

Capitolo 2

■ Anisotropia: analisi e metodi di rappresentazione

<input type="checkbox"/> Cos'è l'anisotropia e quali problemi comporta	53
<input type="checkbox"/> La legge di Hooke per un solido anisotropo	55
<input type="checkbox"/> Notazione tensoriale	61
<input type="checkbox"/> Notazione di Voigt	63
<input type="checkbox"/> Notazione di Pedersen	68
<input type="checkbox"/> Significato fisico delle componenti elastiche	72
<input type="checkbox"/> Rotazione del riferimento	76
<input type="checkbox"/> Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann	88
<input type="checkbox"/> Le diverse simmetrie elastiche	96
<input type="checkbox"/> Le simmetrie dei cristalli	125



Capitolo 2

<input type="checkbox"/> Le costanti tecniche di elasticità	132
<input type="checkbox"/> Limiti sui moduli elastici	145
<input type="checkbox"/> Il caso di stato piano di tensione	150
<input type="checkbox"/> Rotazione del riferimento nel piano	159
<input type="checkbox"/> I parametri di Tsai e Pagano	164
<input type="checkbox"/> I parametri polari di Verchery	168
<input type="checkbox"/> Alcuni esempi di materiali anisotropi	172



Cos'è l'anisotropia e quali problemi comporta

- L'anisotropia è la dipendenza di una proprietà fisica dalla direzione.
- Le proprietà che ci interessano qui sono quelle che riguardano la risposta meccanica di un solido, tanto in rigidità che in resistenza.
- In questo capitolo, ci occuperemo essenzialmente della descrizione della risposta meccanica di solidi anisotropi per quanto riguarda la rigidità, rinviando al capitolo 4 per una presentazione del comportamento alla rottura di solidi anisotropi.

- Il comportamento anisotropo di un solido comporta una serie di problemi aggiuntivi rispetto al caso isotropo.
- Innanzitutto, le grandezze che descrivono il comportamento meccanico, siano esse delle componenti tensoriali o dei "moduli dell'ingegnere", generalmente non sono delle quantità invarianti, ma dipendono dalla direzione, proprio in virtù del comportamento anisotropo, e quindi rappresentano la risposta del materiale in una direzione ben precisa, non in senso assoluto.



Cos'è l'anisotropia e quali problemi comporta

- In secondo luogo, queste costanti sono in numero maggiore rispetto al caso isotropo (il che comporta, per esempio, che la caratterizzazione sperimentale di un materiale anisotropo necessita di un numero maggiore di misure indipendenti).
- Inoltre, nelle fasi di calcolo, si deve sovente poter esprimere le caratteristiche meccaniche in un riferimento ruotato; le formule che permettono questo passaggio sono complicate e rendono difficili molti dei problemi di progetto.
- Altri problemi sono causati proprio dalla differenza quantitativa nella risposta meccanica direzionale, che può portare a fenomeni locali pericolosi (per esempio, la delaminazione nei laminati), ma anche dalla impossibilità di applicare criteri di resistenza classici, come quello di Huber-Hencky-von Mises.
- Il calcolo di verifica e di progetto con i materiali anisotropi è quindi, in genere, più delicato e oneroso che con i materiali isotropi.



La legge di Hooke per un solido anisotropo

- Ci limitiamo qui ad analizzare il comportamento elastico lineare, in piccole deformazioni, di un solido anisotropo alla Green, per il quale quindi si definisce un potenziale elastico V .
- Il solido è caricato con delle forze di volume \mathbf{q} e delle forze di superficie \mathbf{p} su una parte della frontiera.
- Si applica un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile e infinitesimale \mathbf{du} , tale dunque da poter trascurare la variazione delle forze applicate.
- Il lavoro delle forze applicate è allora (teorema di Clapeyron)

$$\begin{aligned} dW &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{du} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{du} \, ds = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{du} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} + \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{du}) \, dv = \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{q} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{du} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad}(\mathbf{du}) \, dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, dv. \end{aligned}$$



La legge di Hooke per un solido anisotropo

- La quantità

$$dV = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

rappresenta la variazione di energia potenziale interna per unità di volume in corrispondenza di una variazione infinitesima dello stato di deformazione.

- Nel caso di un corpo elastico, tale quantità dV deve essere un differenziale esatto; infatti, la variazione totale, per unità di volume, dell'energia potenziale interna in una trasformazione da uno stato A ad uno stato B , deve essere, in tal caso, indipendente dal percorso di integrazione:

$$V = \int_A^B dV = V_B - V_A \quad \Leftrightarrow \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}.$$

- Ne consegue la *formula di Green*:



La legge di Hooke per un solido anisotropo

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

- Sviluppando V in serie di Taylor si ha

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = V(0) + \left. \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots$$

- Se si ammette che allo stato iniziale, in corrispondenza di forze esterne nulle, sia $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$ e si pone $V=0$, e approssimando V al solo primo termine non nullo, lecito in piccole deformazioni, si ha

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

con i coefficienti E_{ijkl} che sono le componenti di un tensore del 4° ordine, \mathbf{E} , e tali che, per il teorema di Schwarz,



La legge di Hooke per un solido anisotropo

$$E_{ijkl} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right|_0 = E_{klij}.$$

- Applicando allora la formula di Green alla funzione $V(\boldsymbol{\varepsilon})$ e tenendo conto della relazione qui sopra, che stabilisce l'esistenza delle cosiddette *simmetrie indiciali maggiori*, si ha

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

che è la *legge di Hooke generalizzata*; questa stabilisce la linearità tra le componenti di sforzo e quelle di deformazione; le componenti E_{ijkl} sono i *moduli di elasticità* (Lekhnitskii), ed \mathbf{E} è il *tensore elastico*, o *tensore di rigidezza elastica*.

- Un approccio alternativo è il seguente: si ipotizza un comportamento lineare, in altre parole la legge di Hooke generalizzata; allora, tramite la formula di Green e per il teorema di Schwarz, si ottengono le simmetrie maggiori per i moduli elastici:



La legge di Hooke per un solido anisotropo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = E_{klij} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- Ne consegue

$$dV = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow V = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

- I moduli elastici sono in numero di 81; tuttavia, la simmetria di $\boldsymbol{\varepsilon}$ e di $\boldsymbol{\sigma}$ impone le simmetrie indiciali minori sui moduli elastici:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{jilk} = E_{ijlk};$$

queste 45 relazioni rendono indipendenti solo 36 moduli; le 15 simmetrie maggiori, infine, abbassano questo numero a 21 moduli indipendenti.

- Nel caso di un solido totalmente anisotropo, quindi, il numero delle grandezze necessarie per specificarne la risposta elastica è di 21.



La legge di Hooke per un solido anisotropo

- Tuttavia, non si conoscono dei solidi totalmente anisotropi: i continui naturali, per esempio i cristalli o il legno, e quelli artificiali, come i compositi strutturali, mostrano sempre una qualche forma di simmetria nel comportamento, cioè una risposta identica in certe direzioni legate da relazioni di simmetria.

- Tali simmetrie sono il più sovente il riflesso di una simmetria materiale, dovuta per esempio all'esistenza di una geometria organizzata della disposizione dei costituenti molecolari, è il caso dei cristalli, oppure alla disposizione ordinata di fibre di rinforzo, come nel caso del legno o dei compositi, mentre nel caso di materiali strutturati, per esempio i laminati, questo tipo di simmetria della costituzione materiale può mancare, pur sussistendo una simmetria della risposta meccanica.



Notazione tensoriale

- La legge di Hooke può essere rappresentata in modi diversi.
- Il modo più corretto è quello tensoriale, dove le diverse grandezze tensoriali in gioco sono rappresentate nel modo usuale, sia in notazione simbolica, sia in notazione indiciale, facendo uso della convenzione di Einstein sulla somma (ciò che si è fatto sin qui):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl};$$
$$V = \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

- Introducendo il tensore di cedevolezza elastica \mathbf{Z} , inverso del tensore di rigidezza \mathbf{E} , si ha anche

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma}, \quad \varepsilon_{ij} = Z_{ijkl}\sigma_{kl};$$
$$V = \frac{1}{2}Z_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Notazione tensoriale

- Il tensore di cedevolezza ha ovviamente le stesse simmetrie di quello di rigidezza.
- Le componenti Z_{ijkl} di \mathbf{Z} sono chiamate anche *coefficienti di deformazione* (Lekhnitskii).
- L'inconveniente di questa rappresentazione è la sua pesantezza.
- Per ovviare a questo inconveniente, sono state proposte nel passato notazioni alternative, due di queste sono introdotte qui di seguito.
- Queste notazioni restano comunque una rappresentazione Cartesiana dell'anisotropia, sono soltanto un modo alternativo e più rapido di indicare le componenti tensoriali dei vari tensori, ma bisogna considerare che *trasformano il calcolo tensoriale in calcolo matriciale*.
- Per questa ragione, in tali casi si userà una notazione matriciale, salvo diverso avviso.

Notazione di Voigt

- Un modo ormai classico di rappresentare la legge di Hooke è quello proposto da Voigt.
- In questa rappresentazione, si sfruttano le simmetrie tensoriali per ridurre il numero delle componenti che vengono considerate e si trasformano i tensori $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ in vettori colonna e il tensore elastico \mathbf{E} in una matrice simmetrica 6×6: l'approccio diviene puramente matriciale.
- In particolare, la convenzione di Voigt è la seguente

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{11}, & \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \sigma_3 &= \sigma_{33}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \sigma_5 &= \sigma_{31}, & \sigma_6 &= \sigma_{12}. \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 &= \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}, & \varepsilon_6 &= \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}.\end{aligned}$$

- Da notare l'utilizzo delle componenti γ_{ij} in luogo di quelle tensoriali, circostanza che causerà dei problemi nel seguito.

63



Notazione di Voigt

- La legge di Hooke viene quindi scritta come segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- In forma contratta:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad \sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad C_{ij} = C_{ji}, \quad V = \frac{1}{2}C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

- Grazie all'utilizzo delle componenti γ_{ij} , le componenti C_{ij} della matrice elastica $[\mathbf{C}]$ sono uguali alle componenti E_{mnpq} corrispondenti.

64



Notazione di Voigt

- Le simmetrie maggiori di \mathbf{E} si traducono, nel passaggio alla matrice $[\mathbf{C}]$, nella simmetria di quest'ultima.
- Il legame inverso è

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- In forma contratta,

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{S}]\{\sigma\}, \quad [\mathbf{S}] = [\mathbf{C}]^{-1}, \quad \varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j, \quad S_{ij} = S_{ji},$$

$$V = \frac{1}{2}S_{ij}\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$



Notazione di Voigt

- Si deve far attenzione al fatto che stavolta si ottengono come risultato le componenti γ_{ij} e non le ε_{ij} .
- Inoltre, a causa di questo, le componenti della matrice di cedevolezza elastica $[\mathbf{S}]$ non sono tutte uguali alle componenti corrispondenti del tensore di cedevolezza elastica \mathbf{Z} , ma si ha:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} Z_{ppqq} & 2Z_{pprs} \\ 2Z_{pprs} & 4Z_{pqrs} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} S_{11} = Z_{1111} & S_{12} = Z_{1122} & S_{13} = Z_{1133} & S_{14} = 2Z_{1123} & S_{15} = 2Z_{1131} & S_{16} = 2Z_{1112} \\ & S_{22} = Z_{2222} & S_{23} = Z_{2233} & S_{24} = 2Z_{2223} & S_{25} = 2Z_{2231} & S_{26} = 2Z_{2212} \\ & & S_{33} = Z_{3333} & S_{34} = 2Z_{3323} & S_{35} = 2Z_{3331} & S_{36} = 2Z_{3312} \\ \hline & & & S_{44} = 4Z_{2323} & S_{45} = 4Z_{2331} & S_{46} = 4Z_{2312} \\ & & & & S_{55} = 4Z_{3131} & S_{56} = 4Z_{3112} \\ & & & & & S_{66} = 4Z_{1212} \end{array} \right]$$

sym



Notazione di Voigt

- Dunque, l'uso della notazione matriciale di Voigt necessita qualche attenzione.
- Tuttavia, è la notazione la più antica e la più utilizzata nel mondo dei compositi.
- Per questa ragione, sarà utilizzata anche nel seguito di questo corso.

