

Capitolo 3

■ Omogeneizzazione delle proprietà elastiche

□ Scopo delle teorie di omogeneizzazione	195
□ Volume elementare rappresentativo	199
□ La teoria classica	202
□ Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati	213
□ Le formule di Ekvall	222
□ Soluzioni elastiche con contiguità	223
□ Le equazioni di Halpin e Tsai	226
□ Confronto tra le varie teorie	230



Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- Nel capitolo precedente, ci si è occupati di uno degli aspetti fondamentali nello studio dei materiali compositi, l'anisotropia.
- L'altro aspetto che caratterizza questo tipo di materiali è l'eterogeneità, che la stessa definizione di materiale composito implica necessariamente (così non è per l'anisotropia: esistono materiali compositi isotropi e materiali omogenei anisotropi).
- L'analisi della risposta meccanica dei continui eterogenei è complicata proprio dal fatto che almeno due specie distinte (le fasi) coesistono nel formare un continuo.
- In genere, una fase, l'*inclusione* o *fibra*, che ha spesso il ruolo di rinforzo meccanico, è dispersa in una fase di basso pregio meccanico, la *matrice*.
- A livello microscopico, locale, la risposta meccanica è quella della fase che occupa la posizione data.
- Tuttavia, la risposta meccanica che si cerca è spesso una risposta ad una scala macroscopica (uno spostamento, una energia di deformazione etc.).



Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- A questa scala, generalmente non interessa conoscere il reale campo locale di spostamento, deformazione o sforzo.
- Ha quindi senso e utilità il problema seguente: cercare i parametri meccanici di un continuo fittizio, omogeneo (monofase), che ha una risposta meccanica macroscopica uguale a quella del continuo eterogeneo (polifase).
- Si tratta di un *problema di omogeneizzazione*: il continuo eterogeneo è omogeneizzato ad un continuo omogeneo meccanicamente equivalente.
- Le teorie che permettono la soluzione di questo tipo di problemi si chiamano *teorie di omogeneizzazione*; si differenziano per il tipo di ipotesi, per lo scopo dell'omogeneizzazione (periodica, inclusione-matrice, isotropa, anisotropa etc.), per il modello utilizzato etc.
- La teoria generale dell'omogeneizzazione è molto elaborata e fa appello a concetti spesso non banali.



Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- Ci occuperemo nel seguito solo di alcune teorie classiche di omogeneizzazione delle proprietà meccaniche di un composito, teorie relativamente semplici, limitandoci al caso di materiali fibrorinforzati con fibre disposte in modo uniforme e ordinato in una sola direzione.
- Per casi diversi (fibre corte disperse, inclusioni di forme diverse etc.) si rimanda a testi più specifici.
- Nel caso dei compositi fibrorinforzati, lo scopo delle teorie di omogeneizzazione è quello, una volta note le caratteristiche meccaniche delle fasi e la frazione volumica delle fibre, di predire le omologhe caratteristiche meccaniche di un solido omogeneo equivalente, che rimane tuttavia, nel caso in esame di fibre orientate, anisotropo.
- Questo permette di eseguire, ad esempio, dei calcoli di progetto di un materiale composito costituente una struttura.



Scopo delle teorie di omogeneizzazione

- Si deve tuttavia specificare sin da ora che le teorie di omogeneizzazione sono assai meno precise di quanto non sia spesso necessario, e in fase di realizzazione di un materiale nuovo le prove sperimentali volte a confermare le predizioni fatte con una teoria di omogeneizzazione sono imprescindibili.
- Quest prove servono anche perché nella composizione di un materiale composito giocano alcuni fattori aleatori, che male si colgono con l'aiuto delle teorie di omogeneizzazione, anche qualora queste prendano in conto il carattere stocastico di alcune grandezze (frazione volumica, disposizione, proprietà meccaniche etc.).
- In questo capitolo, ci si occuperà soltanto di omogeneizzazione delle proprietà elastiche, rinviando al capitolo seguente per un breve cenno all'omogeneizzazione delle proprietà di resistenza meccanica.
- Infine, un caso particolare di omogeneizzazione è quello della teoria classica dei laminati, che verrà estesamente considerato nel capitolo 5.

198



Volume elementare rappresentativo

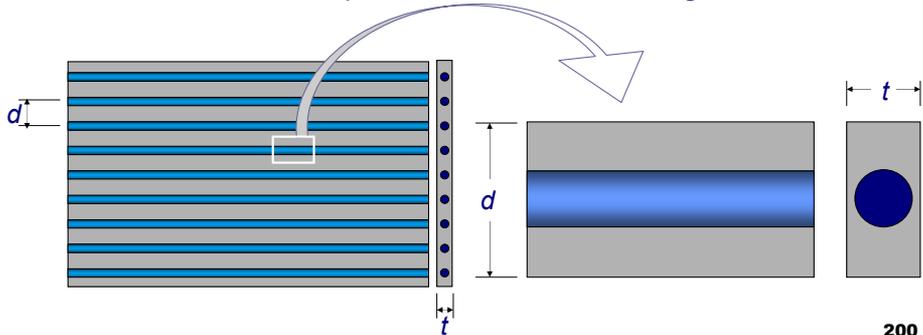
- Un concetto comune a tutte le teorie di omogeneizzazione è quello di *volume elementare rappresentativo*.
- In linea generale, questo è il volume minimo che si deve prendere in conto perché, una volta applicata una teoria di omogeneizzazione, il risultato ottenuto sia rappresentativo del comportamento macroscopico del continuo eterogeneo.
- Al volume elementare rappresentativo si applica un modello meccanico, proprio alla teoria di omogeneizzazione scelta.
- La definizione del volume elementare rappresentativo può non essere banale e in alcuni casi è oggetto di discussione.
- Tuttavia, nei casi che esamineremo, l'individuazione del volume elementare rappresentativo è semplice e immediata, per le simmetrie del problema.
- Un requisito fondamentale del volume elementare rappresentativo, è che la sua composizione in volume rispetti quella media del continuo.

