particolare, si deve osservare che, dal momento che le caratteristiche di resistenza variano con la direzione, non è detto che sia la tensione principale massima il parametro che governa il problema.
- In effetti, ciò che si deve confrontare non è il valore della tensione principale massima con il valore massimo della resistenza in quella direzione principale, ma piuttosto il campo di sforzo effettivo con il campo di sforzo ammissibile.
- In altre parole, mentre in un materiale isotropo la resistenza è indipendente dall'orientazione dello stato di sforzo applicato (ruotando le direzioni principali niente cambia), in un materiale anisotropo la resistenza è funzione dell'orientazione del campo di sforzo, a parità di tutti gli altri fattori.
- In particolare, in una lamina ortotropa, la resistenza è funzione dell'orientazione delle tensioni principali rispetto agli assi di ortotropia.



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- La maggior parte dei dati sperimentali di resistenza si riferiscono ad un test monoassiale; l'uso di un criterio di resistenza permette, come noto, di interpretare il risultato di questi tests anche per campi di sforzo non monoassiali.
- Nel caso di un materiale anisotropo, una difficoltà ulteriore sta nel fatto che questi tests forniscono dei valori di resistenza monoassiale in direzioni particolari. Si deve dunque tenerne conto nel criterio di resistenza.
- Lo scopo è, come di consueto, quello di ottenere delle superfici o curve limite nello spazio delle tensioni, con il quale confrontare lo stato di tensione attuale.
- Tuttavia, nell'utilizzo delle curve o superfici limite si perdono delle informazioni sul tipo di crisi che si produce: per questa ragione, tali criteri si chiamano anche *fenomenologici*, nel senso che sono in grado di cogliere, più o meno bene, il momento della crisi, ma non la sua ragione, il suo meccanismo.

238



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- In altri criteri, invece, si considerano dei possibili meccanismi macroscopici di crisi e si considera che questi non siano interagenti tra loro; in tali criteri (tensione massima o deformazione massima), si individua dunque il meccanismo di rottura, almeno macroscopicamente (come già detto, in tutti questi approcci si rinuncia a priori a conoscere nel dettaglio la ragione locale, micromeccanica, della crisi).
- Si deve anche specificare che, contrariamente a quanto accade per i materiali metallici, nei compositi la crisi è praticamente sempre una crisi di rottura: i materiali compositi comuni (carbonio-epoxy, vetro-epoxy etc.) hanno un *comportamento fragile*, senza fase plastica.
- Le superfici o curve limite sono dunque degli involuipi limite di rottura e non di plasticità.
- In generale, per una lamina ortotropa, i dati necessari per individuare la crisi sono 5, e quindi 5 sono i tests indipendenti necessari a caratterizzare una lamina ortotropa per quanto riguarda la sua resistenza.

239



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

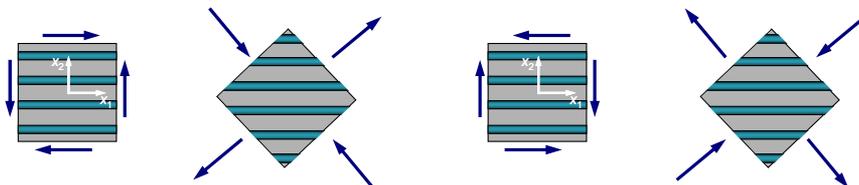
- Infatti, si devono conoscere:
 - X_t : tensione limite di trazione in direzione x_1 ;
 - X_c : tensione limite di compressione in direzione x_1 ;
 - Y_t : tensione limite di trazione in direzione x_2 ;
 - Y_c : tensione limite di compressione in direzione x_2 ;
 - S : tensione limite a taglio.
- Da notare che nel prosieguo i parametri di resistenza sono tutti considerati come quantità positive.
- I parametri di resistenza sono almeno 5 perché in genere la resistenza a compressione è differente da quella a trazione, per differenti ragioni.
- In particolare, se x_1 è la direzione delle fibre (come normalmente si pone), allora in genere si osserva che $X_c < X_t$, mentre $Y_c > Y_t$.
- Questo perché in direzione longitudinale (x_1) le fibre resistono bene alla trazione, e meno bene alla compressione, anche per effetti di instabilità locale delle fibre.

240



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- In direzione trasversale (x_2), è il contrario: infatti, mentre a compressione la matrice governa la resistenza, a trazione questa è influenzata dalla presenza delle fibre e dunque dell'interfaccia fibre-matrice, che in genere non assicura lo stesso livello di resistenza; inoltre, la matrice, che spesso ha comportamento fragile, ha in genere una migliore resistenza alla compressione che alla trazione.
- Infine, la resistenza al taglio, essenzialmente data dalla matrice, non dipende dal segno delle tensioni di taglio, come si capisce facilmente per ragioni di simmetria, vedi figura.



241



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Un altro problema che comporta l'anisotropia, rispetto all'elaborazione di un criterio di resistenza, è quello relativo alla decomposizione dell'energia di deformazione in parte sferica e deviatorica.
- Come noto infatti, il criterio di Huber-Hencky-von Mises, normalmente accettato come criterio di plasticità per le leghe isotrope, può essere interpretato come un criterio in cui si limita l'*energia di deformazione deviatorica* o di *distorsione*, ossia la parte di energia di deformazione che è legata ai cambiamenti di forma ma non di volume.
- I due tensori degli sforzi e delle deformazioni si possono decomporre in parti sferica e deviatorica,

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D, \quad \sigma_S = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \mathbf{I}, \quad \sigma_D = \sigma - \sigma_S,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D, \quad \varepsilon_S = \frac{1}{3} \text{tr} \varepsilon \mathbf{I}, \quad \varepsilon_D = \varepsilon - \varepsilon_S,$$