Notazione di Pedersen

- Un'altra rappresentazione, sempre Cartesiana, dell'anisotropia, è quella proposta, tra gli altri, da Pedersen, Walpole e Rychlewski.
- In questo caso, la relazione tra tensioni e deformazioni è scritta come segue:

$$\{\sigma\} = [L]\{\varepsilon\},$$

dove stavolta

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sigma_5 = \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sigma_6 = \sqrt{2}\sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} E & \sqrt{2}E \\ \sqrt{2}E & 2E \end{bmatrix},$$

Notazione di Pedersen

dove l'ultima relazione va letta come specificato qui di seguito:

$$[L] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_{11} = E_{1111} & L_{12} = E_{1122} & L_{13} = E_{1133} & L_{14} = \sqrt{2}E_{1123} & L_{15} = \sqrt{2}E_{1131} & L_{16} = \sqrt{2}E_{1112} \\ & L_{22} = E_{2222} & L_{23} = E_{2233} & L_{24} = \sqrt{2}E_{2223} & L_{25} = \sqrt{2}E_{2231} & L_{26} = \sqrt{2}E_{2212} \\ & & L_{33} = E_{3333} & L_{34} = \sqrt{2}E_{3323} & L_{35} = \sqrt{2}E_{3331} & L_{36} = \sqrt{2}E_{3312} \\ \hline & & \text{sym} & L_{44} = 2E_{2323} & L_{45} = 2E_{2331} & L_{46} = 2E_{2312} \\ & & & & L_{55} = 2E_{3131} & L_{56} = 2E_{3112} \\ & & & & & L_{66} = 2E_{1212} \end{array} \right]$$

- La relazione è dunque ancora in forma matriciale.
- La ragione di questa diversa rappresentazione dell'anisotropia risiede nel fatto che il legame inverso conserva la stessa forma di quello diretto, come si evince facilmente considerando la simmetria della relazione inversa.

69



Notazione di Pedersen

- In altre parole, se si pone

$$\{\varepsilon\} = [M]\{\sigma\},$$

con ancora i due vettori colonna delle deformazioni e delle tensioni dati dalle relazioni precedenti, allora la matrice $[M]$ è data, con ancora lo stesso simbolismo usato per $[L]$, dalla relazione

$$[M] = \left[\begin{array}{c|c} Z & \sqrt{2}Z \\ \hline \sqrt{2}Z & 2Z \end{array} \right],$$

ed in più, ovviamente,

$$[M] = [L]^{-1}.$$

- Questa circostanza riflette il fatto, provato da Mehrabadi e Cowin, 1990, che le due matrici $[L]$ e $[M]$ rappresentano un tensore doppio in \mathbb{R}^6 , mentre invece, come già detto, $[C]$ e $[S]$ sono semplicemente delle matrici.

70



Notazione di Pedersen

- Questo, tra l'altro, implica il fatto che mentre le componenti di $[L]$ e $[M]$ si trasformano, per cambiamento di base, con le leggi classiche dei tensori del secondo ordine, e identiche per entrambe le matrici, così non è per $[C]$ e $[S]$, come vedremo in seguito.
- La rappresentazione di Pedersen non è molto diffusa e quindi non sarà utilizzata nel seguito di questo corso.



Significato fisico delle componenti elastiche

- Il legame costitutivo anisotropo può essere ulteriormente semplificato se, oltre alle simmetrie indiciali, che riducono a 21 il numero dei moduli elastici indipendenti, si prendono in considerazione anche le eventuali simmetrie materiali, queste, ovviamente, dipendenti dal materiale e non comuni a tutti i continui.
- Tuttavia, prima di passare a questo aspetto e dal momento che si dispone del legame elastico anisotropo generale, è bene considerare sin da adesso il significato fisico che i diversi moduli elastici hanno.
- In effetti, nei materiali anisotropi si riscontrano degli effetti meccanici sconosciuti nei materiali classici, cioè elastici e isotropi, e questi effetti sono proprio rappresentati e quantificati dai moduli elastici, o meglio ancora, dai coefficienti di deformazione, cioè dalle componenti del tensore \mathbf{Z} o della matrice $[S]$.
- Per comprendere ciò, si consideri un cubo di materiale elastico anisotropo, sottoposto alla sola tensione normale σ_1 , come nella figura seguente.



Significato fisico delle componenti elastiche

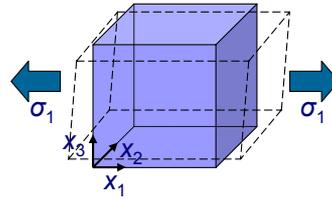
- In tal caso si ricava facilmente che

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, & \varepsilon_2 &= S_{21}\sigma_1, & \varepsilon_3 &= S_{31}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= S_{41}\sigma_1, & \varepsilon_5 &= S_{51}\sigma_1, & \varepsilon_6 &= S_{61}\sigma_1,\end{aligned}$$

cioè, in forma tensoriale,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= Z_{1111}\sigma_{11}, & \varepsilon_{22} &= Z_{2211}\sigma_{11}, & \varepsilon_{33} &= Z_{3311}\sigma_{11}, \\ \varepsilon_{23} &= Z_{2311}\sigma_{11}, & \varepsilon_{31} &= S_{3111}\sigma_{11}, & \varepsilon_{12} &= Z_{1211}\sigma_{11}.\end{aligned}$$

- Si osserva dunque che il materiale subisce non soltanto delle deformazioni normali, ma anche a taglio, pur essendo sottoposto soltanto a uno stato monoassiale di tensione normale.
- Vi sono quindi degli accoppiamenti (dovuti ai termini del tipo S_{ij} , $i=4,5,6$, $j=1,2,3$) inesistenti nel caso di un solido isotropo, per il quale i soli accoppiamenti possibili (dovuti ai termini del tipo S_{ij} , $i,j=1,2,3$, $i \neq j$) sono quelli tra tensioni e deformazioni normali, cioè l'effetto Poisson.



73



Copyright P. Vannucci - UNISO
paolo.vannucci@mecc.uniroma2.it

Significato fisico delle componenti elastiche

- Inoltre, l'effetto Poisson non è, in generale, identico nelle due direzioni trasversali (cioè, per esempio, $S_{21} \neq S_{31}$).
- Il cubo cambia quindi non soltanto di volume, ma anche di forma e diventa un prisma irregolare (non si trasforma in un parallelepipedo).
- Allo stesso modo, se il cubo è soggetto a uno stato di taglio puro, per esempio nel piano 1-2 e parallelo ad x_1 , allora si ottiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{15}\sigma_5, & \varepsilon_2 &= S_{25}\sigma_5, & \varepsilon_3 &= S_{35}\sigma_5, \\ \varepsilon_4 &= S_{45}\sigma_5, & \varepsilon_5 &= S_{55}\sigma_5, & \varepsilon_6 &= S_{65}\sigma_5.\end{aligned}$$

- Anche in questo caso si osservano degli accoppiamenti del tipo di quelli già visti nel caso precedente, tra tensioni a taglio e deformazioni normali (dovuti ai termini del tipo S_{ij} , $i=1,2,3$, $j=4, 5, 6$).
- In più si nota un accoppiamento tra gli sforzi di taglio in un piano e le deformazioni a taglio nei piani ortogonali (dovuto ai termini di tipo S_{ij} , $i,j=4, 5, 6$, $i \neq j$) un effetto analogo all'effetto Poisson, ma stavolta coinvolgente le tensioni e deformazioni a taglio e non quelle normali.

74



Significato fisico delle componenti elastiche

- Nella matrice $[S]$ si possono quindi individuare i gruppi di componenti responsabili dei vari effetti, diretti (i termini che si trovano sulla diagonale) o di accoppiamento, come nello schema seguente (è poi immediato trasferire queste considerazioni alle corrispondenti componenti del tensore \mathbf{Z}).



- Si riconosce facilmente che una suddivisione simile esiste anche per il tensore di rigidezza \mathbf{E} e per la corrispondente matrice $[C]$.



Rotazione del riferimento

- In molti casi, è necessario operare una rotazione del riferimento e quindi conoscere le nuove componenti elastiche nel nuovo riferimento (per esempio per esaminare le conseguenze delle eventuali simmetrie elastiche, vedi paragrafo seguente). Vediamo quindi come si esegue questa operazione con le varie rappresentazioni dell'anisotropia.
- Consideriamo dapprima la rappresentazione tensoriale: si conosce il legame costitutivo in una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, associata al riferimento Cartesiano $R = \{o; x_1, x_2, x_3\}$,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

e si vuole conoscerlo nella nuova base $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, associata al nuovo riferimento Cartesiano $R' = \{o; x'_1, x'_2, x'_3\}$,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E}'\boldsymbol{\varepsilon}', \quad \sigma'_{ij} = E'_{ijkl}\varepsilon'_{kl}.$$

- L'apice sta a significare che le componenti delle varie grandezze sono scritte nella base B' , e non che si tratta di nuove grandezze.



Rotazione del riferimento

- Il problema è quindi quello di trovare le componenti E'_{ijkl} del tensore \mathbf{E} scritte per il nuovo riferimento, in funzione di quelle E_{ijkl} nel vecchio e di quelle del tensore rotazione \mathbf{U} che trasforma la vecchia base nella nuova.
- Il tensore \mathbf{U} è un tensore rotazione propria, che opera “materialmente” la rotazione della vecchia base nella nuova, come se si trattasse di un operatore che rigidamente ruota un sistema di 3 assi rigidi nella nuova posizione.
- Le componenti del tensore \mathbf{U} sono allora facilmente ricavabili: la i -esima colonna della matrice che rappresenta \mathbf{U} nella base B è formata dalle componenti del vettore \mathbf{e}'_i , scritte nella base B .
- In altre parole, la componente U_{ij} è il coseno dell'angolo che il vettore \mathbf{e}'_j forma con il vettore \mathbf{e}_i , misurato a partire da quest'ultimo; la matrice $[U]$ è dunque una matrice di coseni direttori; simbolicamente,

$$\mathbf{U}_B = [\mathbf{e}'_1 | \mathbf{e}'_2 | \mathbf{e}'_3]_B.$$

77



Rotazione del riferimento

- Nel caso, molto comune e spesso utilizzato nel seguito, in cui la rotazione del riferimento si riduca ad una rotazione dell'angolo θ attorno all'asse x_3 , allora

$$\mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Per come è stato costruito, \mathbf{U} è il tensore tale che

$$(\mathbf{e}'_i)_B = \mathbf{U}_B(\mathbf{e}_i)_B$$

e quindi anche (da ricordare che $\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{U}^T$ perché \mathbf{U} è una rotazione)

$$(\mathbf{e}_i)_{B'} = \mathbf{U}_B^T(\mathbf{e}'_i)_{B'}.$$

- Si è qui usato il fatto che $\mathbf{U}_B=\mathbf{U}_B^T$, come si riconosce immediatamente.