199



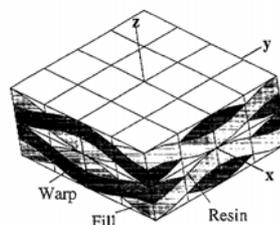
Volume elementare rappresentativo

- Questo significa che la *frazione volumica* dell'inclusione, V_f , ossia la percentuale in volume dell'inclusione sul volume totale, deve essere identica a quella media del continuo.
- Il caso che ci interessa in questa sede è quello di una lamina rinforzata con fibre unidirezionali uniformemente disposte nel corpo della lamina.
- L'identificazione del volume elementare rappresentativo, in questo caso, non è difficile, e può essere fatta come in figura.



Volume elementare rappresentativo

- Tuttavia, altre geometrie del volume elementare rappresentativo sono possibili; questo può assumere una certa importanza in alcune teorie di omogeneizzazione, soprattutto quando si faccia ricorso a valutazioni numeriche su un volume di geometria definita.
- Nel caso di compositi differenti, la definizione del volume elementare rappresentativo può essere non immediata e può costituire un punto sensibile del processo di omogeneizzazione.
- A titolo di esempio, si riporta in figura il caso di un volume elementare rappresentativo di una lamina in composito rinforzata con un doppio strato di tessuto, utilizzato in uno studio numerico (fonte: Woo & Whitcomb, 1997).



La teoria classica

- Ci prefiggiamo, utilizzando il volume elementare rappresentativo introdotto precedentemente, di ricavare le caratteristiche meccaniche omogeneizzate di una lamina rinforzata con fibre unidirezionali ripartite in modo uniforme.
- Le ipotesi della teoria classica sono:
 - matrice isotropa, di modulo di Young E_m e coefficiente di Poisson ν_m ;
 - fibre isotrope, di modulo di Young E_f e coefficiente di Poisson ν_f ;
 - la frazione volumica delle fibre è nota, V_f ;
 - il comportamento è elastico lineare;
 - le fibre aderiscono perfettamente alla matrice.
- L'obiettivo è quello di trovare le costanti tecniche omogeneizzate della lamina; a causa della disposizione orientata delle fibre, questa ha un comportamento macroscopico di tipo ortotropo, l'asse x_1 essendo posto convenzionalmente in direzione delle fibre, l'asse x_2 ortogonale a queste, nel piano della lamina, e l'asse x_3 ortogonale alla lamina.

202

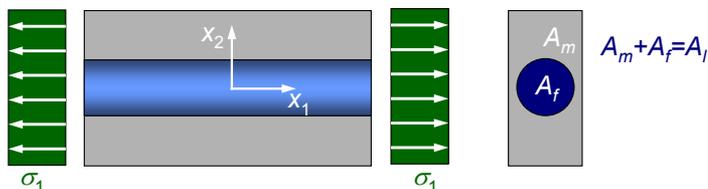


La teoria classica

- Si devono quindi calcolare 4 costanti: E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} .
- **Calcolo di E_1** : il volume elementare rappresentativo è sottoposto ad uno stato di sollecitazione in cui solo σ_1 è non nulla, vedi figura.
- L'ipotesi dell'aderenza ha come conseguenza che la deformazione è la medesima in tutti i punti (in particolare, le sezioni rette restano piane):

$$\varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^l,$$

dove l'apice m indica una quantità relativa alla matrice, f alla fibra e l alla lamina.



203



La teoria classica

- Il legame costitutivo, elastico lineare, implica che

$$\sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f, \quad \sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m, \quad \sigma_1^l = E_1 \varepsilon_1^l.$$

- Infine, l'equilibrio impone la relazione

$$\sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m = \sigma_1^l A_l.$$

- Sostituendo le relazioni del legame costitutivo, tenendo presente l'ipotesi dell'aderenza e il fatto che, per la geometria del volume elementare rappresentativo,

$$\frac{A_f}{A_l} = V_f, \quad \frac{A_m}{A_l} = 1 - V_f,$$

si ottiene immediatamente che

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m.$$

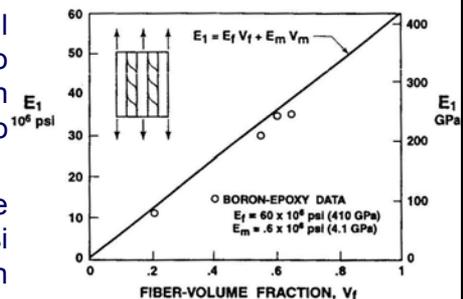
La teoria classica

- Questa è la celebre *legge delle miscele*, che fornisce il valore omogeneizzato del modulo di Young in direzione longitudinale (quella delle fibre). E_1 dipende linearmente da V_f , dunque dalla quantità di fibre presenti.