242



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Il presupposto di base per l'applicazione del criterio di Huber-Hencky-von Mises è che la parte deviatorica del tensore degli sforzi produca solo uno stato deformativo deviatorico, in modo che si possa isolare la quota parte di energia di deformazione che è inerente alle distorsioni, quota parte che è la sola ad essere limitata nel criterio suddetto.
- In altre parole, la variazione di volume inerente alla parte deviatorica del tensore degli sforzi deve essere nulla:

$$\text{tr}(\mathbf{Z} \sigma_D) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{tr} \left[\mathbf{Z} \left(\sigma - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \mathbf{I} \right) \right] = 0 \quad \rightarrow$$

$$3 \text{tr}(\mathbf{Z} \sigma) - \text{tr} \sigma \text{tr}(\mathbf{Z} \mathbf{I}) = 0 \quad \forall \sigma.$$

- In forma indiciale, la condizione sopra è

$$\sigma_{ij} Z_{hhkk} = 3 Z_{jjkl} \sigma_{kl}, \quad h, i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

che in esteso diviene

243



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

$$\frac{1}{3}[Z_{1111}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) + Z_{2222}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) + Z_{3333}(2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11})] +$$

$$+ \frac{2}{3}[Z_{1122}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + Z_{1133}(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{22}) + Z_{2233}(\sigma_{33} + \sigma_{22} - 2\sigma_{11})] +$$

$$+ 2(Z_{1123} + Z_{2223} + Z_{3323})\sigma_{23} + 2(Z_{1113} + Z_{2213} + Z_{3313})\sigma_{13} +$$

$$2(Z_{1112} + Z_{2212} + Z_{3312})\sigma_{12} = 0.$$

- Questa quantità non è in generale nulla e quindi, per un corpo anisotropo, uno stato di tensione deviatorico è accompagnato anche da una variazione di volume.
- Del resto, questo è la logica conseguenza di quanto già osservato in precedenza, quando si è discusso degli accoppiamenti tra tensioni e deformazioni, pagina 72 e seguenti, in cui si è notato, ad esempio, che una tensione di taglio è anche accompagnata da una deformazione normale etc.
- Nel caso di un materiale ortotropo, la relazione sopra, scritta nel riferimento d'ortotropia, diviene

244



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

$$\frac{1}{3}[Z_{1111}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) + Z_{2222}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) + Z_{3333}(2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11})] +$$

$$+ \frac{2}{3}[Z_{1122}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + Z_{1133}(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{22}) + Z_{2233}(\sigma_{33} + \sigma_{22} - 2\sigma_{11})] = 0.$$

- Il problema quindi sussiste, come pure, lo si verifica facilmente, anche per i casi di simmetria di ordine 3, 4 e 6 (isotropia trasversa).
- Tuttavia, se si considera il caso della simmetria cubica, cioè di un'ortotropia in cui

$$Z_{1111} = Z_{2222} = Z_{3333}, \quad Z_{1122} = Z_{1133} = Z_{2233},$$

allora si verifica subito che la condizione qui sopra è rispettata.

- Dunque, per un materiale a simmetria cubica, è sempre possibile separare la parte di energia di distorsione da quella volumica. In teoria, quindi, per questi corpi è ancora possibile, almeno come approccio macroscopico, applicare il criterio di Huber-Hencky-von Mises.

245



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Fisicamente, questo significa che un corpo a simmetria cubica subisce, per effetto di campi di tensioni sferici, solo variazioni di volume, non di forma.
- Questo non è vero, in generale, nemmeno per un solido ortotropo: a causa delle differenze di rigidità lungo gli assi di ortotropia, un cubo di materiale ortotropo si trasforma, sotto un'azione di tipo idrostatico, in un parallelepipedo, non in un cubo.
- Il caso dell'isotropia può essere visto come un caso particolare della simmetria cubica; inoltre, tramite le equazioni di Lamé si verifica facilmente che

$$\sigma_S = \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_S, \quad \sigma_D = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_D.$$

- Il requisito fondamentale, in effetti, per questa decomposizione, è che i moduli di Young e i coefficienti di Poisson nelle tre direzioni di simmetria siano i medesimi, e per questo basta la simmetria cubica, non occorre l'isotropia.

246



Necessità di criteri ad hoc per i materiali anisotropi

- Per terminare, si riporta qui di seguito una tabella con alcuni valori tipici dei parametri di rigidità e resistenza di lamine in composito unidirezionale (fonte: Jones; i moduli e i parametri di resistenza sono in GPa).

Proprietà	Vetro-epoxy	Boro-epoxy	Carbonio-epoxy	Kevlar-epoxy
E_1	54	207	207	76
E_2	18	21	5	5.5
ν_{12}	0.25	0.3	0.25	0.34
G_{12}	9	7	2.6	2.1
X_t	1.035	1.38	1.035	1.38
Y_t	0.028	0.083	0.041	0.028
S	0.041	0.124	0.069	0.044
X_c	1.035	2.76	0.689	0.276
Y_c	0.138	0.276	0.117	0.138

247



Il criterio della tensione massima

- Il criterio della tensione massima è un criterio che non considera le interazioni possibili tra i vari meccanismi di rottura, ma si basa sul confronto tra le tensioni effettive e i parametri di resistenza del materiale.
- Dal momento che i parametri di resistenza sono noti solo nelle direzioni di ortotropia, è in quelle direzioni che il confronto si deve operare.
- In altre parole, il criterio della tensione massima confronta le tensioni calcolate nel riferimento di ortotropia con i parametri di resistenza del materiale.
- In definitiva, si assume che si sia raggiunto uno stato di crisi se una delle seguenti 5 condizioni non è rispettata:

$$\begin{aligned} -X_c &\leq \sigma_1 \leq X_t, \\ -Y_c &\leq \sigma_2 \leq Y_t, \\ |\sigma_6| &\leq S. \end{aligned}$$



Il criterio della tensione massima

- In pratica, è come se si dovessero verificare cinque criteri in luogo di uno solo.
- L'eventuale condizione violata indica anche il meccanismo di crisi; ad esempio, se non si verifica la condizione $\sigma_2 \leq Y_t$, significa che la crisi si produrrà per trazione eccessiva in direzione ortogonale alle fibre e quindi per presumibile rottura della matrice.
- Si insiste sul fatto che il confronto si opera nel riferimento di ortotropia, l'unico nel quale si conoscono i parametri di resistenza.
- Simbolicamente, e coerentemente con quanto fatto in precedenza, si indica questo riferimento con gli assi $\{x_1, x_2\}$, essendo per convenzione, nel caso unidirezionale, x_1 coincidente con la direzione delle fibre, e quindi le tensioni con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$, mentre un altro riferimento sarà indicato con $\{x, y\}$ e le tensioni in esso valutate con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s$.
- Il passaggio da un riferimento qualsiasi, in cui sono note le tensioni, a quello di ortotropia si effettua con le formule viste nel capitolo 2:



Il criterio della tensione massima

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma\} = [T]^{-1}\{\sigma'\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

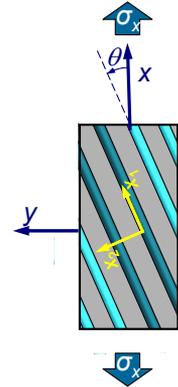
- Il criterio, in un riferimento qualsiasi, è dunque ($s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$):

$$-X_c \leq c^2 \sigma_x + s^2 \sigma_y - 2cs \sigma_s \leq X_t,$$

$$-Y_c \leq s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y + 2cs \sigma_s \leq Y_t,$$

$$|cs \sigma_x - cs \sigma_y + (c^2 - s^2) \sigma_s| \leq S.$$

- Consideriamo allora il caso di una lamina unidirezionale sottoposta ad uno stato di tensione monoassiale, di trazione o compressione, variabile con l'inclinazione θ rispetto all'asse x_1 , vedi figura.



250



Il criterio della tensione massima

- Rispetto al riferimento d'ortotropia, lo stato di tensione è biassiale, per un angolo θ qualsiasi. Applicando la formula di rotazione si ottiene

$$-\frac{X_c}{\cos^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{X_t}{\cos^2 \theta},$$

$$-\frac{Y_c}{\sin^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{Y_t}{\sin^2 \theta},$$

$$|\sigma_x| \leq \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.$$

- Si possono quindi tracciare le curve corrispondenti ad ognuna delle condizioni qui sopra. Allora, σ_x limite è, per ogni orientazione, il valore che corrisponde alla curva inferiore.
- A titolo di esempio, si riporta il caso di un composito vetro-epoxy, le cui caratteristiche sono indicate qui di seguito. Si sono tracciati due diagrammi, uno con le curve per il caso di tensione monoassiale di trazione, l'altro per tensione di compressione.

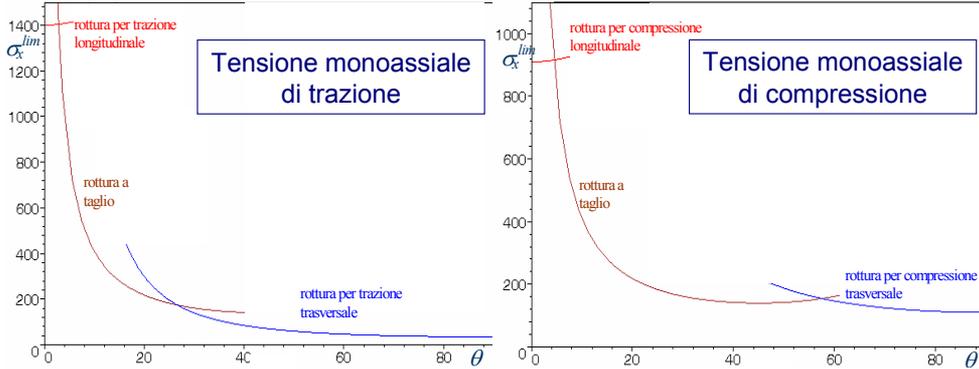
251



Il criterio della tensione massima

- Caratteristiche meccaniche del composito vetro-epoxy utilizzato:

<input type="checkbox"/> $X_t = 1.4$ GPa	$E_1 = 46$ GPa
<input type="checkbox"/> $X_c = 0.91$ GPa	$E_2 = 10$ GPa
<input type="checkbox"/> $Y_t = 0.035$ GPa	$G_{12} = 4.6$ GPa
<input type="checkbox"/> $Y_c = 0.11$ GPa	$\nu_{12} = 0.31$
<input type="checkbox"/> $S = 0.07$ GPa	



252

Il criterio della deformazione massima

- Il criterio della deformazione massima è come quello della tensione massima, con la sola differenza che in questo caso i limiti si pongono sulle deformazioni:

$$\begin{aligned}
 -X_{\varepsilon c} &\leq \varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon t}, \\
 -Y_{\varepsilon c} &\leq \varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon t}, \\
 |\varepsilon_6| &\leq S_{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

- Con $X_{\varepsilon c}$ etc. si sono indicate le deformazioni limite.
- Le deformazioni possono essere espresse in funzione delle tensioni, e con le formule di rotazione, si possono scrivere le condizioni sopra in un riferimento qualsiasi:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} = [S][T]^{-1}\{\sigma'\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

253

Il criterio della deformazione massima

- Si ottengono dunque le condizioni seguenti:

$$-X_{\varepsilon c} \leq \frac{1}{E_1} [(c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2cs(1 + \nu_{12})\sigma_s] \leq X_{\varepsilon t},$$

$$-Y_{\varepsilon c} \leq \frac{1}{E_2} [(s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2cs(1 + \nu_{21})\sigma_s] \leq Y_{\varepsilon t},$$

$$\frac{1}{G_{12}} |cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| \leq S_{\varepsilon}.$$

- D'altra parte, il comportamento a rottura dei compositi è, come già detto, il più sovente fragile: la rottura si produce al limite della fase elastica.
- Se si accoglie dunque questa ipotesi, è allora evidente che

$$X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_1}, \quad X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_1}, \quad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_2}, \quad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_2}, \quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{12}}.$$



Il criterio della deformazione massima

- In tal caso, le condizioni limite diventano

$$-X_c \leq (c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2cs(1 + \nu_{12})\sigma_s \leq X_t,$$

$$-Y_c \leq (s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2cs(1 + \nu_{21})\sigma_s \leq Y_t,$$

$$|cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| \leq S.$$

- Si vede dunque che niente cambia, rispetto al criterio della tensione massima, per la verifica a taglio, mentre per la verifica delle tensioni normali c'è unicamente l'apparizione dei coefficienti di Poisson: questo modifica solo leggermente i risultati precedenti, ottenuti con il criterio della tensione massima.
- Si riporta ancora il caso della lamina in vetro-epoxy sottoposta a una tensione monoassiale variabile in orientazione: i risultati sono solo poco dissimili da quelli precedenti, a conferma di quanto detto sopra.