78



Rotazione del riferimento

- Per alleggerire la notazione, l'ultima relazione sarà scritta

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{U}^T \mathbf{e}'_i,$$

sottintendendo dunque che questa operazione fornisce le componenti, rispetto alla base B' , del vettore \mathbf{e}_i della base B e che le componenti del tensore \mathbf{U} sono quelle nella base B ma trasposte.

- In rappresentazione indiciale, sarà

$$\mathbf{e}_i = U_{mn}^T (\mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n) \mathbf{e}'_i = U_{mn}^T \delta_{in} \mathbf{e}'_m = U_{im} \mathbf{e}'_m.$$

- Esprimendo il tensore \mathbf{E} nelle due basi come

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_B &= E_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \\ \mathbf{E}_{B'} &= E'_{mnpq} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_p \otimes \mathbf{e}'_q,\end{aligned}$$

ed inserendo l'espressione qui sopra per esprimere i vettori di B nella base B' , si ottiene la ben nota formula

79



Rotazione del riferimento

$$E'_{mnpq} = U_{im} U_{jn} U_{kp} U_{lq} E_{ijkl}.$$

- Da notare dunque che le nuove componenti del tensore \mathbf{E} nella base B' sono una combinazione lineare delle vecchie componenti, nella base B , e che i coefficienti di questa combinazione sono funzioni di grado 4 dei coseni direttori della rotazione.
- Da notare anche che se come tensore rotazione \mathbf{U} si prende, come alcuni testi fanno, il tensore che opera il cambiamento di componenti, e non la rotazione della base, cioè se si prende \mathbf{U}^T al posto di \mathbf{U} , nella formula qui sopra si deve ovviamente invertire l'ordine degli indici delle componenti di \mathbf{U} .
- Questa stessa formula si applica ovviamente anche al tensore \mathbf{Z} :

$$Z'_{mnpq} = U_{im} U_{jn} U_{kp} U_{lq} Z_{ijkl}.$$

80



Rotazione del riferimento

- Consideriamo adesso la rappresentazione di Voigt, per le due basi:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad \{\sigma'\} = [C']\{\varepsilon'\}.$$

- Dapprima, si devono trasformare i vettori colonna che rappresentano i tensori σ e ε .
- Per far questo, bisogna ricordare che i tensori del secondo ordine si trasformano come segue:

$$\sigma' = U^T \sigma U, \quad \varepsilon' = U^T \varepsilon U.$$

- Allora, una volta svolti i calcoli e riordinati i tensori in vettori colonna, dove si considerano solo le 6 componenti distinte, si ottiene, per il vettore colonna rappresentante il tensore degli sforzi, la relazione

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\},$$

dove la matrice $[T]$ è data da



Rotazione del riferimento

$$[T] = \begin{bmatrix} U_{11}^2 & U_{21}^2 & U_{31}^2 & 2U_{21}U_{31} & 2U_{11}U_{31} & 2U_{21}U_{11} \\ U_{12}^2 & U_{22}^2 & U_{32}^2 & 2U_{22}U_{32} & 2U_{12}U_{32} & 2U_{12}U_{22} \\ U_{13}^2 & U_{23}^2 & U_{33}^2 & 2U_{23}U_{33} & 2U_{13}U_{33} & 2U_{13}U_{23} \\ U_{12}U_{13} & U_{22}U_{23} & U_{32}U_{33} & U_{23}U_{32} + U_{22}U_{33} & U_{13}U_{32} + U_{12}U_{33} & U_{13}U_{22} + U_{12}U_{23} \\ U_{11}U_{13} & U_{21}U_{23} & U_{31}U_{33} & U_{23}U_{31} + U_{21}U_{33} & U_{13}U_{31} + U_{11}U_{33} & U_{13}U_{21} + U_{23}U_{11} \\ U_{11}U_{12} & U_{21}U_{22} & U_{31}U_{32} & U_{22}U_{31} + U_{32}U_{21} & U_{12}U_{31} + U_{32}U_{11} & U_{12}U_{21} + U_{22}U_{11} \end{bmatrix}$$

- Nel caso del tensore delle deformazioni, questa relazione è ancora valida, ma solo se si prendono in conto le componenti tensoriali, cioè le ε_{ij} e non le γ_{ij} .
- Dunque, per trovare l'espressione della matrice che opera la rotazione delle deformazioni in notazione di Voigt, è necessario prendere in conto questo aspetto; ciò si può fare facilmente introducendo la matrice di Reuter, $[R]$, che trasforma le componenti tensoriali in componenti di Voigt:



Rotazione del riferimento

$$\{\varepsilon\}_{Voigt} = [R]\{\varepsilon\}_{tens} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

- Allora, ponendo

$$\{\varepsilon\}_{tens} = [R]^{-1}\{\varepsilon\}_{Voigt}, \quad [R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

si ha evidentemente che, con $\{\varepsilon\}$ in notazione di Voigt,

83



Rotazione del riferimento

$$\{\varepsilon\}' = [R][T][R]^{-1}\{\varepsilon\},$$

- Si dimostra inoltre che

$$[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T},$$

e sviluppando i calcoli si trova

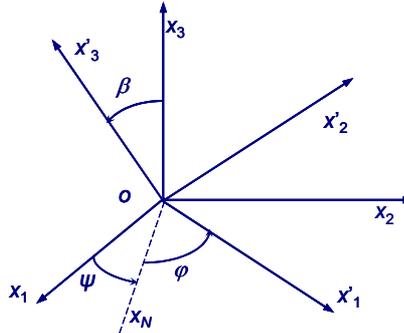
$$[T]^{-T} = \begin{bmatrix} U_{11}^2 & U_{21}^2 & U_{31}^2 & U_{21}U_{31} & U_{11}U_{31} & U_{21}U_{11} \\ U_{12}^2 & U_{22}^2 & U_{32}^2 & U_{22}U_{32} & U_{12}U_{32} & U_{12}U_{22} \\ U_{13}^2 & U_{23}^2 & U_{33}^2 & U_{23}U_{33} & U_{13}U_{33} & U_{13}U_{23} \\ 2U_{12}U_{13} & 2U_{22}U_{23} & 2U_{32}U_{33} & U_{23}U_{32} + U_{22}U_{33} & U_{13}U_{32} + U_{12}U_{33} & U_{13}U_{22} + U_{12}U_{23} \\ 2U_{11}U_{13} & 2U_{21}U_{23} & 2U_{31}U_{33} & U_{23}U_{31} + U_{21}U_{33} & U_{13}U_{31} + U_{11}U_{33} & U_{13}U_{21} + U_{23}U_{11} \\ 2U_{11}U_{12} & 2U_{21}U_{22} & 2U_{31}U_{32} & U_{22}U_{31} + U_{32}U_{21} & U_{12}U_{31} + U_{32}U_{11} & U_{12}U_{21} + U_{22}U_{11} \end{bmatrix}$$

84



Rotazione del riferimento

- Il fatto che $[T]^{-T}$ non è la matrice $[T]$, prova che $[T]$ non è una matrice che rappresenta un tensore rotazione in \mathbb{R}^6 .
- Se si utilizza il classico metodo degli angoli di Eulero per determinare la rotazione delle due basi, come in figura, si ottiene per \mathbf{U} l'espressione:



$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} (\cos\psi \cos\phi - \sin\psi \sin\phi \cos\beta) & (-\cos\psi \sin\phi - \sin\psi \cos\phi \cos\beta) & \sin\psi \sin\beta \\ (\sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\phi \cos\beta) & (-\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \cos\phi \cos\beta) & -\cos\psi \sin\beta \\ \sin\phi \sin\beta & \cos\phi \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

- L'espressione di $[T]$ non viene data qui perché troppo lunga.

85



Rotazione del riferimento

- Nel caso in cui la rotazione avvenga attorno all'asse x_3 , la nutazione $\beta=0$ mentre la precessione ψ e la rotazione propria ϕ non sono determinate, ma la loro somma sì ed è proprio l'anomalia θ utilizzata in precedenza. Si constata facilmente che in questo caso si ritrova, come giusto, la stessa matrice di pagina 78.
- Da notare comunque che gli angoli di Eulero non sono sempre il modo più pratico di determinare la rotazione relativa di due basi, ma possono essere usati proficuamente in alcuni casi (per esempio per dimostrare l'asserto alla pagina 84).
- Adesso si può esplicitare l'espressione del legame costitutivo matriciale nel riferimento ruotato, in notazione di Voigt:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}' &= [T]\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma\} = [T]^{-1}\{\sigma\}', \\ \{\varepsilon\}' &= [T]^{-T}\{\varepsilon\} \rightarrow \{\varepsilon\} = [T]^T\{\varepsilon\}', \\ \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} \rightarrow [T]^{-1}\{\sigma\}' = [C][T]^T\{\varepsilon\}' \rightarrow \{\sigma\}' = [T][C][T]^T\{\varepsilon\}'. \end{aligned}$$

86



Rotazione del riferimento

- Dunque,

$$\{\sigma'\} = [C'] \{\varepsilon'\}, \text{ dove } [C'] = [T][C][T]^T.$$

- Per il legame inverso si ottiene invece

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \rightarrow [T]^T \{\varepsilon'\} = [S][T]^{-1} \{\sigma'\} \rightarrow \{\varepsilon'\} = [T]^{-T} [S][T]^{-1} \{\sigma'\},$$

e dunque

$$\{\varepsilon'\} = [S'] \{\sigma'\}, \text{ dove } [S'] = [T]^{-T} [S][T]^{-1},$$

il che mostra che la rotazione della matrice $[S]$ non si opera come la rotazione della matrice $[C]$.

- Questa è una delle conseguenze fondamentali della notazione di Voigt, da considerarsi con cura nei calcoli.
- Le componenti di $[C']$ e di $[S']$ si possono esplicitare in funzione di quelle di $[C]$ e $[S]$; vedremo le formule relative nel caso piano (pagina 159 e seguenti).

87



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Sino ad ora si è considerato un continuo completamente anisotropo, detto anche *triclino*; tuttavia, i materiali, naturali o artificiali, presentano sempre delle simmetrie materiali, cioè manifestano un comportamento per il quale la risposta meccanica è sì direzionale, ma si ripete identica secondo certe direzioni.
- E', come già detto, il caso dei cristalli, che dispongono di simmetrie della risposta meccanica per effetto della disposizione dei costituenti molecolari su un reticolo organizzato secondo geometrie precise, ma è anche il caso di altri materiali.
- Ad esempio, gli acciai da laminazione hanno una direzione di simmetria conferita loro dal processo di fabbricazione, che tende ad orientare i grani di minerale secondo una direzione privilegiata.
- Oppure, è ancora il caso di alcune rocce, in genere sedimentarie e metamorfiche, dove il processo di sedimentazione o la spinta tettonica produce una microstruttura orientata dei grani costituenti.