- Generalmente, $E_f \gg E_m$ (nel caso di un composito vetro-epoxy il rapporto E_f/E_m è ≈ 15 , nel caso del carbonio-epoxy è ≈ 40). Quindi, con gli usuali valori di V_f (≈ 0.6), si osserva che il modulo E_1 è dominato da E_f : l'apporto della matrice è spesso trascurabile.

- Il modello utilizzato per ricavare il modulo E_1 è un modello di tipo *parallelo*: matrice e fibre lavorano in parallelo, per il campo di sforzo applicato.

- La legge delle miscele dà ottime predizioni; a titolo di esempio, si riporta un grafico di confronto con dati sperimentali (fonte: Jones).



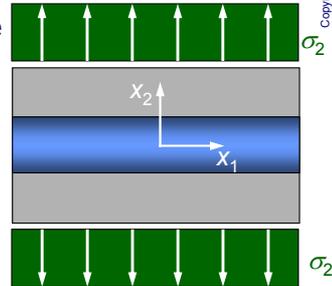
La teoria classica

- **Calcolo di E_2** : in questo caso, si applica una sollecitazione in cui solo σ_2 è non nulla, vedi figura.
- L'equilibrio del volume elementare implica che

$$\sigma_2^f = \sigma_2^m = \sigma_2^l.$$

- La congruenza della deformazione (in media), implica che sia

$$\varepsilon_2^f A_f + \varepsilon_2^m A_m = \varepsilon_2^l A_l.$$



- Questa relazione traduce semplicemente il fatto che la somma degli spostamenti, in direzione x_2 , calcolati su fibra e matrice deve essere uguale a quella totale del volume elementare.
- Utilizzando in questa relazione i legami costitutivi e tenendo presente le relazioni qui sopra, imposte dall'equilibrio del volume elementare, si giunge facilmente al risultato cercato:

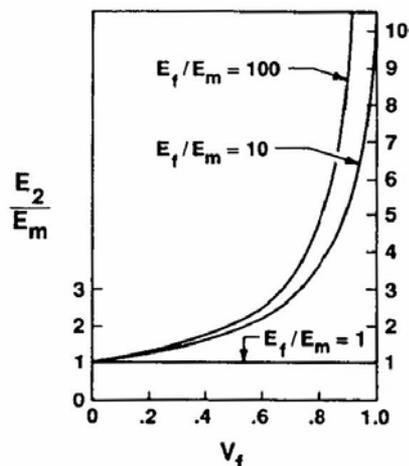
206



La teoria classica

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1-V_f}{E_m} \rightarrow E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + (1-V_f) E_f}.$$

- La dipendenza di E_2 da V_f non è più lineare; inoltre, la presenza di fibre dà un contributo minimo a E_2 : le fibre non funzionano come un rinforzo efficace per quanto riguarda la rigidità trasversale.
- Il grafico (fonte: Jones) mostra infatti che il rapporto E_2/E_m è sensibilmente più grande di 1 solo per elevati, e impraticabili, valori di V_f ; anche l'aumento del rapporto E_f/E_m non produce un sostanziale miglioramento. In definitiva, E_2 è un modulo dominato dalla matrice.

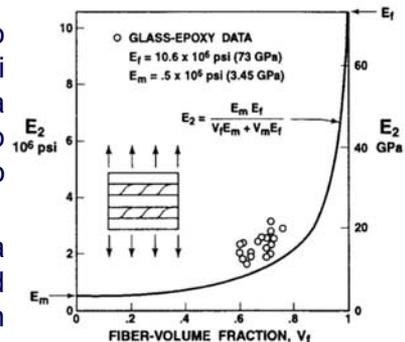


207



La teoria classica

- Il modello utilizzato è un modello di tipo *serie*: fibra e matrice lavorano in serie per il campo di sforzo applicato.
- Le predizioni di questo modello sono molto meno corrette di quelle della legge delle miscele. In effetti, il modello utilizzato si basa su alcune semplificazioni che sono troppo forti per permettere di ottenere un buon risultato.
- In effetti, in questo modello si sono trascurati gli sforzi e le deformazioni di taglio che nascono all'interfaccia tra fibra e matrice; un modello più corretto avrebbe dovuto prendere in conto l'effettivo comportamento all'interfaccia.
- Un confronto tra le predizioni della formula di omogeneizzazione di E_2 ed alcuni dati sperimentali è mostrato in figura (fonte: Tsai, cfr. libro di Jones).