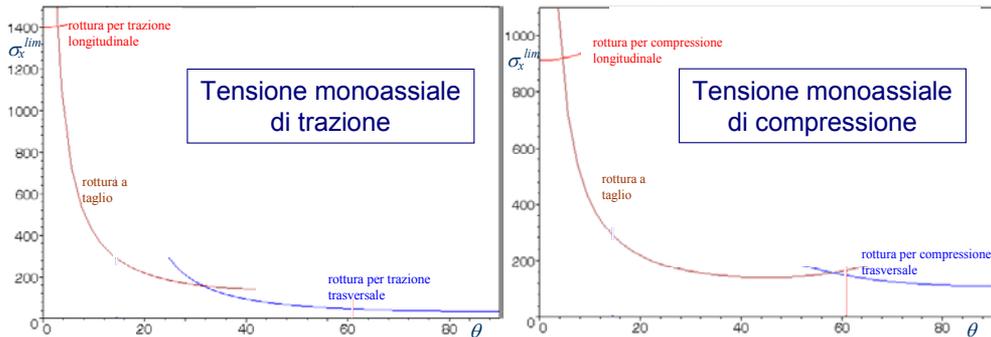


Il criterio della deformazione massima

$$-\frac{X_c}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta},$$

$$-\frac{Y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta},$$

$$|\sigma_x| \leq \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.$$



256



Il criterio di Tsai-Hill

- Il criterio di Tsai-Hill è un criterio fenomenologico che Tsai (1968) ha elaborato per le lamine in composito a partire dal criterio di Hill (1950), pensato in origine per materiali ortotropi qualunque.
- Il criterio di Hill è una generalizzazione del criterio di Huber-Hencky-von Mises, in cui però, a differenza di quest'ultimo, si prende in considerazione tutta l'energia di deformazione, e non solo quella di distorsione, perché, come visto, nel caso anisotropo non è in generale possibile separare la parte di energia di distorsione da quella di cambiamento di volume.
- Il criterio di Hill si formula come segue, nel riferimento di ortotropia:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\sigma_4^2 + 2M\sigma_5^2 + 2N\sigma_6^2 \leq 1.$$

- I coefficienti F , G , H , L , M e N sono i parametri di resistenza di Hill; sono da interpretarsi come valori limite di snervamento per i materiali duttili e di rottura per i fragili.

257



Il criterio di Tsai-Hill

- Tsai ha semplicemente adattato il calcolo di questi parametri al caso di una lamina ortotropa; per far questo, ha semplicemente considerato dei casi di carico particolarmente semplici.
- Se $\sigma_6 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ per $i=1, \dots, 5$, allora il criterio si riduce a

$$2N\sigma_6^2 = 1 \rightarrow N = \frac{1}{2\sigma_6^2}.$$

- Ma se si è allo stato limite, significa che σ_6 prende il suo valore limite, che è S_{xy} ; dunque:

$$N = \frac{1}{2S_{xy}^2}.$$

- In modo analogo, ponendo successivamente $\sigma_4 \neq 0$ e $\sigma_5 \neq 0$ con le altre componenti di tensione nulle, si ottiene

$$L = \frac{1}{2S_{yz}^2}, \quad M = \frac{1}{2S_{xz}^2}.$$

Il criterio di Tsai-Hill

- Se $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ per $i=2, \dots, 6$, allora il criterio si riduce a

$$(G + H)\sigma_1^2 = 1 \rightarrow G + H = \frac{1}{\sigma_1^2}.$$

- Ma se si è allo stato limite, significa che σ_1 prende il suo valore limite, che è X ; dunque:

$$G + H = \frac{1}{X^2}.$$

- In modo analogo, ponendo successivamente $\sigma_2 \neq 0$ e $\sigma_3 \neq 0$ con le altre componenti di tensione nulle, si ottiene

$$F + H = \frac{1}{Y^2}, \quad F + G = \frac{1}{Z^2}.$$

- Da queste tre ultime condizioni si ricava finalmente

Il criterio di Tsai-Hill

$$F = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right],$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \right],$$

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right].$$

- Quindi, il criterio di Hill si può riscrivere nella forma

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_1\sigma_3 - \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_4}{S_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2 \leq 1.$$



Il criterio di Tsai-Hill

- Nel caso di una lamina in stato piano di tensione, $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$, e quindi ci si riduce a

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2 \leq 1.$$

- D'altra parte, per una lamina in composito, $Z=Y$ (ricordarsi quanto detto a pagina 115 sulle lamine in composito) e $S_{xy}=S$. Dunque

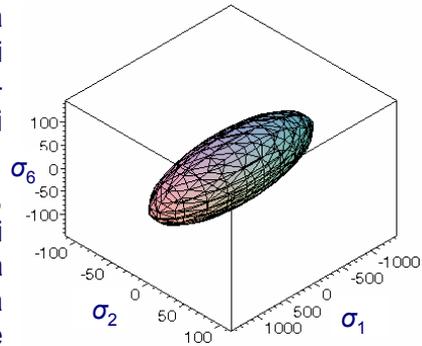
$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2 \leq 1.$$

- Questa equazione è quella che esprime il criterio di Tsai-Hill per una lamina ortotropa in stato piano di tensione, che è il caso di interesse nello studio dei materiali compositi.
- Si devono fare alcune osservazioni su questo criterio. Innanzitutto, si ha adesso una sola condizione in luogo di cinque; si può dunque tracciare la superficie limite nello spazio delle tensioni.



Il criterio di Tsai-Hill

- Il grafico a lato presenta questa superficie, tracciata nel riferimento di ortotropia, per il composito in vetro-epoxy già utilizzato negli esempi precedenti (pagina 252).
- Il criterio è dunque ben interattivo, prevede cioè l'interazione tra i meccanismi di rottura, almeno a livello macroscopico, ma fenomenologico, non è capace cioè di determinare la causa della crisi, il meccanismo di rottura.
- In secondo luogo, l'equazione precedente determina la condizione limite; quindi uno stato ammissibile di tensione è quello in cui il primo membro dell'equazione precedente assume un valore inferiore ad 1.