88



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Sempre in natura, è ancora il caso del ghiaccio del pack, che si forma per cristallizzazione dell'acqua di mare in una sequenza dall'alto verso il basso e con orientazione preferenzialmente verticale di macrocristalli allungati di ghiaccio.
- E infine, è ovviamente il caso di molte essenze legnose, in cui la presenza, più o meno marcata, di fibre nella direzione di accrescimento provoca ancora un comportamento con direzioni di simmetria preferenziale.
- Accanto a questi casi che riguardano materiali più o meno classici, esistono i casi di molti materiali compositi, che sono materiali artificiali in cui le simmetrie nel comportamento meccanico sono indotte da una disposizione preferenziale di fibre di rinforzo.
- Nel caso poi dei laminati formati da strati rinforzati con fibre, la simmetria del comportamento elastico può essere governata dal progettista e può esistere anche in caso di totale mancanza di una sottostante simmetria geometrica del materiale.



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Nelle direzioni di simmetria materiale le proprietà meccaniche, in particolare quelle elastiche, di cui ci occuperemo qui, sono identiche: queste direzioni sono dette *direzioni equivalenti*.
- Neumann ha enunciato un principio per i cristalli che stabilisce la relazione tra la simmetria materiale e quella elastica: *le proprietà fisiche di un materiale hanno le stesse simmetrie della sua forma cristallina*.
- Tale principio può essere esteso anche ai solidi non cristallini, ma che possiedono comunque una qualche simmetria nella loro costituzione strutturale (ad esempio il legno).
- Tuttavia, si deve sottolineare sin da adesso che il concetto di simmetria elastica è più vasto di quello di simmetria materiale (ossia, di disposizione simmetrica della materia): oltre alle direzioni equivalenti, che coincidono con quelle di simmetria della struttura materiale, esistono altre direzioni in cui le componenti elastiche sono identiche.



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- La presenza di simmetrie elastiche ha come conseguenza la diminuzione del numero di componenti elastiche indipendenti.
- Il tipo di simmetria elastica determina quindi una classe di materiali elastici lineari.
- Vi sono almeno due modi di trattare l'esistenza delle simmetrie elastiche al fine di ricavarne le conseguenze sulle componenti elastiche.
- Vediamo qui di seguito questi due approcci, sempre però utilizzando la notazione di Voigt.

- Siano R e R' due riferimenti, simmetrici secondo la forma della simmetria elastica del materiale.
- Il primo modo consiste nello sfruttare l'invarianza del potenziale elastico rispetto al riferimento, mentre il secondo utilizza direttamente la legge di Hooke scritta nei due riferimenti.

91



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Poiché le direzioni degli assi corrispondenti dei due riferimenti sono direzioni equivalenti, a causa della simmetria elastica in oggetto, le espressioni della legge di Hooke e del potenziale elastico sono le stesse in R e in R' , e questo per uno stato di sforzo o di deformazione qualsiasi.
- Questa circostanza implica che devono essere identiche le componenti elastiche corrispondenti, ossia che nei due riferimenti le matrici $[C]$ e $[S]$ sono identiche.
- Dovendo ciò verificarsi per ogni possibile stato di sforzo o di deformazione, ne conseguono delle relazioni sulle componenti di queste matrici (per esempio, alcune si annullano).

- Per il primo metodo, si scrive il potenziale elastico nei due riferimenti, conservando la stessa matrice $[C]$, se si lavora con le deformazioni, o $[S]$ se si lavora con le tensioni:

92



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

$$V = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\}, \quad V' = \frac{1}{2} \{\varepsilon'\}^T [C] \{\varepsilon'\},$$

$$V = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\}, \quad V' = \frac{1}{2} \{\sigma'\}^T [S] \{\sigma'\}.$$

- Si sfruttano poi le trasformazioni per rotazione dei vettori $\{\varepsilon\}$ o $\{\sigma\}$:

$$\{\sigma'\} = [T] \{\sigma\}, \quad \{\varepsilon'\} = [T]^{-T} \{\varepsilon\}.$$

- Sostituendo nell'espressione corrispondente di V' , si ha la condizione, data dall'invarianza del potenziale elastico,

$$V = V' \rightarrow \begin{cases} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} = \{[T]^{-T} \{\varepsilon\}\}^T [C] [T] \{\varepsilon\}, \\ \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} = \{[T] \{\sigma\}\}^T [S] [T] \{\sigma\}. \end{cases}$$

- Ovviamente, al posto di $[T]$ si deve inserire la matrice rappresentante la simmetria in questione.

93



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- Per il secondo metodo, si scrive la legge di Hooke nei due riferimenti, si impone che questa sia la medesima nei due casi, cioè che, per simmetria, nei due sistemi la matrice $[C]$ sia la medesima, e si sfruttano le formule di rotazione di tensioni e deformazioni:

$$\text{per simmetria si ha } \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \text{ e } \{\sigma'\} = [C] \{\varepsilon'\};$$

$$\text{ma: } \{\sigma'\} = [T] \{\sigma\} \text{ e } \{\varepsilon'\} = [T]^{-T} \{\varepsilon\},$$



$$[T] [C] \{\varepsilon\} = [C] [T]^{-T} \{\varepsilon\}.$$

- Se si lavora con le tensioni si ha la condizione analoga per le componenti di $[S]$; seguendo lo stesso procedimento si ricava la relazione necessaria di simmetria per la matrice $[S]$:

$$[T]^{-T} [S] \{\sigma\} = [S] [T] \{\sigma\}.$$

94



Le simmetrie elastiche: Principio di Neumann

- L'ultima relazione puo' ricavarsi anche direttamente dalla precedente.
- La matrice $[7]$ è ancora quella che descrive la simmetria in oggetto; si deve notare che il tensore rotazione \mathbf{U} che descrive la simmetria, e da cui $[7]$ dipende, in generale non è una rotazione propria (cioè a determinante +1), potendo rappresentare una riflessione (che comporta una inversione dell'orientazione dello spazio) o una combinazione di rotazioni e riflessioni (quindi con determinante che può assumere il valore -1).
- Di seguito, utilizzeremo il primo metodo perché più semplice da trattare e perché dà luogo a soltanto una equazione scalare invece di 6 equazioni scalari, come è il caso del secondo metodo.



Le diverse simmetrie elastiche

- Consideriamo adesso le diverse simmetrie elastiche possibili; queste sono:
 - simmetria rispetto ad un piano;
 - simmetria rispetto a tre piani ortogonali;
 - simmetria di ordine n rispetto ad un asse;
 - simmetria completa.
- **Simmetria rispetto ad un piano:** questo significa che attraverso ogni punto del continuo, passa un piano avente la proprietà che due direzioni simmetriche rispetto al piano sono direzioni equivalenti.
- In questo caso il tensore \mathbf{U} rappresenta una riflessione; se il piano di simmetria materiale è ortogonale all'asse x_3 , allora

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Le diverse simmetrie elastiche

- Infatti, in questo modo si ottiene una riflessione del riferimento, in cui solo l'asse x_3 cambia di orientazione.
- In questo caso, si ottiene

$$[T] = [T]^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i = \sigma'_i, & \varepsilon_i = \varepsilon'_i, & i = 1,2,3,6; \\ \sigma_i = -\sigma'_i, & \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, & i = 4,5. \end{cases}$$

- Allora la condizione

$$V = V' \rightarrow \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} = \{T\}^{-T} \{\varepsilon\}^T [C] \{T\}^{-T} \{\varepsilon\},$$

si traduce in questo caso in

Le diverse simmetrie elastiche

$$C_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + C_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + \\ + C_{34}\varepsilon_3\varepsilon_4 + C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 + C_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon.$$

- La sola possibilità perché questa equazione sia verificata per ogni possibile stato deformativo, è che sia

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0.$$

- La matrice di elasticità si riduce quindi a sole 13 componenti distinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

Le diverse simmetrie elastiche

- In particolare, si assiste, ed è un fatto caratteristico che si risconterà anche nei casi seguenti, alla scomparsa di alcuni termini di accoppiamento.
- Lo stesso procedimento si sarebbe potuto attuare con riguardo alle componenti della matrice $[S]$, ottenendo un risultato analogo.
- Da notare che mentre $\det \mathbf{U} = -1$, $\det [T] = +1$, confermando il fatto che $[T]$ non è una matrice rotazione.
- Un materiale che ha una simmetria rispetto ad un piano, si chiama *monoclino*.
- **Simmetria rispetto a tre piani ortogonali:** consideriamo adesso il caso in cui il continuo possieda un altro piano di simmetria, ortogonale al precedente.
- Sia ad esempio $x_2=0$ questo nuovo piano di simmetria; ripercorrendo la stessa procedura applicata in precedenza, si ha

99



Le diverse simmetrie elastiche

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T] = [T]^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i = \sigma'_i, & \varepsilon_i = \varepsilon'_i, & i = 1, 2, 3, 5, \\ \sigma_i = -\sigma'_i, & \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, & i = 4, 6. \end{cases}$$

- Si ottiene dunque la relazione

$$C_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + C_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + C_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + C_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + C_{34}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{54}\varepsilon_5\varepsilon_4 + C_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon.$$

- Da questa, si ricavano le ulteriori condizioni sulle componenti di $[C]$:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{54} = 0.$$

- Il numero delle componenti elastiche indipendenti si è dunque ridotto a 9.

100



Le diverse simmetrie elastiche

- Si consideri a questo punto l'esistenza di un terzo piano di simmetria, ortogonale ai due precedenti (evidentemente, il piano $x_1=0$, il solo che resta).
- Procedendo come di consueto, si ha

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{T}] = [\mathbf{T}]^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i = \sigma'_i, & \varepsilon_i = \varepsilon'_i, & i = 1,2,3,4; \\ \sigma_i = -\sigma'_i, & \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, & i = 5,6. \end{cases}$$

- Si ottiene quindi la relazione

$$C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + C_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + \\
 + C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + C_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{45}\varepsilon_4\varepsilon_6 + C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}.$$



Le diverse simmetrie elastiche

- Questa relazione, si riscontra subito, non offre nessuna condizione supplementare sulle componenti di $[\mathbf{C}]$: l'esistenza di un terzo piano di simmetria, ortogonale ai due precedenti, non aggiunge nulla di nuovo.
- Dato che il procedimento seguito non dipende dall'ordine in cui si considerano le differenti simmetrie, come si constata immediatamente, questa circostanza si può interpretare come il fatto che l'esistenza di soli due piani ortogonali di simmetria è impossibile: un secondo piano di simmetria ortogonale implica necessariamente l'esistenza anche di un terzo piano di simmetria.
- In questi casi, dunque, il numero delle costanti elastiche indipendenti si riduce a 9; questi materiali si dicono *ortogonalmente anisotropi*, o più semplicemente *ortotropi*.
- Molti materiali, naturali o compositi artificiali, sono ortotropi; questa classe di materiali assume dunque una grande importanza nelle applicazioni.



Le diverse simmetrie elastiche

- Il legame ortotropo è dunque

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- Si osserva che nei materiali ortotropi, rispetto al riferimento di simmetria materiale, detto anche *riferimento di ortotropia*, scompaiono tutti gli accoppiamenti tipici dell'anisotropia, restando solo quelli tra tensioni e deformazioni normali, cioè gli effetti Poisson, in genere distinti, nelle tre direzioni di simmetria.
- Per la matrice $[S]$ si ottiene ancora un risultato analogo.