208



La teoria classica

- **Calcolo di ν_{12}** : come nel calcolo di E_1 , si applica uno stato di sforzo in cui solo σ_1 è non nulla.
- Per definizione,

$$\nu_f = -\frac{\epsilon_2^f}{\epsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\epsilon_2^m}{\epsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\epsilon_2^l}{\epsilon_1^l}.$$

- D'altra parte, l'ipotesi dell'aderenza prescrive ancora che

$$\epsilon_1^f = \epsilon_1^m = \epsilon_1^l.$$

- Infine, come nel caso di E_2 , la congruenza, in media, sulle deformazioni trasversali impone ancora la relazione

$$\epsilon_2^f A_f + \epsilon_2^m A_m = \epsilon_2^l A_l.$$

- Sostituendo in quest'ultima relazione le precedenti, si giunge facilmente al risultato cercato:

209

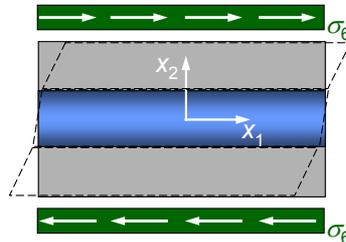


La teoria classica

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m.$$

- Il risultato è formalmente identico a quello della legge delle miscele; in effetti, anche in questo caso si ha a che fare con un modello di tipo parallelo.
- Come anche nel caso di E_1 , questa formula permette delle predizioni in buon accordo con i dati dell'esperienza.
- Essendo molto spesso assai prossimi i valori di ν_m e ν_f , ν_{12} non è dominato né dalla matrice né dalle fibre.

- **Calcolo di G_{12} :** in questo caso, si applica una sollecitazione in cui solo σ_6 è non nulla, vedi figura, in cui si è evidenziata anche la deformazione conseguente.



210



La teoria classica

- L'equilibrio del volume elementare impone che sia

$$\sigma_6^f = \sigma_6^m = \sigma_6^l,$$

mentre per il legame costitutivo si ha

$$\sigma_6^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \sigma_6^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \sigma_6^l = G_l \varepsilon_6^l.$$

- Infine, la congruenza, in media, della deformazione a taglio prescrive che sia

$$\varepsilon_6^f A_f + \varepsilon_6^m A_m = \varepsilon_6^l A_l.$$

- Sostituendo in quest'ultima relazione le precedenti, si giunge al risultato finale:

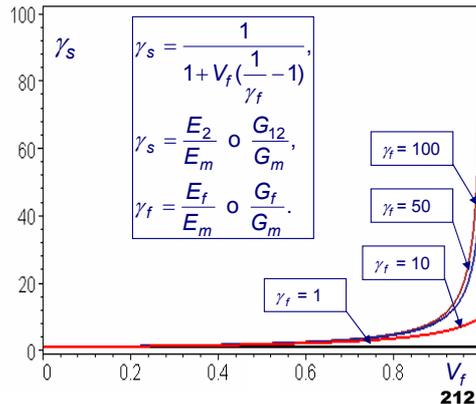
$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m} \rightarrow G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1 - V_f) G_f}.$$

211



La teoria classica

- Si ottiene dunque una legge formalmente analoga a quella di E_2 ; in effetti, anche in questo caso si è utilizzato un modello di tipo serie.
- Come nel caso di E_2 , anche per G_{12} si possono fare le stesse osservazioni, in particolare una discrepanza piuttosto marcata con i dati sperimentali e una dipendenza debole da G_f ; G_{12} è dominato dalla matrice, in altre parole le fibre hanno uno scarso effetto sul rinforzo a taglio.
- A questo proposito, il grafico a lato mostra questo aspetto: il valore del modulo omogeneizzato non cambia molto rispetto a quello della matrice, anche con fibre ad alto modulo, se non per frazioni volumiche molto elevate.



212

Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Se è vero, come si è visto anche dai casi sopra riportati, che la predizione analitica del valore delle costanti elastiche omogeneizzate è spesso difficile e incerta, si possono tuttavia in alcuni casi fornire dei limiti teorici al valore di queste grandezze omogeneizzate.
- Questo si può fare con delle tecniche variazionali; a titolo di esempio, e per dare una prospettiva teorica più precisa della teoria classica, vediamo il caso del modulo di Young, per il quale cerchiamo un limite teorico superiore ed inferiore.
- Si deve precisare che quello che viene presentato è valido in generale per un solido bifase isotropo, come è il caso di inclusioni di forma diversa disperse in modo aleatorio in una matrice.
- La tecnica variazionale fa uso dei principi di minimo dell'energia complementare e dell'energia potenziale elastica, rispettivamente per determinare il limite inferiore e superiore del modulo di Young.

213

Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- **Limite inferiore:** consideriamo una barretta di materiale composito sottoposta ad una tensione normale σ applicata alle estremità.
- Un campo di tensione ammissibile (che verifica le equazioni di equilibrio e le condizioni al bordo) è il seguente (asse x_1 longitudinale):

$$\sigma_1^o = \sigma, \quad \sigma_i^o = 0, \quad i = 2, \dots, 6.$$

- Questo campo di tensione in realtà non può esistere nel solido, perché questo è eterogeneo. L'energia di deformazione U^o che compete a questo campo di sforzo ammissibile è dunque, per il principio dell'energia complementare, superiore a quella che compete all'effettivo campo di sforzo.
- Ora, nel continuo visto come solido omogeneizzato ed isotropo, l'effettivo campo di sforzo conseguente all'applicazione delle azioni di cui sopra è proprio

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2, \dots, 6.$$



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Considerando un modulo di Young E per il solido omogeneizzato di volume Ω , l'energia di deformazione che compete a quest'ultimo è