262



Il criterio di Tsai-Hill

- Infine, ed è il problema principale del criterio di Tsai-Hill, non si è fatta alcuna distinzione tra la resistenza alla trazione e quella alla compressione, che come si è visto sono in genere differenti.
- Questo inconveniente è insito nel criterio di Hill, che all'origine era concepito per materiali metallici e cercava di cogliere il momento della crisi elasto-plastica; in quel contesto, la resistenza non dipende dal segno delle tensioni.
- La superficie del grafico precedente è dunque valida, a rigore, solo laddove le tensioni sono di trazione, altrove deve essere sostituita con una superficie tracciata prendendo in conto le caratteristiche di resistenza a compressione.
- Ancora una volta, utilizzando come in precedenza la formula di rotazione delle tensioni, pagina 250, si ottiene l'espressione del criterio in un riferimento qualsiasi:

263



Il criterio di Tsai-Hill

$$\left(\frac{c^2\sigma_x + s^2\sigma_y - 2cs\sigma_s}{X} \right)^2 + \left(\frac{s^2\sigma_x + c^2\sigma_y + 2cs\sigma_s}{Y} \right)^2 - \frac{(c^2\sigma_x + s^2\sigma_y - 2cs\sigma_s)(s^2\sigma_x + c^2\sigma_y + 2cs\sigma_s)}{X^2} + \left[\frac{cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s}{S} \right]^2 \leq 1.$$

- Infine, nel caso, come in precedenza, di uno stato di tensione monoassiale variabile con l'orientazione, si ottiene la curva limite

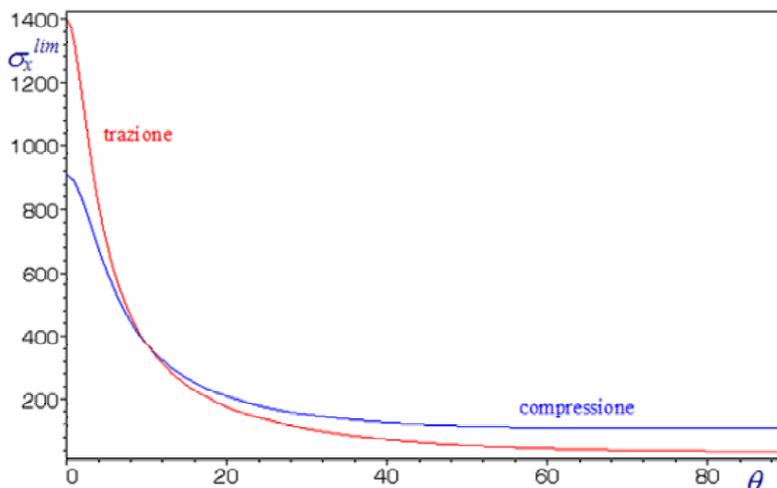
$$\sigma_x^2 \left[\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \right] = 1.$$

- Di seguito, si riportano le curve limite, per trazione e compressione, date dall'equazione sopra nel caso del composito in vetro-epoxy già trattato.

264



Il criterio di Tsai-Hill

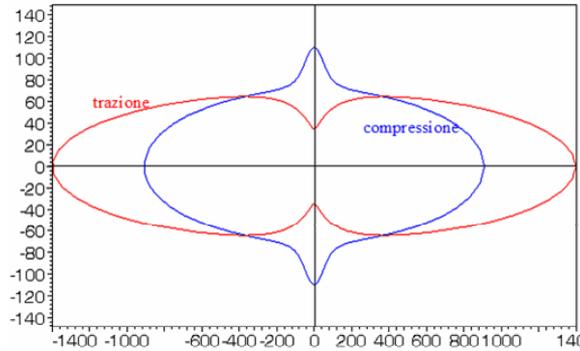


265



Il criterio di Tsai-Hill

- Il diagramma seguente presenta le stesse curve, ma in grafico direzionale.

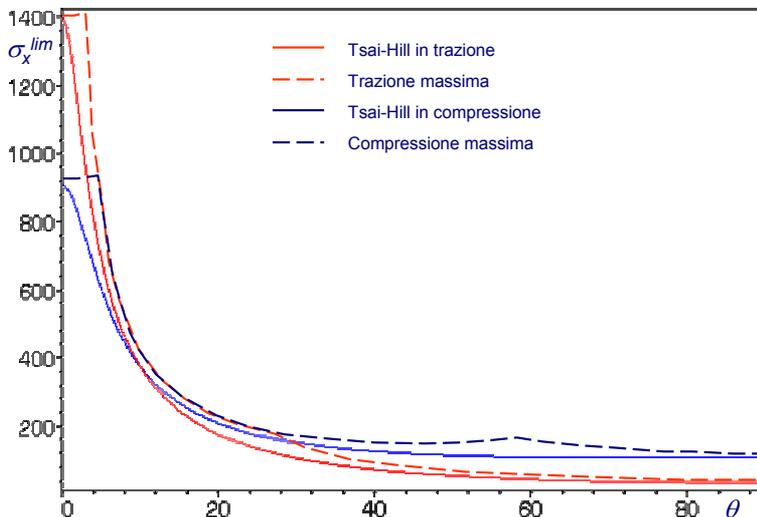


- Infine, si riporta il confronto tra il criterio di Hill e quello della tensione massima, per il caso in esame; si nota la potenza del criterio di Hill, che riesce, con una sola curva, a rappresentare tutti i casi del criterio della tensione massima.