103



Le diverse simmetrie elastiche

- Simmetria di ordine n rispetto ad un asse:** un asse g è un asse di simmetria di ordine n se le direzioni equivalenti formano un insieme di rette che si sovrappongono per rotazione di un angolo θ pari a $2\pi/n$ attorno all'asse g .
- Nel caso dell'elasticità, si dimostra che possono esistere solo assi di simmetria di ordine 2, 3, 4 e 6.
- Nel seguito, considereremo l'asse g coincidente con l'asse x_3 .
- Simmetria di ordine 2; in questo caso $\theta=\pi$ (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di 180° attorno ad x_3).
- L'espressione del tensore \mathbf{U} è quella data a pagina 78, e in questo caso si ottiene

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

104



Le diverse simmetrie elastiche

- A questo tensore rotazione, corrisponde la matrice

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che è la stessa del caso monoclino.

- Questo implica che il risultato è il medesimo: la simmetria di ordine 2 rispetto ad un asse coincide con la simmetria rispetto ad un piano ortogonale all'asse.
- La matrice $[C]$ è dunque la stessa del caso monoclino, come pure la matrice $[S]$, e quindi si hanno 13 componenti elastiche indipendenti anche in questo caso.



Le diverse simmetrie elastiche

- Simmetria di ordine 3; in questo caso $\theta = 2/3 \pi$ (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di 120° attorno ad x_3).
- In questo caso si ha

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Esprimendo come di consueto l'uguaglianza del potenziale elastico nei due riferimenti, si ottiene un'equazione piuttosto lunga, che si omette per brevità.



Le diverse simmetrie elastiche

- Le condizioni sulle componenti della matrice $[C]$, derivanti dall'imporre che la suddetta uguaglianza sia valida per ogni stato di deformazione, sono in totale 14:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{34} = C_{35} = C_{45} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad C_{55} = C_{44}, \quad C_{23} = C_{13},$$

$$C_{24} = -C_{14}, \quad C_{15} = -C_{25}, \quad C_{46} = C_{25}, \quad C_{56} = C_{14}, \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}.$$

- Il legame elastico in questo caso dipende dunque da 7 componenti elastiche indipendenti

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{25} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & C_{25} \\ -C_{25} & C_{25} & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & C_{25} & C_{14} & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

107



Le diverse simmetrie elastiche

- In questo caso per la matrice $[S]$ si ottiene un risultato leggermente differente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & -S_{25} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} & S_{25} & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} & 0 & S_{25} \\ -S_{25} & S_{25} & 0 & 0 & S_{44} & S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & S_{25} & S_{14} & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$

- Questo è dovuto al fatto che la relazione che lega le componenti di $[S]$ a quelle del tensore \mathbf{Z} comporta dei coefficienti 2 e 4, pagina 66.
- D'altra parte, questo risultato si può ritrovare direttamente per inversione della matrice $[C]$.

108



Le diverse simmetrie elastiche

- Simmetria di ordine 4; in questo caso $\theta = \pi/2$ (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di 90° attorno ad x_3).
- Questa volta si ha

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Procedendo come al solito, si ottengono le 14 condizioni seguenti:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{45} = C_{36} = C_{46} = C_{56} = 0, \\ C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{13}, \quad C_{26} = -C_{16}, \quad C_{55} = C_{44}.$$



Le diverse simmetrie elastiche

- Anche in questo caso il legame elastico dipende da 7 componenti distinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- Simmetria di ordine 6; in questo caso $\theta = \pi/3$ (la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ottiene per una rotazione di 60° attorno ad x_3).
- In tal caso si ha



Le diverse simmetrie elastiche

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{T}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Si ottengono in questo caso le 16 condizioni seguenti:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{45} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{46} = C_{56} = 0,$$

$$C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{13}, \quad C_{55} = C_{44}, \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}.$$



Le diverse simmetrie elastiche

- Il legame elastico dipende in questo caso da 5 componenti distinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- Anche in questo caso, come in quello di asse di simmetria di ordine 3, la matrice $[\mathcal{S}]$ è, per le stesse ragioni addotte in quel caso, leggermente differente:



Le diverse simmetrie elastiche

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Simmetria di ordine ∞ ; in questo caso la sovrapposizione delle direzioni equivalenti si ha per una rotazione di un angolo θ qualsiasi, ovvero, ogni direzione nel piano ortogonale all'asse è direzione equivalente, cioè di simmetria, e l'asse è dunque un asse di simmetria di rotazione.
- In questo caso si ha



Le diverse simmetrie elastiche

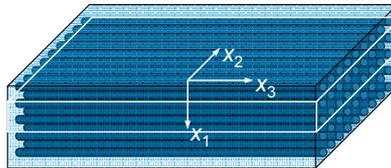
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

- Procedendo come di consueto, si arriva alle stesse 16 condizioni del caso precedente.
- Questo significa che il caso in esame, che riguarda i cosiddetti materiali *trasversalmente isotropi*, coincide, dal punto di vista elastico, con quello di una simmetria di ordine 6. In altre parole, un asse di simmetria di ordine 6 è anche un asse di simmetria elastica di rotazione, o se si preferisce, un continuo che presenta un asse di simmetria di ordine 6 ha lo stesso comportamento di un continuo che ha una simmetria di rotazione rispetto allo stesso asse.



Le diverse simmetrie elastiche

- Anche i continui trasversalmente isotropi hanno un comportamento elastico descritto quindi da sole 5 componenti elastiche distinte. Le matrici $[C]$ ed $[S]$ sono ovviamente quelle precedenti, del caso $n=6$.
- I materiali trasversalmente isotropi sono importanti nelle applicazioni: infatti, un materiale composto da una matrice isotropa rinforzata con fibre orientate disposte in maniera uniforme ha un comportamento isotropo trasverso: la direzione di simmetria è quella delle fibre, mentre tutte le direzioni nel piano ortogonale a questa sono equivalenti, data l'uniformità di distribuzione delle fibre orientate.
- Questo è il caso del legno ed anche dei compositi fibrorinforzati.
- In effetti, una lamina di composito a fibre lunghe, come pure una di legno, è a tutti gli effetti una "fetta" di un solido massivo fibrorinforzato.



115



Le diverse simmetrie elastiche

- Anche altri materiali già citati, come il ghiaccio del pack, l'acciaio di laminazione o certe rocce, hanno un comportamento isotropo trasverso, determinato sempre dall'esistenza di una direzione di simmetria elastica, prodottasi nel processo di formazione del materiale stesso.
- **Simmetria completa:** nella simmetria completa, detta anche *isotropia*, ogni direzione dello spazio è equivalente, dal punto di vista elastico. Questo significa anche che il legame è indifferente rispetto al riferimento scelto. In altre parole, le componenti dei tensori \mathbf{E} e \mathbf{Z} sono anche degli invarianti tensoriali, e così pure, le componenti delle matrici $[C]$ e $[S]$ non variano per cambiamento del riferimento.
- La via seguita sin qui per tutti i casi precedenti di simmetria può essere ancora utilizzata; si può, ad esempio, esprimere il tensore \mathbf{U} tramite gli angoli di Eulero, e procedere nel solito modo.

116



Le diverse simmetrie elastiche

- Tuttavia, questa procedura è molto onerosa dal punto di vista del calcolo (si dovrebbe imporre che $V=V'$ per una rotazione qualsiasi).
- Un altro modo, più rapido, è il seguente: per un materiale trasversalmente isotropo, si impone che la direzione x_3 , dell'asse di simmetria, sia equivalente a una direzione qualsiasi nel piano di isotropia, per esempio la direzione x_1 .
- In tal caso, si ha una trasformazione di riflessione e rotazione, descritta da

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si ottengono quindi le 3 condizioni seguenti

$$C_{33} = C_{11}, \quad C_{13} = C_{12}, \quad C_{44} = C_{66}.$$

Le diverse simmetrie elastiche

- Quindi, come noto, il numero delle componenti elastiche indipendenti si riduce a 2; per un solido isotropo, il legame elastico è

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- Da notare che 2 è il numero minimo di grandezze necessarie per caratterizzare un solido in cui si hanno due effetti, uno diretto e uno di accoppiamento (quello di Poisson).
- Per quanto riguarda la matrice $[S]$, si ha

Le diverse simmetrie elastiche

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

- Resta da provare che il legame elastico è invariante rispetto ad un cambio di riferimento qualsiasi, condizione necessaria perché il legame trovato sia rappresentativo di un materiale isotropo, cioè completamente simmetrico.
- Si è visto che il cambio di riferimento trasforma le componenti della matrice $[C]$ secondo la formula

$$[C]' = [T][C][T]^T.$$



Le diverse simmetrie elastiche

- Prendendo una matrice $[T]$ che rappresenta una trasformazione qualsiasi, ad esempio utilizzando gli angoli di Eulero (il tensore \mathbf{U} corrispondente è a pagina 85), si ottiene proprio

$$[C]' = [C] \quad \forall \psi, \phi, \beta.$$

- Quindi, la matrice $[C]$ è invariante rispetto ad una rotazione qualsiasi e le sue componenti lo sono ugualmente: C_{11} e C_{12} sono degli invarianti, come pure le corrispondenti componenti di \mathbf{E} , E_{1111} e E_{1122} .
- Si perviene alle stesse conclusioni anche per la matrice $[S]$, ed il tensore \mathbf{Z} , seguendo la medesima procedura, utilizzando la trasformazione

$$[S]' = [T]^{-T}[S][T]^{-1}.$$

- Infine, si verifica facilmente che il legame isotropo può essere scritto nella classica forma delle *equazioni di Lamé* (1852):



Le diverse simmetrie elastiche

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I},$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \right).$$

- Le due costanti di Lamé, λ e μ , sono legate alle componenti C_{11} e C_{12} dalle relazioni:

$$\lambda = C_{12}, \quad \mu = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}.$$

- Due osservazioni per terminare; la prima concerne l'esistenza dei termini di accoppiamento: si è visto che questi spariscono, in tutto o in parte, per effetto delle simmetrie elastiche.
- Tuttavia, si deve ribadire che, per la maniera stessa con cui si è operato nella riduzione del numero delle componenti elastiche, *questo avviene esclusivamente in un riferimento di simmetria materiale.*

121



Le diverse simmetrie elastiche

- Infatti, in un riferimento qualsiasi, tutti i termini delle matrici $[C]$ e $[S]$, come pure dei tensori \mathbf{E} e \mathbf{Z} , sono in generale differenti da zero, come si constata facilmente ruotando le espressioni di $[C]$ e $[S]$ in un riferimento qualsiasi, per uno dei casi di simmetria elastica visti in precedenza.
- L'unico caso in cui $[C]$ e $[S]$ conservano la propria struttura, cioè sono totalmente invarianti, è quello isotropo: l'isotropia non ha mai termini di accoppiamento, tranne quelli tra tensioni e deformazioni normali, ovvia conseguenza del fatto che l'isotropia è la simmetria totale, in ogni riferimento possibile.
- Al contrario, un qualsiasi continuo si comporta, apparentemente, come un solido totalmente anisotropo in un riferimento che non sia un riferimento di simmetria elastica.
- Resta però il fatto che per ciascuna simmetria elastica il numero delle componenti indipendenti non varia; ad esempio, per un materiale ortotropo le 21 componenti elastiche presenti in un

122



Le diverse simmetrie elastiche

riferimento qualsiasi si possono comunque esprimere in funzione delle sole 9 componenti distinte non nulle presenti nel legame scritto nel riferimento di ortotropia, tramite la regola di cambiamento di riferimento vista in precedenza.