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1 \varepsilon_1 dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma^2}{E} dv = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \Omega.$$

- Invece, nel caso di solido eterogeneo,

$$U^o = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1^o \varepsilon_1 dv = \frac{\sigma^2}{2} \left(\int_{\Omega_d} \frac{1}{E_d} dv + \int_{\Omega_m} \frac{1}{E_m} dv \right) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{V_d}{E_d} + \frac{1-V_d}{E_m} \right) \Omega,$$

dove con l'indice d si è indicata una grandezza relativa alla fase dispersa (l'inclusione) e con m relativa alla matrice. In particolare, i volumi occupati dalla fase dispersa e dalla matrice sono rispettivamente

$$\Omega_d = V_d \Omega, \quad \Omega_m = (1 - V_d) \Omega,$$

con V_d la frazione volumica della fase dispersa.



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Dovendo essere, per il principio di minimo dell'energia complementare, $U \leq U^0$, se ne ricava la condizione

$$\frac{1}{E} \leq \frac{V_d}{E_d} + \frac{1-V_d}{E_m} \rightarrow E \geq \frac{E_m E_d}{V_d E_m + (1-V_d) E_d}.$$

- Si riconosce in questo limite il valore di un modulo in un modello di tipo serie, come è il caso dei moduli E_2 e G_{12} per i fibrorinforzati unidirezionali.

- **Limite superiore:** consideriamo adesso la barretta sottoposta a un'elongazione longitudinale ε ; un campo di deformazione ammissibile (che rispetta il legame spostamenti-deformazioni e le condizioni al bordo) è il seguente:

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_4^0 = \varepsilon_5^0 = \varepsilon_6^0 = 0,$$

ν essendo il coefficiente di Poisson del solido omogeneizzato.



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Questo campo di deformazione in realtà non può esistere nel solido, perché questo è eterogeneo. L'energia di deformazione U^0 che compete a questo campo di deformazione ammissibile è dunque, per il principio dell'energia potenziale elastica, superiore a quella che compete all'effettivo campo di deformazione.
- Ora, nel continuo visto come solido omogeneizzato ed isotropo, l'effettivo campo di deformazione conseguente all'applicazione delle deformazioni imposte di cui sopra è proprio

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0,$$

da cui consegue il valore dell'energia di deformazione, per un solido omogeneizzato avente modulo di Young E e volume Ω ,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1 \varepsilon_1 dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon^2 dv = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Omega.$$



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Nel continuo eterogeneo, il campo di sforzo è diverso nelle due fasi; per le equazioni di Lamé (le due fasi sono isotrope) e per il campo di deformazione ammissibile considerato, si ha

$$\begin{aligned}\sigma_1^d &= \frac{1-\nu_d-2\nu\nu_d}{1-\nu_d-2\nu\nu_d^2} E_d \varepsilon, & \sigma_1^m &= \frac{1-\nu_m-2\nu\nu_m}{1-\nu_m-2\nu\nu_m^2} E_m \varepsilon, \\ \sigma_2^d &= \sigma_3^d = \frac{\nu_d-\nu}{1-\nu_d-2\nu\nu_d^2} E_d \varepsilon, & \sigma_2^m &= \sigma_3^m = \frac{\nu_m-\nu}{1-\nu_m-2\nu\nu_m^2} E_m \varepsilon, \\ \sigma_4^d &= \sigma_5^d = \sigma_6^d = 0, & \sigma_4^m &= \sigma_5^m = \sigma_6^m = 0.\end{aligned}$$

- Ne consegue, per il valore dell'energia di deformazione U^o che compete a questo campo ammissibile di deformazione,

$$\begin{aligned}U^o &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^o dv = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_d} \sigma_i^d \varepsilon_i^o dv + \int_{\Omega_m} \sigma_i^m \varepsilon_i^o dv \right) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1-\nu_d-4\nu\nu_d+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_m-4\nu\nu_m+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu\nu_m^2} E_m (1-V_d) \right) \Omega.\end{aligned}$$

218



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Dovendo essere, per il principio di minimo dell'energia potenziale elastica, $U \leq U^o$, se ne ricava la condizione

$$E \leq \frac{1-\nu_d-4\nu\nu_d+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_m-4\nu\nu_m+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu\nu_m^2} E_m (1-V_d).$$

- In questa espressione, il valore del coefficiente di Poisson omogeneizzato, ν , è ancora incognito; lo si ricava in accordo col principio di minimo dell'energia potenziale elastica, per il quale dunque U^o deve essere minimo rispetto all'incognita ν per ottenere il limite su E .
- Deve dunque essere

$$\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial^2 U^o}{\partial \nu^2} \Big|_{\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0} > 0.$$

219



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Svolgendo i calcoli si trova che

$$\frac{\partial U^0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{per} \quad \nu = \frac{(1-\nu_m - 2\nu_m^2)\nu_d E_d V_d + (1-\nu_d - 2\nu_d^2)\nu_m E_m (1-V_d)}{(1-\nu_m - 2\nu_m^2)E_d V_d + (1-\nu_d - 2\nu_d^2)E_m (1-V_d)},$$
$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial \nu^2} = 2\varepsilon^2 \Omega \left(\frac{E_d V_d}{1-\nu_d - 2\nu_d^2} + \frac{E_m V_m}{1-\nu_m - 2\nu_m^2} \right).$$