266



Il criterio di Tsai-Hill



267



Il criterio di Hoffmann

- Il criterio di Hoffmann (1967) è una generalizzazione del criterio di Hill, in cui si prende in conto la differenza di resistenza in trazione e in compressione.
- La condizione di ammissibilità del campo delle tensioni per il criterio di Hoffmann si scrive come segue

$$C_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\sigma_4^2 + C_8\sigma_5^2 + C_9\sigma_6^2 \leq 1.$$

- Le 9 costanti C_i sono determinate in base alle 9 resistenze nelle direzioni di ortotropia, $X_t, X_c, Y_t, Y_c, Z_t, Z_c, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$, con un procedimento analogo a quello visto per il criterio di Tsai-Hill.
- Si ottengono le seguenti relazioni:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right], \quad C_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right],$$



Il criterio di Hoffmann

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right],$$

$$C_4 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad C_5 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \quad C_6 = \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c},$$

$$C_7 = \frac{1}{S_{yz}^2}, \quad C_8 = \frac{1}{S_{xz}^2}, \quad C_9 = \frac{1}{S_{xy}^2}.$$

- Nel caso di stato piano di tensione, la condizione si riduce a

$$C_1\sigma_2^2 + C_2\sigma_1^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_9\sigma_6^2 \leq 1.$$

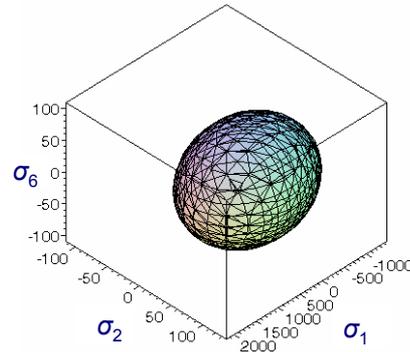
- Quindi, per una lamina ($Z_t=Y_t, Z_c=Y_c, S_{xy}=S$) si ottiene:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1.$$



Il criterio di Hoffmann

- L'equazione precedente definisce la superficie limite di Hoffmann nello spazio delle tensioni, nel riferimento di ortotropia.
- Nel caso di uguale resistenza a trazione e compressione, si verifica immediatamente che il criterio di Hoffmann coincide con quello di Tsai-Hill.
- I termini che sono lineari nelle componenti di tensione servono a rappresentare una diversa resistenza in trazione e compressione, e spostano la superficie limite, che è un'ellissoide, nello spazio delle tensioni.
- La figura seguente rappresenta la superficie limite nel caso del composito in vetro-epoxy già più volte visto.



270



Il criterio di Hoffmann

- La superficie limite è un ellissoide simmetrico rispetto al piano $\sigma_6=0$, il cui centro si trova in corrispondenza del punto

$$\sigma_1 = \frac{X_t + X_c}{2} + \frac{Y_t + Y_c}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{Y_t + Y_c}{2} + \frac{(X_t + X_c)Y_t Y_c}{4X_t X_c}, \quad \sigma_6 = 0.$$

- L'angolo che il primo asse dell'ellissoide forma con l'asse x_1 è

$$\beta = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(\frac{Y_t Y_c}{X_t X_c} - 1 \right).$$

- Il criterio di Hoffmann è, da un punto di vista del calcolo, il più semplice da utilizzare, soprattutto se si considerano procedure automatiche di calcolo.

271



Il criterio di Tsai-Wu

- Tsai e Wu (1971) hanno proposto un criterio tensoriale per i materiali ortotropi, in cui il numero dei parametri di resistenza è superiore a quello dei criteri precedenti, allo scopo di meglio interpolare i dati dell'esperienza.
- In questo criterio, si introducono due tensori di resistenza, \mathbf{f} e \mathbf{F} , il primo di ordine 2 e il secondo di ordine 4. Questi tensori hanno le simmetrie dell'elasticità.
- Il criterio di resistenza, scritto nel riferimento di ortotropia e in notazione di Voigt, è il seguente:

$$f_i \sigma_i + F_{hk} \sigma_h \sigma_k \leq 1, \quad i, h, k = 1, \dots, 6.$$

- Nel caso di una lamina in stato piano di tensione, la condizione qui sopra si riduce a

$$f_i \sigma_i + F_{hk} \sigma_h \sigma_k \leq 1, \quad i, h, k = 1, 2, 6 \rightarrow$$
$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 \leq 1.$$

272



Il criterio di Tsai-Wu

- Vale, per i termini lineari e la forma della superficie limite, quanto già osservato nel criterio di Hoffmann.
- I parametri f_i e F_{ij} si determinano in modo analogo a quanto fatto nei criteri precedenti.
- Se $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ per $i=2,6$, allora il criterio si riduce a

$$f_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 = 1.$$

- Allo stato limite, σ_1 diventa X_t se la tensione è di trazione, X_c se di compressione; considerando questi due casi distinti, si ottengono dunque le due relazioni

$$f_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_c X_t}.$$

- In modo analogo, se $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ per $i=1,6$, si ottiene

$$f_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_c Y_t}.$$

273



Il criterio di Tsai-Wu

- Se poi è $\sigma_6 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ per $i=1,2$, e considerando che non c'è differenza di resistenza con il segno della tensione a taglio, si ottiene

$$f_6 = 0, \quad F_{66} = \frac{1}{S^2}.$$

- La determinazione dell'ultimo termine F_{12} è più delicata: non si dispone di ulteriori tests monoassiali e dunque deve essere ricavato tramite un test biassiale in cui $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$.
- Ora, non soltanto i tests biassiali sono più difficili da essere eseguiti, ma di questi tests ne esiste una infinità diversa, per il valore relativo delle due tensioni.
- Se ad esempio si prende uno stato di tensione biassiale con $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, si ottiene la condizione

$$(f_1 + f_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1.$$



Il criterio di Tsai-Wu

- Utilizzando le espressioni appena trovate per gli altri parametri di resistenza, si ottiene dunque

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right].$$

- Quindi, il valore di F_{12} dipende non soltanto dal valore degli altri parametri di resistenza, ma anche dal livello di tensione σ con cui si produce la rottura biassiale.
- Diversi autori considerano che il termine F_{12} ha scarsa importanza sul risultato finale e addirittura, propongono semplicemente di porlo uguale a zero. Altri hanno mostrato sperimentalmente che questo termine produce una piccola variazione dei risultati anche quando sia variato di un ordine di grandezza.
- Ad ogni modo, il criterio di Tsai-Wu viene scritto in genere nel modo seguente:

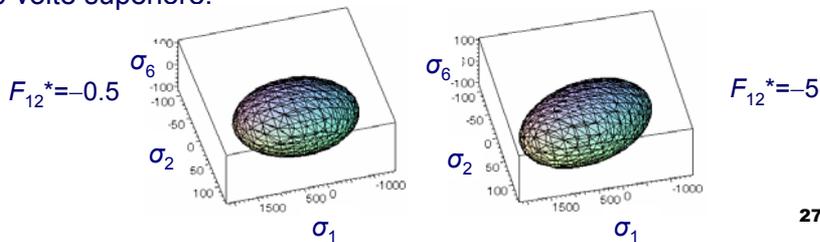


Il criterio di Tsai-Wu

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} \leq 1,$$

con $F_{12}^* = F_{12} X_t X_c$.