- L'altra osservazione concerne la coassialità dei tensori degli sforzi e delle deformazioni: le equazioni di Lamé mostrano immediatamente che nel caso isotropo questi due tensori sono coassiali.
- Ora, un esempio qualunque basta a far vedere che questo non è, in generale, il caso per un solido anisotropo. Ad esempio, si dimostra facilmente che nel legame cubico,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

123



Le diverse simmetrie elastiche

che è un legame ortotropo in cui le componenti elastiche secondo i tre assi di simmetria sono identiche (è un caso particolare di ortotropia, le componenti distinte sono solo 3, vedere il paragrafo seguente) tensioni e deformazioni non sono coassiali ogni qualvolta è presente una componente di deformazione di taglio rispetto agli assi di ortotropia.

124



Le simmetrie dei cristalli

- I cristalli sono, in natura, i continui anisotropi per eccellenza.
- In funzione della sua struttura cristallina, un solido cristallino ha una certa simmetria geometrica cui corrisponde, per il Principio di Neumann, una simmetria elastica.
- Si dimostra che esistono 32 forme di simmetria geometrica dei cristalli, che corrispondono ai modi di cui si dispone per riempire lo spazio tramite ripetizione ordinata di un motivo elementare, la *cella cristallina*.
- Esistono 14 celle cristalline differenti, i cosiddetti *reticoli di Bravais*.
- Le 32 forme di simmetria cristallina possono essere raggruppate in 7 sistemi cristallini, detti *singonie*; ogni singonia ha un comportamento elastico definito, coincidente con uno dei tipi visti in precedenza tra i tipi triclino, monoclinico, ortotropo, ad asse di rotazione di ordine 3, 4 o 6: eventualmente, in certi casi si hanno ulteriori riduzioni delle costanti elastiche indipendenti, ad esempio perché, a causa della simmetria cristallina, una o più componenti elastiche diventano identiche, senza però cambiare per questo la simmetria elastica.

125



Le simmetrie dei cristalli

- Le *singonie elastiche* dei cristalli, cioè le loro classi di simmetria elastica, sono tuttavia 9, in quanto si osserva che nel caso di due singonie cristalline si hanno due possibili simmetrie elastiche.
- Vi sono diversi modi di classificare i cristalli e non è certo qui la sede per affrontare questo argomento, per il quale si rinvia a dei testi di cristallografia.
- Nel seguito, si dà una tabella riassuntiva delle singonie, secondo la classificazione di Voigt.
- Gli elementi di simmetria geometrica dei cristalli possono essere:
 - piano di simmetria ortogonale, indicato con P;
 - un asse di rotazione di ordine n , con $n=2, 3, 4$ o 6, indicato con L^n ;
 - un asse di simmetria completa di ordine n , in cui alla rotazione di ordine n si aggiunge una simmetria finale rispetto al piano ortogonale all'asse, indicato con L_n ;
 - un centro di simmetria o inversione, indicato con C.
- Ogni forma di simmetria geometrica è caratterizzata da un insieme definito di elementi di simmetria, P, L^n , L_n e C.

126



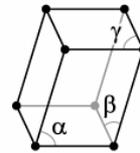
Le simmetrie dei cristalli

- Ad esempio, se la formula di simmetria è $L^3_63L^2_3PC$, allora la forma cristallina ha un asse di rotazione di ordine 3, che è anche un asse di simmetria completa di ordine 6, 3 assi di simmetria di ordine 2, 3 piani di simmetria e un centro di simmetria.
- Vediamo dunque in dettaglio le 7 singonie cristalline, secondo la classificazione di Voigt.

■ Classe I: singonia triclina

- Forme di simmetria: (1) nessuna, (2) C
- Asse x_3 : un qualunque asse
- Singonia elastica: triclina
- Numero componenti elastiche indipendenti: 21
- Reticolo di Bravais →

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$$



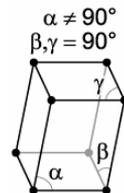
127



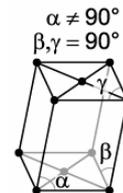
Le simmetrie dei cristalli

■ Classe II: singonia monoclina

- Forme di simmetria: (3) L^2 , (4) P, (5) L^2PC
- Asse x_3 : coincidente con L^2 o ortogonale a P
- Singonia elastica: monoclina
- Numero componenti elastiche indipendenti: 13
- Reticoli di Bravais →



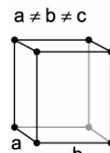
semplice



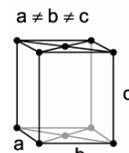
a basi centrate

■ Classe III: singonia ortorombica

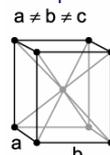
- Forme di simmetria: (6) $3L^2$, (7) L^2_2P , (8) $3L^2_3PC$
- Asse x_3 : coincidente con L^2
- Asse x_1 : coincidente con l'altro L^2 o ortogonale a P
- Singonia elastica: ortotropa
- Numero componenti elastiche indipendenti: 9
- Reticoli di Bravais →
- Esempi: topazio, barite



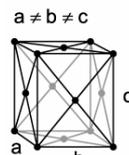
semplice



a basi centrate



a corpo centrato



a facce centrate

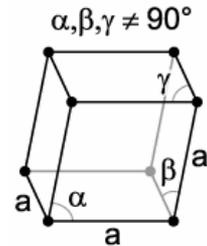
128



Le simmetrie dei cristalli

■ Classe IV: singonia romboedrica o trigonale

- Forme di simmetria: (17) $L^3 3L^2$, (18) $L^3 3P$, (20) $L^3 3L^2 3PC$
- Asse x_3 : coincidente con L^3
- Asse x_1 : coincidente con L^2 o ortogonale a P
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 3, con $C_{25}=0$
- Numero componenti elastiche indipendenti: 6
- Reticolo di Bravais →
- Esempi: calcite, quarzo, tormalina



■ Classe IV a: singonia romboedrica o trigonale

- Forme di simmetria: (16) L^3 , (19) $L^3 6C$
- Asse x_3 : coincidente con L^3
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 3
- Numero componenti elastiche indipendenti: 7
- Reticolo di Bravais →

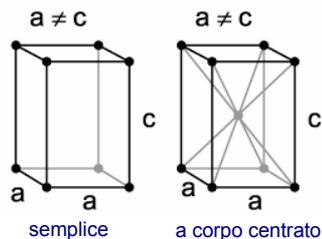
129



Le simmetrie dei cristalli

■ Classe V: singonia tetragonale

- Forme di simmetria: (10) $L^4 L^2$, (12) $L^4 P$, (13) $L^4 L^2 5PC$, (15) $L^2 4L^2 2P$
- Asse x_3 : coincidente con L^4 o L^2_4
- Asse x_1 : coincidente con L^2 o ortogonale a P
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 4, con $C_{16}=0$
- Numero componenti elastiche indipendenti: 6
- Reticolo di Bravais →



■ Classe V a: singonia tetragonale

- Forme di simmetria: (9) L^4 , (11) $L^4 PC$, (14) L^2_4
- Asse x_3 : coincidente con L^4 o L^2_4
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 4
- Numero componenti elastiche indipendenti: 7
- Reticolo di Bravais →

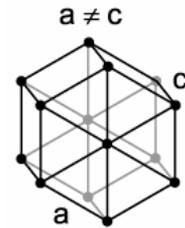
130



Le simmetrie dei cristalli

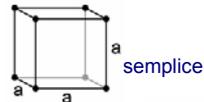
■ Classe VI: singonia esagonale

- Forme di simmetria: (21) L^3P , (22) L^3L^24P , (23) L^6 , (24) L^6L^2 , (25) L^6PC , (26) L^66P , (27) L^6L^27PC
- Asse x_3 : coincidente con L^6 o L^3
- Asse x_1 : coincidente con L^2 quando esiste
- Singonia elastica: asse di simmetria di ordine 6
- Numero componenti elastiche indipendenti: 5
- Reticolo di Bravais →
- Esempio: berillio



■ Classe VII: singonia cubica

- Forme di simmetria: (28) $3L^24L^3$, (29) $3L^24L^3_63PC$, (30) $3L^2_44L^36P$, (31) $3L^44L^36L^2$, (32) $3L^44L^3_66L^29PC$
- Assi x_1 e x_2 : coincidenti con L o L^2 o L^4
- Singonia elastica: ortotropa, con i 3 assi equivalenti
- Numero componenti elastiche indipendenti: 3
- Reticolo di Bravais →
- Esempi: salgemma, pirite, fluorite



131

Le costanti tecniche di elasticità

- Una descrizione alternativa, e molto utilizzata, del comportamento elastico è quella che fa uso delle cosiddette *costanti tecniche* o *dell'ingegnere*.
- Il vantaggio di queste grandezze è quello di quantificare un effetto, diretto o di accoppiamento, dal significato fisico immediato, facilmente identificabile e riproducibile in tests di laboratorio.
- Come conseguenza, queste costanti, sono direttamente deducibili da (più o meno) semplici tests, come ad esempio i tests di trazione.
- Queste costanti tecniche, in numero ovviamente di 21 nel caso più generale di anisotropia totale, sono:
 - 3 moduli di Young E_i , $i=1,2,3$;
 - 3 moduli a taglio G_{ij} , $i,j=1,2,3$;
 - 3 coefficienti di Poisson ν_{ij} , $i,j=1,2,3$;
 - 3 coefficienti di Chentsov $\mu_{ij,kl}$, $i,j,k,l=1,2,3$;
 - 9 coefficienti di influenza mutua di 1° o 2° tipo, $\eta_{ij,k}$ o $\eta_{i,jk}$, $i,j,k=1,2,3$;

132

Le costanti tecniche di elasticità

- Il modo in cui sono definite le costanti tecniche ed il legame che queste hanno con le componenti elastiche della matrice $[S]$ e del tensore \mathbf{Z} è indicato qui di seguito.

- Moduli di Young:** come nel caso isotropo, si definisce il modulo di Young E_i come:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad i = 1,2,3, \quad \sigma_j = 0 \quad \text{per} \quad j \neq i, \quad j = 1,\dots,6.$$

- Ne conseguono le relazioni

$$S_{11} = Z_{1111} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = Z_{2222} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = Z_{3333} = \frac{1}{E_3}.$$

- Moduli a taglio:** ancora come nel caso isotropo, si definisce il modulo a taglio G_{ij} come

$$G_{ij} = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}, \quad i, j = 1,2,3, \quad k = 4,5,6, \quad \sigma_h = 0 \quad \text{per} \quad h \neq k, \quad h = 1,\dots,6.$$

133



Le costanti tecniche di elasticità

- La corrispondenza tra gli indici k e quelli ij è quella usuale di Voigt; inoltre, la simmetria dei tensori σ e ε dà immediatamente $G_{ij}=G_{ji}$: i moduli a taglio sono quindi solo 3.