- Essendo le due fasi isotrope, e quindi i rispettivi coefficienti di Poisson $< 1/2$, si verifica facilmente che la derivata seconda è sempre positiva; dunque, il valore di ν qui sopra riportato corrisponde ad un minimo di U^0 . Sostituendolo nell'espressione precedente, si ottiene l'espressione finale per il limite superiore di E ; questa è molto complicata e si riporta di seguito il valore limite di E quando $\nu_d = \nu_m$ (i due valori non sono, in genere, molto diversi):

$$E \leq V_d E_d + (1-V_d) E_m.$$



Limiti variazionali sui moduli omogeneizzati

- Si osserva che questo è proprio il valore di un coefficiente elastico nel modello in parallelo, come è il caso di E_1 e ν_{12} .
- Quindi, nella teoria classica, le costanti tecniche omogeneizzate corrispondono sia a un limite superiore, nei modelli parallelo, sia a un limite inferiore, nei modelli serie.
- Questo è importante, ad esempio, per capire che le predizioni di E_2 e G_{12} fatte con le formule della teoria classica sono sempre predizioni per difetto.
- I risultati appena visti, sono stati trovati da Paul, 1960, in relazione a studi sulle leghe. In seguito, sono stati proposti molti modelli, volti a cogliere più in dettaglio il fenomeno e legati a differenti morfologie della fase dispersa. Ad esempio, si ricordano i lavori di Hashin e Shtrikman (1963), in cui la fase dispersa è costituita da sfere e quelli di Hashin e Rosen (1964), più pertinenti al caso dei fibrinforzati perché la fase è costituita da cilindri; si rimanda alla letteratura specialistica per una analisi più approfondita.



Le formule di Ekvall

- Diversi tentativi sono stati fatti, su base semiempirica, numerica o teorica, per migliorare le predizioni della teoria classica. Vediamone qui di seguito alcuni.
- Ekvall (1961) ha proposto una modifica delle formule di E_1 ed E_2 per tener conto dello stato di tensione triassiale indotto nella matrice dalla presenza delle fibre:

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E'_m, \quad E_2 = \frac{E_f E'_m}{V_f E'_m + (1 - V_f) E_f (1 - \nu_m^2)}$$

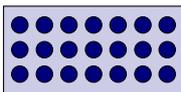
- Nelle formule sopra è

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m^2}$$

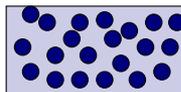
- Tuttavia, quantitativamente, questa correzione non è significativa per $\nu_m < 1/4$.

Soluzioni elastiche con contiguità

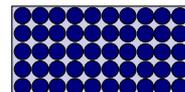
- La teoria classica considera, almeno implicitamente, il fatto che la disposizione delle fibre sia uniforme e regolare.
- Tuttavia, la disposizione delle fibre non è necessariamente regolare, ma piuttosto le fibre sembrano essere disposte in modo aleatorio.
- Quindi, ad esempio, alcune fibre saranno in contatto tra loro, e questo può, almeno in parte, pregiudicare l'aderenza alla matrice, mentre altre saranno isolate. Ovviamente, più è alta la frazione volumica di fibre, più è probabile che queste si trovino vicine ed in contatto.
- Questo aspetto può essere preso empiricamente in conto tramite il *fattore di contiguità* C , introdotto da Tsai (1964). C varia fra 0, fibre isolate, ed 1, fibre tutte in contatto tra loro, vedi figura. Nella realtà, il valore di C sarà tanto più elevato quanto più è alto V_f .



$C=0$



$0 < C < 1$



$C=1$

Soluzioni elastiche con contiguità

- Tenendo conto del fattore di contiguità, e utilizzando un approccio elastico in cui la soluzione è trovata come combinazione lineare tra il caso $C=0$ ed il caso $C=1$, Tsai ha ottenuto le formule seguenti:

$$E_1 = k[E_f V_f + E_m(1 - V_f)],$$

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m)(1 - V_f)] \left[(1 - C) \frac{k_f(2k_m + G_m) - G_m(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_m) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} + C \frac{k_f(2k_m + G_f) - G_f(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_f) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} \right],$$

$$\nu_{12} = (1 - C) \frac{k_f \nu_f(2k_m + G_m)V_f + k_m \nu_m(2k_f + G_m)(1 - V_f)}{k_f(2k_m + G_m) - G_m(k_f - k_m)(1 - V_f)} + C \frac{k_m \nu_m(2k_f + G_f)(1 - V_f) + k_f \nu_f(2k_m + G_f)V_f}{k_f(2k_m + G_m) - G_f(k_f - k_m)(1 - V_f)},$$

224



Soluzioni elastiche con contiguità

$$G_{12} = (1 - C)G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m)(1 - V_f)}{2G_m + (G_f - G_m)(1 - V_f)} + CG_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)(1 - V_f)}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m)(1 - V_f)},$$

$$k_m = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m)}, \quad k_f = \frac{E_f}{2(1 - \nu_f)}.$$

- Il coefficiente k è il *fattore di disallineamento delle fibre*, introdotto da Tsai per tener conto delle imperfezioni nella direzione delle fibre; il suo valore, da determinare sperimentalmente, e che varia soprattutto in funzione del procedimento di fabbricazione, varia poco, tra 0.9 ed 1.
- Il valore del fattore di contiguità C deve anch'esso essere determinato sperimentalmente, per diversi valori della frazione volumica V_f .