- Si osserva immediatamente che se $F_{12}^* = -1/2$, il criterio di Tsai-Wu coincide con quello di Hoffmann, che quindi ne è un caso particolare. Se inoltre le resistenze a trazione e compressione sono uguali, allora Tsai-Wu coincide con Tsai-Hill.
- A titolo di esempio, si riportano le superfici limite per il caso più volte trattato del composito vetro-epoxy, per i valori $F_{12}^* = -1/2$ e -5 , cioè 10 volte superiore.



Confronti con i dati dell'esperienza

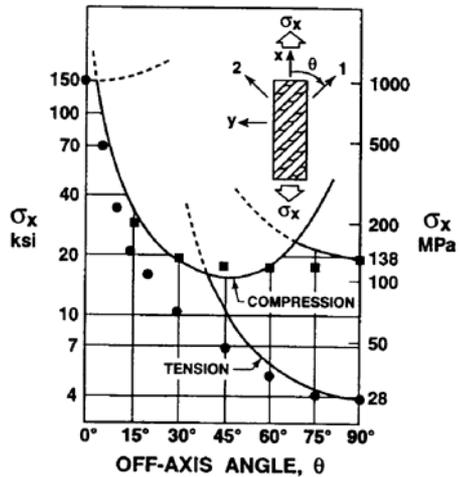
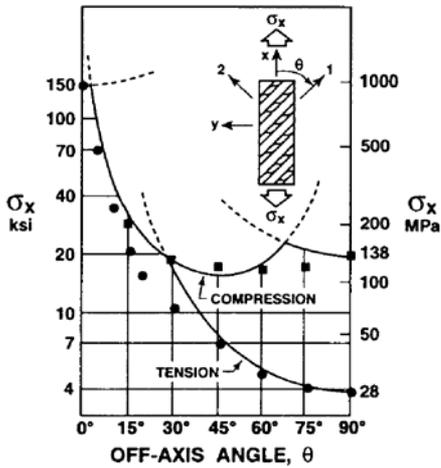
- Si riportano di seguito alcuni grafici che riguardano il caso trattato di uno stato monoassiale di tensione ad orientazione variabile, in cui certi dati dell'esperienza sono confrontati con le predizioni fatte tramite uno dei criteri passati in rassegna.
- I dati, tratti dal libro di Jones, si riferiscono ad una campagna di tests condotta da Tsai principalmente su compositi in vetro-epoxy; i dati caratteristici sono quelli riportati nella tabella a pagina 247, a eccezione del parametro S che vale 0.055 Gpa.
- Nel confronto dei dati sperimentali con i criteri della tensione e della deformazione massima, si nota che le "cuspidi" nelle curve teoriche in realtà non trovano riscontro nei dati sperimentali, che seguono un andamento più regolare.
- Questo è interpretato da alcuni come una prova del fatto che esiste una interazione tra i modi di rottura.



Confronti con i dati dell'esperienza

Criterio della tensione massima

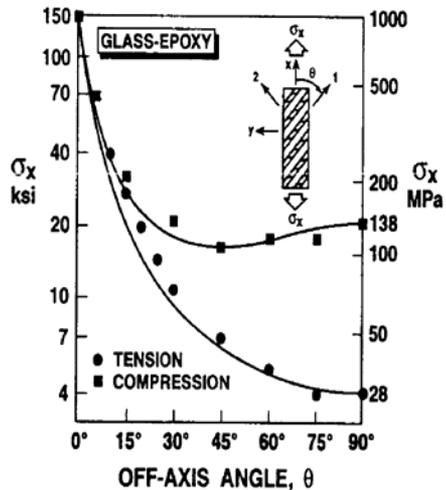
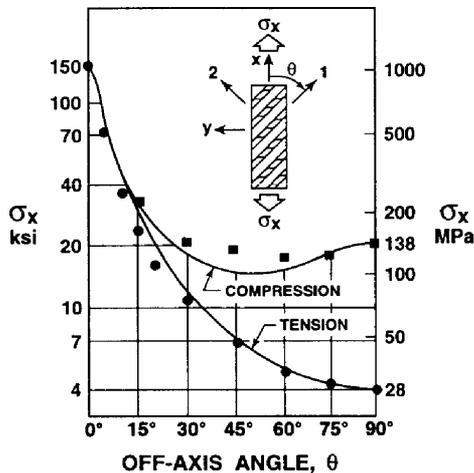
Criterio della deformazione massima