- Ne conseguono le relazioni

$$S_{44} = 4Z_{2323} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = 4Z_{1313} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = 4Z_{1212} = \frac{1}{G_{12}}.$$

- Coefficienti di Poisson:** ancora, la definizione dei coefficienti di Poisson ν_{ij} è quella classica:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}, \quad i, j = 1,2,3, \quad \sigma_k = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i, \quad k = 1,\dots,6.$$

- D'altra parte, dalla definizione data dei moduli di Young si ha

$$\varepsilon_j = -\nu_{ij}\varepsilon_i = -\nu_{ij}\frac{\sigma_i}{E_i}, \quad i, j = 1,2,3, \quad \sigma_k = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i, \quad k = 1,\dots,6.$$

134



Le costanti tecniche di elasticità

- Ne consegue che

$$S_{ij} = Z_{ijj} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \rightarrow \quad \nu_{ji} = -\frac{S_{ij}}{S_{jj}},$$

cioè le relazioni

$$S_{12} = Z_{1122} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{13} = Z_{1133} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad S_{23} = Z_{2233} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

- Le simmetrie maggiori di $[S]$, $S_{ij}=S_{ji}$ danno poi le seguenti relazioni di reciprocità, che riducono a 3 i coefficienti di Poisson indipendenti:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- Da notare che non tutti gli autori, come ad esempio Tsai, notano in questo modo i coefficienti di Poisson, che è il modo comune a molti autori che operano nel settore dei compositi (Jones, Lekhnitskii etc.): infatti, è usata anche la notazione seguente,



Le costanti tecniche di elasticità

$$S_{ij} = Z_{ijj} = -\frac{\nu_{ij}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- In definitiva, questi autori invertono l'ordine degli indici i e j in ν_{ij} ma la definizione meccanica di coefficiente di Poisson è la medesima.
- **Coefficienti di Chentsov:** si definiscono nel modo seguente:

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{kl}}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq kl, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

- D'altra parte, dalla definizione data dei moduli di taglio si ha

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij,kl} \varepsilon_{kl} = \mu_{ij,kl} \frac{\sigma_{kl}}{G_{kl}}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq kl, \quad p, q = 1, 2, 3.$$



Le costanti tecniche di elasticità

- Ne conseguono le relazioni

$$S_{45} = 4Z_{2331} = \frac{\mu_{23,31}}{G_{31}}, \quad S_{46} = 4Z_{2312} = \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}}, \quad S_{56} = 4Z_{3112} = \frac{\mu_{31,12}}{G_{12}},$$

$$\mu_{23,31} = \frac{S_{45}}{S_{55}}, \quad \mu_{23,12} = \frac{S_{46}}{S_{66}}, \quad \mu_{31,12} = \frac{S_{56}}{S_{66}}.$$

- Le simmetrie maggiori offrono poi le seguenti relazioni di reciprocità, che, insieme alle simmetrie minori, riducono a 3 i coefficienti di Chentsov indipendenti:

$$\frac{\mu_{ij,kl}}{G_{kl}} = \frac{\mu_{kl,ij}}{G_{ij}}.$$

- I coefficienti di Chentsov sono gli analoghi dei coefficienti di Poisson per quanto riguarda gli effetti dovuti alle tensioni di taglio.



Le costanti tecniche di elasticità

- Coefficienti di influenza mutua di 1° tipo:** sono definiti come

$$\eta_{i,jk} = \frac{\varepsilon_{ii}}{2\varepsilon_{jk}}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k, \quad \sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq jk, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

- Questi coefficienti caratterizzano quindi la deformazione normale in direzione i per effetto di un taglio agente in direzione x_j sul piano ortogonale a x_k .
- Le definizioni date dei moduli di taglio, offrono poi

$$\varepsilon_{ii} = 2\eta_{i,jk}\varepsilon_{jk} = \eta_{i,jk} \frac{\sigma_{jk}}{G_{jk}}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad pq \neq jk, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

- Ne conseguono le 9 relazioni (per le simmetrie minori, l'inversione del gruppo di indici jk non ha alcun effetto)



Le costanti tecniche di elasticità

$$S_{14} = 2Z_{1123} = \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}}, \quad S_{15} = 2Z_{1131} = \frac{\eta_{1,31}}{G_{31}}, \quad S_{16} = 2Z_{1112} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}},$$

$$S_{24} = 2Z_{2223} = \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}}, \quad S_{25} = 2Z_{2231} = \frac{\eta_{2,31}}{G_{31}}, \quad S_{26} = 2Z_{2212} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}},$$

$$S_{34} = 2Z_{3323} = \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}}, \quad S_{35} = 2Z_{3331} = \frac{\eta_{3,31}}{G_{31}}, \quad S_{36} = 2Z_{3312} = \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}},$$

e anche le altre 9 relazioni

$$\eta_{1,23} = \frac{S_{14}}{S_{44}}, \quad \eta_{1,31} = \frac{S_{15}}{S_{55}}, \quad \eta_{1,12} = \frac{S_{16}}{S_{66}},$$

$$\eta_{2,23} = \frac{S_{24}}{S_{44}}, \quad \eta_{2,31} = \frac{S_{25}}{S_{55}}, \quad \eta_{2,12} = \frac{S_{26}}{S_{66}},$$

$$\eta_{3,23} = \frac{S_{34}}{S_{44}}, \quad \eta_{3,31} = \frac{S_{35}}{S_{55}}, \quad \eta_{3,12} = \frac{S_{36}}{S_{66}}.$$

139



Le costanti tecniche di elasticità

- **Coefficienti di influenza mutua di 2° tipo:** sono definiti come

$$\eta_{ij,k} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{kk}}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad \sigma_{pq} = 0 \quad \text{per } pq \neq kk, \quad pq = 1, 2, 3.$$

- Questi coefficienti caratterizzano quindi la deformazione a taglio relativa alle direzioni x_i e x_j per effetto di uno sforzo normale in direzione k .
- Le definizioni date dei moduli di Young, offrono poi

$$2\varepsilon_{ij} = \eta_{ij,k} \varepsilon_{kk} = \eta_{ij,k} \frac{\sigma_{kk}}{E_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{per } pq \neq kk, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

- Ne conseguono le 9 relazioni (per le simmetrie minori, l'inversione del gruppo di indici ij non ha alcun effetto)

140



Le costanti tecniche di elasticità

$$\begin{aligned}S_{41} = 2Z_{2311} &= \frac{\eta_{23,1}}{E_1}, & S_{51} = 2Z_{3111} &= \frac{\eta_{31,1}}{E_1}, & S_{61} = 2Z_{1211} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1}, \\S_{42} = 2Z_{2322} &= \frac{\eta_{23,2}}{E_2}, & S_{52} = 2Z_{3122} &= \frac{\eta_{31,2}}{E_2}, & S_{62} = 2Z_{1222} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2}, \\S_{43} = 2Z_{2333} &= \frac{\eta_{23,3}}{E_3}, & S_{53} = 2Z_{3133} &= \frac{\eta_{31,3}}{E_3}, & S_{63} = 2Z_{1233} &= \frac{\eta_{12,3}}{E_3},\end{aligned}$$

e anche le altre 9 relazioni

$$\begin{aligned}\eta_{23,1} &= \frac{S_{41}}{S_{11}}, & \eta_{31,1} &= \frac{S_{51}}{S_{11}}, & \eta_{12,1} &= \frac{S_{61}}{S_{11}}, \\ \eta_{23,2} &= \frac{S_{42}}{S_{22}}, & \eta_{31,2} &= \frac{S_{52}}{S_{22}}, & \eta_{12,2} &= \frac{S_{62}}{S_{22}}, \\ \eta_{23,3} &= \frac{S_{43}}{S_{33}}, & \eta_{31,3} &= \frac{S_{53}}{S_{33}}, & \eta_{12,3} &= \frac{S_{63}}{S_{33}}.\end{aligned}$$

141



Le costanti tecniche di elasticità

- In effetti, l'uso dei coefficienti di 1° o 2° tipo è equivalente, essendo questi legati tra loro dalle seguenti relazioni di reciprocità, dovute alle simmetrie maggiori, e che si ottengono immediatamente confrontando le formule di pagina 139 con quelle corrispondenti di pagina 141:

$$\frac{\eta_{ij,k}}{E_k} = \frac{\eta_{k,ij}}{G_{ij}}.$$

- Una osservazione: si nota che i moduli quantificano gli effetti diretti ed i coefficienti gli accoppiamenti.
- Per inversione della matrice [S], si possono esprimere anche i moduli elastici componenti della matrice [C] in funzione delle costanti tecniche.
- Tuttavia, nel caso generale di solido completamente anisotropo, le espressioni che si ottengono sono estremamente complicate e non trascrivibili, per la loro lunghezza.

142



Le costanti tecniche di elasticità

- Si riporta tuttavia qui di seguito il caso, importante nelle applicazioni, di un continuo ortotropo, con $[C]$ scritta nel riferimento di ortotropia (la convenzione di Einstein sulla somma non si applica alle formule seguenti):

$$C_{ii} = \frac{S_{ij}S_{kk} - S_{jk}^2}{S} = \frac{1 - \nu_{jk}\nu_{kj}}{\Delta} E_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k;$$

$$C_{ij} = \frac{S_{ik}S_{kj} - S_{ij}S_{kk}}{S} = \frac{\nu_{ij} + \nu_{ik}\nu_{kj}}{\Delta} E_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k;$$

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{31}, \quad C_{66} = G_{12},$$

con

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13},$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}.$$

- Nel caso isotropo, come ben noto, le costanti elastiche si riducono semplicemente ad un modulo di Young ed un coefficiente di Poisson.



Le costanti tecniche di elasticità

- Le equazioni di Lamé in funzione di queste costanti tecniche si scrivono

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} \right),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}.$$

- Le costanti tecniche E e ν sono legate alle costanti di Lamé e alle componenti di $[C]$ dalle relazioni seguenti:

$$E = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + \mu} = (C_{11} - C_{12}) \frac{C_{11} + 2C_{12}}{C_{11} + C_{12}}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}},$$

$$\lambda = C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$



Limiti sui moduli elastici

- Le componenti elastiche non possono assumere valori qualsiasi, devono rispettare delle restrizioni, imposte dalla condizione che il lavoro fatto per deformare il corpo deve essere positivo; questo implica, come ben noto, che l'energia di deformazione deve essere positiva per ogni possibile stato deformativo e tensionale:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{o} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}.$$

- Con la notazione di Voigt,

$$V = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{S}] \{\boldsymbol{\sigma}\} > 0 \quad \forall \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad \text{o} \quad \forall \{\boldsymbol{\sigma}\}.$$

- La condizione matematica che assicura il rispetto della condizione sopra è ben nota: le matrici $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{S}]$ devono essere definite positive.
- Essendo queste matrici simmetriche, gli autovalori sono reali;

Limiti sui moduli elastici

basta quindi imporre che tutti gli autovalori siano positivi per ottenere le condizioni ricercate.