225



Le equazioni di Halpin e Tsai

- Le teorie di omogeneizzazione più fini esprimono i risultati tramite formule piuttosto complicate e spesso di limitata applicazione (vedi il caso precedente delle soluzioni con contiguità).
- Allo scopo di ottenere delle formule affidabili e semplici per la predizione dei moduli omogeneizzati, Halpin e Tsai (1969) hanno proposto delle equazioni ricavate essenzialmente dall'interpolazione di risultati ottenuti tramite teorie micromeccaniche differenti.
- In particolare, Halpin e Tsai hanno dimostrato che la *soluzione di Hermann* (1967), che è una generalizzazione del cosiddetto *modello autoc coerente di Hill* (1965), può essere ridotta alle seguenti equazioni approssimate per quanto riguarda E_2 , G_{12} o ν_{23} :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f}, \quad \text{dove} \quad \eta = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \xi}$$



Le equazioni di Halpin e Tsai

- Nelle equazioni di Halpin-Tsai, M rappresenta un modulo tra E_2 , G_{12} o ν_{23} , ed M_f i corrispondenti moduli delle fibre, cioè E_f , G_f o ν_f mentre M_m quelli della matrice, ossia E_m , G_m o ν_m .
- Per quanto riguarda E_1 e ν_{12} , Halpin e Tsai continuano a prendere le formule della teoria classica.
- Il coefficiente ξ è una misura del rinforzo del materiale composito, rinforzo apportato alla matrice dalla presenza delle fibre.
- ξ dipende dalla geometria delle fibre, dalla loro disposizione e dalla condizione di carico. In genere ξ deve essere valutato sperimentalmente, e questo è il punto debole delle equazioni di Halpin-Tsai, soprattutto perché, come detto, ξ dipende anche dalla condizione di carico.
- In particolare, per fibre circolari disposte regolarmente su una maglia quadrata e per $V_f = 0.55$, Halpin e Tsai, dal confronto con dati sperimentali, hanno trovato il valore $\xi = 2$ per E_2 e $\xi = 1$ per G_{12} .



Le equazioni di Halpin e Tsai

- Tuttavia, Hewitt e de Malherbe propongono per la valutazione di G_{12} la seguente formula empirica per ξ , che sembra dare un miglior accordo con i dati dell'esperienza:

$$\xi = 1 + 4V_f^{10}.$$

- In teoria, ξ può variare tra 0 ed ∞ ; si nota facilmente che per $\xi=0$,

$$\frac{1}{M} = \frac{V_f}{M_f} + \frac{1-V_f}{M_m},$$

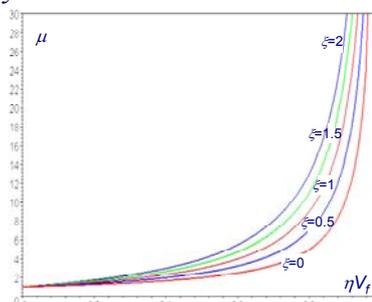
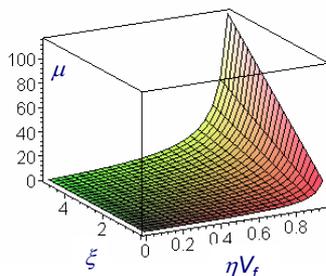
ossia si ottiene il risultato tipico del modello tipo serie, che come visto rappresenta il limite inferiore. All'opposto, per $\xi=\infty$,

$$M = V_f M_f + (1-V_f) M_m,$$

ossia si ottiene il risultato tipico del modello tipo parallelo, che rappresenta il limite superiore.

Le equazioni di Halpin e Tsai

- Quindi, in un certo senso, come già anticipato ξ rappresenta una misura del rinforzo dato alla matrice dalle fibre: più ξ è grande, più le fibre contribuiscono al rinforzo strutturale della matrice.
- Per quanto concerne la quantità η , si può verificare che per inclusioni rigide $\eta=1$, per un materiale omogeneo $\eta=0$ e per vuoti $\eta=-1/\xi$.
- Il termine ηV_f può essere interpretato come una *frazione volumica ridotta* (perché $\eta \leq 1$). In figura, si riporta il valore di $\mu=M/M_m$ in funzione di ηV_f per vari valori di ξ .