Confronti con i dati dell'esperienza

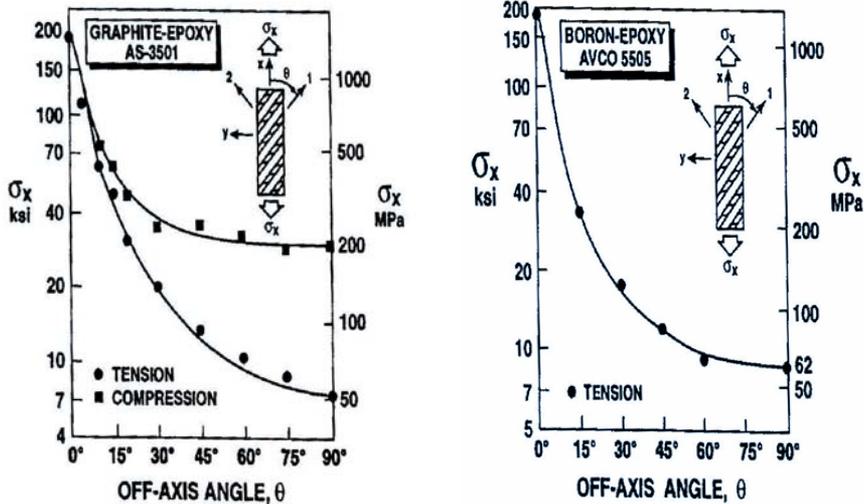
Criterio di Tsai-Hill

Criterio di Hoffmann



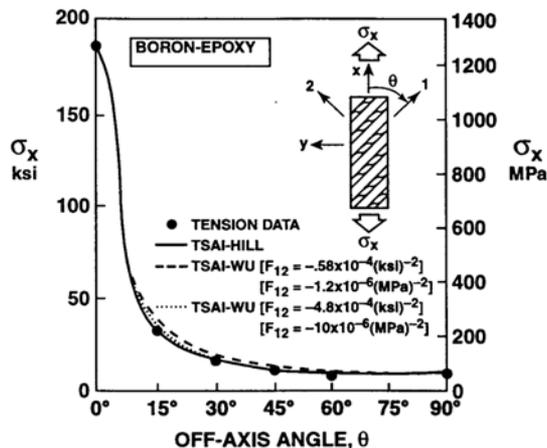
Confronti con i dati dell'esperienza

- I grafici che seguono sono relativi al criterio di Hoffmann, su compositi in carbonio-epoxy e boro-epoxy.



Confronti con i dati dell'esperienza

- Per terminare, un diagramma che riguarda il criterio di Tsai-Wu, con due valori distinti di F_{12} , e il confronto con i dati dell'esperienza su un composito in boro-epoxy e con i risultati del criterio di Tsai-Hill.
- Come si può notare, i risultati delle tre curve sono molto vicini tra loro e ai dati sperimentali.



Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

- Diamo alcuni cenni, adesso, ai modelli utilizzati per predire la resistenza di una lamina in funzione dei parametri di resistenza delle fasi; in altre parole, ci occupiamo brevemente di omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza.
- In particolare, ci limiteremo a dare alcuni cenni all'omogeneizzazione della resistenza alla trazione in direzione delle fibre; si rimanda alla letteratura specializzata per un approfondimento della materia.
- Il modello che consideriamo è il seguente:
 - fibre tutte della stessa resistenza
 - rottura fragile delle fibre
 - comportamento elastico lineare di fibre e matrice
 - deformazione limite delle fibre inferiore a quella della matrice
- Se la frazione volumica delle fibre, V_f , è sufficientemente grande, la crisi del composito si ha quando le fibre sono deformate al loro valore limite:

282



Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

$$\epsilon_{\max}^l = \epsilon_{\max}^f \cdot$$

- Poiché le fibre hanno una deformazione limite inferiore a quella della matrice, non possono dilatarsi quanto quest'ultima e costituiscono il lato debole del composito.
- Per l'ipotesi dell'aderenza, infatti, la deformazione delle fibre e della matrice è la medesima; questo peraltro comporta che la resistenza del composito in direzione delle fibre è data ancora dalla legge delle miscele, come si evince facilmente:

$$\sigma_{\max}^l = V_f \sigma_{\max}^f + (1 - V_f) \sigma_{\epsilon}^m,$$

dove σ_{ϵ}^m è la tensione nella matrice in corrispondenza del valore limite di deformazione nelle fibre.

- Naturalmente, perché il rinforzo sia efficace, si desidera che sia

$$\sigma_{\max}^l > \sigma_{\max}^m \cdot$$

283



Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

- Le due equazioni precedenti permettono di trovare il valore minimo di V_f per avere un rinforzo della matrice da parte delle fibre:

$$V_f^{crit} = \frac{\sigma_{max}^m - \sigma_{\epsilon}^m}{\sigma_{max}^f - \sigma_{\epsilon}^m}$$

- Per valori inferiori della frazione volumica, la resistenza è dominata dalla matrice: le fibre sono trascinate dalla matrice nella sua deformazione e possono quindi rompersi per valori relativamente piccoli del carico applicato.
- Se tutte le fibre si rompono allo stesso momento, il composito avrà ancora una capacità di far fronte al carico applicato se

$$\sigma_{max}^l < (1 - V_f) \sigma_{max}^m$$

- In questo caso, solo la matrice, ovviamente, è attiva.
- In definitiva, il composito si frattura per rottura delle fibre se

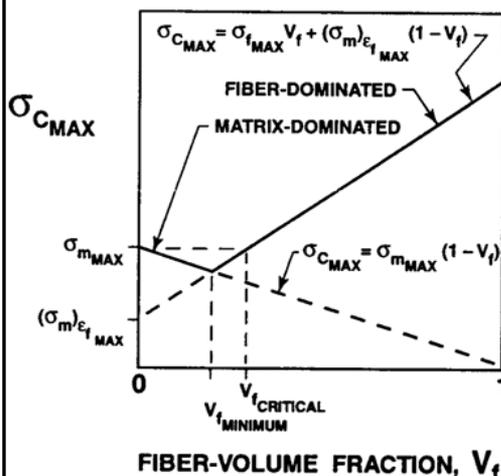
284



Omogeneizzazione delle caratteristiche di resistenza

$$\sigma_{max}^l = V_f \sigma_{max}^f + (1 - V_f) \sigma_{\epsilon}^m \geq (1 - V_f) \sigma_{max}^m$$

- Da questa condizione si evince il valore minimo di V_f per avere una rottura del composito provocata dalla rottura delle fibre:



$$V_f^{min} = \frac{\sigma_{max}^m - \sigma_{\epsilon}^m}{\sigma_{max}^f + \sigma_{max}^m - \sigma_{\epsilon}^m}$$

- Il comportamento è meglio compreso grazie al grafico a lato (fonte: Jones): se $V_f < V_f^{min}$, è la matrice che governa la rottura, e il valore limite resta inferiore a quello della matrice fino a V_f^{crit} ; solo per valori superiori si ha un rinforzo efficace da parte delle fibre.

285