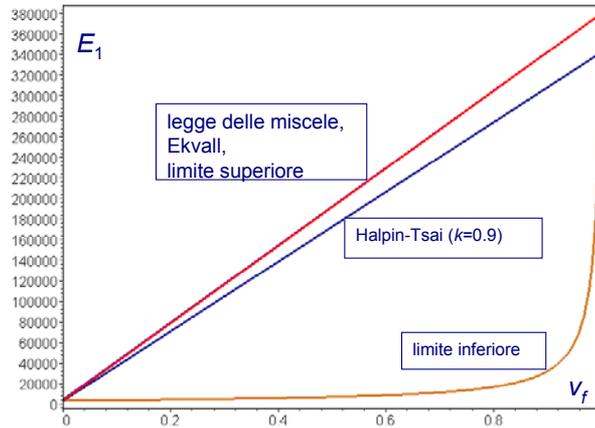


Confronto tra le varie teorie

- Per concludere, si riportano alcuni diagrammi che permettono di confrontare i risultati delle varie teorie presentate.
- I grafici si riferiscono al caso di un composito carbonio-epoxy, con i seguenti valori dei moduli:

- $E_m = 3.45$ Gpa
- $E_f = 380$ Gpa
- $G_m = 1.327$ GPa
- $G_f = 152$ GPa
- $\nu_m = 0.3, \nu_f = 0.25$

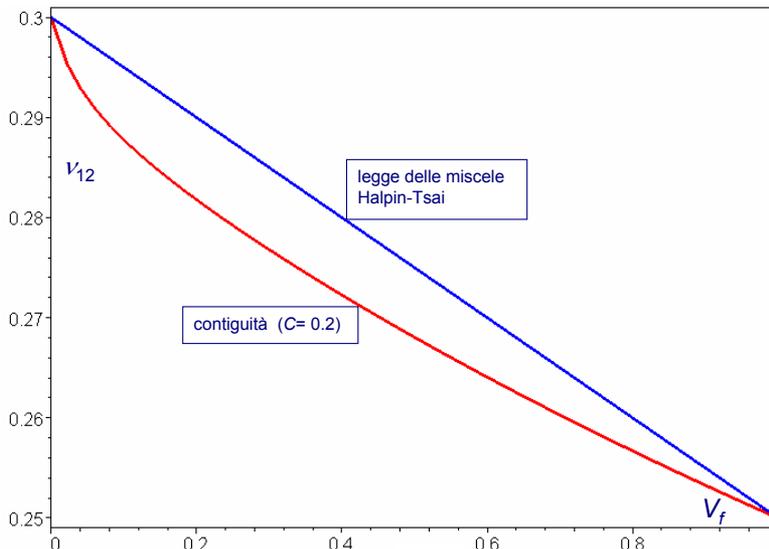
- Come commento generale, si può osservare che la dispersione dei dati è assai forte per E_2 e G_{12} , molto meno per E_1 e ν_{12} .



230



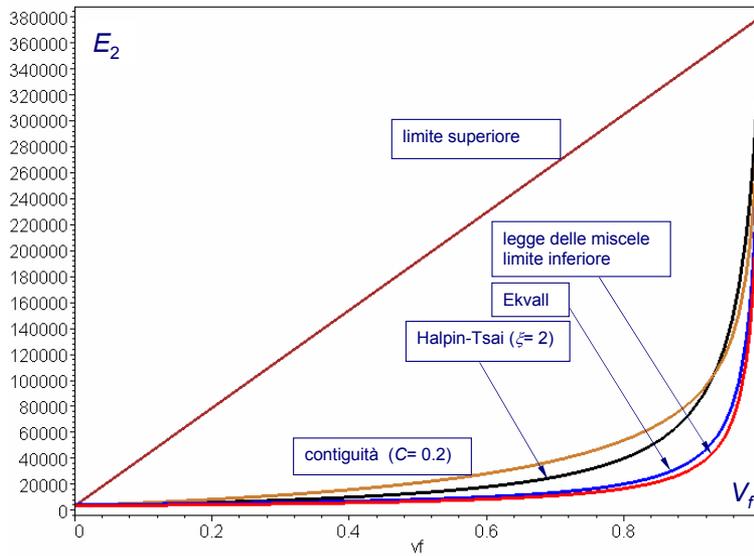
Confronto tra le varie teorie



231



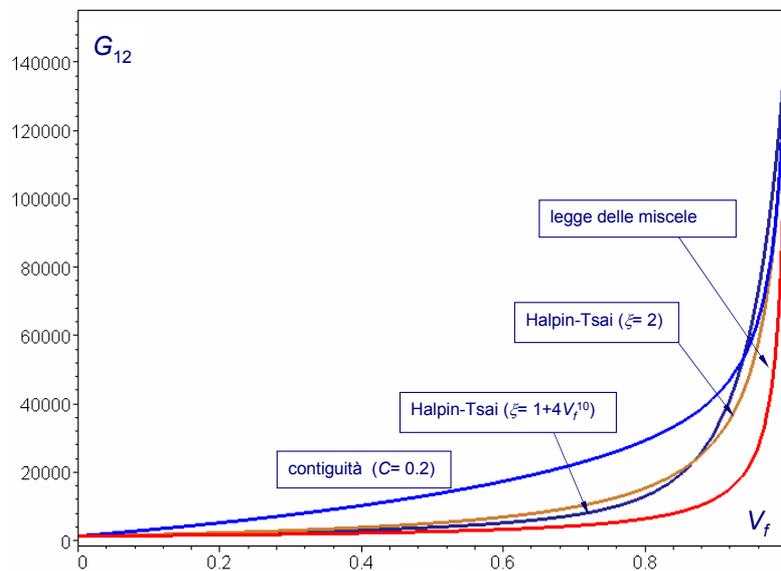
Confronto tra le varie teorie



232



Confronto tra le varie teorie



233