- Questo approccio, puramente matematico, porta però a delle complicazioni di calcolo insormontabili; è più facile e più istruttivo utilizzare un approccio meccanico, basato essenzialmente sul fatto che l'energia di deformazione deve essere positiva per ogni possibile stato deformativo o tensionale; scegliendo allora opportunamente il campo di sforzi o di deformazioni, si ottengono facilmente le limitazioni sui valori possibili delle componenti elastiche.
- Si consideri lo stato tensionale

$$\sigma_i \neq 0, \quad \sigma_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad j \neq i.$$

- Allora,

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j, \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2} S_{ii} \sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Limiti sui moduli elastici

- Questo implica che deve essere

$$S_{ij} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6, \quad \rightarrow \quad E_i > 0, \quad G_{ij} > 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

- Allo stesso modo, si possono imporre delle condizioni al bordo tali che nel corpo esista uno stato deformativo in cui è nulla una sola componente di deformazione:

$$\varepsilon_i \neq 0, \quad \varepsilon_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad j \neq i.$$

- In questo caso

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i^2, \quad i = 1, \dots, 6.$$

- Questo implica che deve essere

$$C_{ij} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6.$$

Limiti sui moduli elastici

- Nel caso di un solido ortotropo, esprimendo le condizioni che riguardano le componenti nel riferimento di ortotropia, le relazioni precedenti implicano, considerando le equazioni di pagina 143 e le limitazioni già trovate sui moduli di Young,

$$1 - \nu_{ij} \nu_{ji} > 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

- Utilizzando le relazioni di reciprocità sui coefficienti di Poisson, le limitazioni precedenti possono anche scriversi nella forma

$$|\nu_{ij}| < \sqrt{\frac{E_i}{E_j}}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

o anche

$$|S_{ij}| < \sqrt{S_{ii} S_{jj}}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- A queste condizioni va aggiunta la seguente

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} > 0 \quad \rightarrow$$
$$\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} < \frac{1}{2} \left(1 - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) < \frac{1}{2}.$$

Limiti sui moduli elastici

- Se invece si sottopone il corpo ad uno stato di tensione idrostatica, si dimostra in modo analogo (Lekhnitskii) che vale la condizione

$$\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} < \frac{3}{2}.$$

- Questa condizione è valida in generale, anche quando il riferimento non è quello di ortotropia e anche per un solido totalmente anisotropo.
- Ricavare le condizioni che riguardano i coefficienti di Chentsov e di influenza mutua è estremamente complesso, perché si devono applicare campi di deformazione o tensione almeno biassiali, con grande complicazione dei calcoli.
- Nel caso isotropo, le condizioni di cui sopra si riducono alle ben note

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2},$$

che equivalgono alle

$$\mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda > 0 \quad \rightarrow \quad C_{11} + 2C_{12} > 0, \quad C_{11} - C_{12} > 0.$$

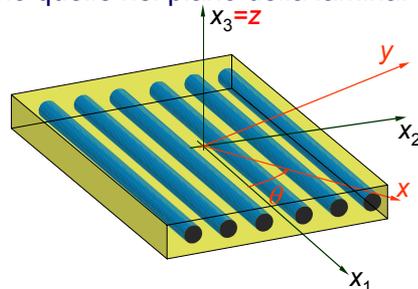
149



Il caso di stato piano di tensione

- Molto spesso, nelle applicazioni, si ha a che fare con strutture piane sottili; ha quindi interesse esaminare il caso in cui queste lamine siano sottoposte a uno stato piano di tensione: le sole componenti non nulle del tensore degli sforzi sono quelle nel piano della lamina:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$



- Il riferimento è quello in figura; indicheremo con $\{x_1, x_2, x_3\}$ il riferimento di partenza e con $\{x, y, z\}$ un altro riferimento ruotato di θ in senso antiorario. Nel caso, molto frequente, in cui la lamina sia ortotropa, il primo riferimento è quello di ortotropia, con x_1 l'asse forte, secondo cui cioè si ha il modulo di Young $E_1 > E_2$.

150



Il caso di stato piano di tensione

- Nel riferimento ruotato $\{x,y,z\}$ indicheremo le tensioni nel modo seguente (l'indice s sta per *shear*):

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\}' = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}.$$

- Si deve fare attenzione al fatto che nel passaggio dal caso tridimensionale a quello bidimensionale, in stato piano di tensione, la matrice $[C]$ si trasforma mentre $[S]$ no; questo si può vedere in due modi.
- Nel primo modo, si scrive il legame deformazioni-tensioni considerando che in uno stato piano di tensione si ha

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0.$$

- Dunque, si ha



Il caso di stato piano di tensione

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$

- Per le componenti di deformazione nel piano, si ha quindi

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$

- Dunque, nel passaggio allo stato piano, niente cambia per le componenti di $[S]$: les S_{ij} hanno lo stesso valore in 2 e 3 dimensioni.



Il caso di stato piano di tensione

- Per le componenti di deformazione fuori piano, si hanno le condizioni imposte dallo stato piano di tensione:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{23} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}.$$

- Ora, la matrice di rigidità nel piano non è altro che l'inversa della matrice $[S]_{3 \times 3}$ nel caso piano; le componenti di questa matrice, indicata con $[Q]$ per distinguerla da $[C]$, e chiamata *matrice di rigidità ridotta*, sono dunque:

$$[Q] = [S]^{-1} \rightarrow [Q] = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} S_{22}S_{66} - S_{26}^2 & S_{16}S_{26} - S_{12}S_{66} & S_{12}S_{26} - S_{16}S_{22} \\ S_{16}S_{26} - S_{12}S_{66} & S_{11}S_{66} - S_{16}^2 & S_{12}S_{16} - S_{26}S_{11} \\ S_{12}S_{26} - S_{16}S_{22} & S_{12}S_{16} - S_{26}S_{11} & S_{11}S_{22} - S_{12}^2 \end{bmatrix},$$

$$s = S_{11}S_{22}S_{66} - S_{11}S_{26}^2 - S_{22}S_{16}^2 - S_{66}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{26}S_{16}.$$



Il caso di stato piano di tensione

- D'altra parte, dato che le componenti di $[S]$ non sono differenti da quelle del caso tridimensionale, si possono ricavare in funzione delle componenti di $[C]$, per inversione di quest'ultima, e sostituirle nell'espressione delle componenti di $[Q]$.
- Nel caso generale, questo calcolo, fattibile, dà delle espressioni molto lunghe; si riporta allora qui di seguito il caso di lamina ortotropa, che è quello che ci interessa nelle applicazioni (tutte le lamine fibrorinforzate sono ortotrope).
- Per una lamina ortotropa, nel riferimento di ortotropia, si ha dunque

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0,$$



Il caso di stato piano di tensione

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & 0 \\ -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_{66}} \end{bmatrix},$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} & \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{33}} & 0 \\ \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{33}} & \frac{C_{22}C_{33} - C_{23}^2}{C_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

in breve $Q_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\beta}C_{33} - C_{\alpha 3}C_{\beta 3}}{C_{33}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad Q_{66} = C_{66},$

Il caso di stato piano di tensione

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}.$$

- Da notare che nel caso piano sono 4 le quantità necessarie a descrivere il comportamento ortotropo nel riferimento di ortotropia.
- Nel secondo modo, si scrive il legame sforzi deformazioni tenendo in conto che $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$.
- Queste tre relazioni danno luogo a tre condizioni per le componenti di deformazione fuori piano; limitandoci ancora al caso ortotropo, queste sono

$$\varepsilon_3 = -\frac{C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2}{C_{33}}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0.$$

Il caso di stato piano di tensione

- Si scrivono quindi le componenti di sforzo nel piano tenendo presenti queste ultime condizioni, in particolare il valore di ϵ_3 . Si giunge così allo stesso valore delle componenti di $[Q]$ già trovate.
- In seguito, si inverte $[Q]$ per ottenere $[S]$ in dimensione 2, e inserendo i valori delle componenti di $[Q]$ in funzione di quelle di $[C]$ si ottengono le componenti di $[S]$ nel piano in funzione di quelle di $[C]$; a questo punto, per confronto, si riconosce che, per $[S]$, si hanno le stesse componenti che nel caso tridimensionale.
- Tenendo presenti le espressioni trovate per le componenti di $[Q]$, le relazioni di reciprocità per i coefficienti di Poisson e la positività dei moduli di Young, si evince che è sempre

$$Q_{ij} > E_j, \quad i = 1, 2.$$

- Per terminare, nel caso isotropo si ha



Il caso di stato piano di tensione

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}.$$

- Confrontando i valori di Q_{11} e Q_{12} con quelli rispettivamente di C_{11} e C_{12} , pagina 144, si osserva in un caso particolare la differenza tra le componenti di $[Q]$ e di $[C]$, già introdotta e conseguenza dell'ipotesi di stato piano di tensione (vedere le formule di pagina 155).



Rotazione del riferimento nel piano

- Si deve spesso conoscere il comportamento elastico in un riferimento ruotato; con riguardo alla figura di pagina 150, si vuole dunque esprimere il legame elastico nel riferimento $\{x, y, z\}$.
- Il metodo per esprimere le componenti elastiche e dei tensori degli sforzi e delle deformazioni in un riferimento ruotato si è già visto nel caso generale. Qui è sufficiente specializzare al caso bidimensionale i risultati trovati.
- In particolare, in questo caso si ha

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed operando come visto nel caso generale, ma considerando le sole componenti nel piano, si ottiene



Rotazione del riferimento nel piano

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}]^{-\text{T}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} s = \sin \theta, \\ c = \cos \theta. \end{matrix}$$

- Le relazioni che ruotano i tensori degli sforzi e delle deformazioni sono ancora

$$\{\sigma\}' = [\mathbf{T}]\{\sigma\}, \quad \{\varepsilon\}' = [\mathbf{R}][\mathbf{T}][\mathbf{R}]^{-1}\{\varepsilon\} = [\mathbf{T}]^{-\text{T}}\{\varepsilon\},$$

cioè

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}.$$

- Finalmente, ancora operando nel modo visto per il caso tridimensionale, si ha



Rotazione del riferimento nel piano

$$\{\sigma\}' = [Q]' \{\varepsilon\}', \quad [Q]' = [T][Q][T]^T,$$

$$\{\varepsilon\}' = [S]' \{\sigma\}', \quad [S]' = [T]^{-T}[S][T]^{-1}.$$

- Le matrici $[Q]'$ e $[S]'$ nel riferimento $\{x, y, z\}$ possono adesso essere esplicitate; nel caso generale di un materiale anisotropo, o comunque quando il riferimento $\{x_1, x_2, x_3\}$ non è quello di ortotropia, il risultato è il seguente, dato in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4s^3c & s^4 \\ -sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ -s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 \\ s^4 & -4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{16} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{26} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}$$

161



Rotazione del riferimento nel piano

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xs} \\ S_{xy} \\ S_{ss} \\ S_{ys} \\ S_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -2sc^3 & 2s^2c^2 & s^2c^2 & -2s^3c & s^4 \\ -2sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & sc^3 - s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & 2s^3c \\ s^2c^2 & s^3c - sc^3 & c^4 + s^4 & -s^2c^2 & sc^3 - s^3c & s^2c^2 \\ 4s^2c^2 & 4(s^3c - sc^3) & -8s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 4(sc^3 - s^3c) & 4s^2c^2 \\ -2s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & 2(s^3c - sc^3) & s^3c - sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & 2sc^3 \\ s^4 & -2s^3c & 2s^2c^2 & s^2c^2 & -2sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{16} \\ S_{12} \\ S_{66} \\ S_{26} \\ S_{22} \end{Bmatrix}$$

- Si osserva ancora come la trasformazione di $[S]$ sia diversa da quella di $[Q]$.
- Ovviamente, se $\{x_1, x_2, x_3\}$ è il riferimento di ortotropia, allora $Q_{16}=Q_{26}=0$, come pure $S_{16}=S_{26}=0$, e quindi la trasformazione per rotazione si semplifica; ciononostante, nel riferimento $\{x, y, z\}$ i termini Q_{xs} e Q_{ys} , come pure S_{xs} e S_{ys} , non sono nulli, a riprova del fatto che fuori assi il comportamento è identico a quello di un solido anisotropo.

162



Rotazione del riferimento nel piano

- Grazie all'ultima relazione e alla definizione delle costanti tecniche, si possono trovare queste costanti nel riferimento $\{x, y, z\}$ quando si conoscano quelle nel riferimento $\{x_1, x_2, x_3\}$; con ovvio significato dei simboli, si ricava facilmente:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \left(c^4 \frac{1}{E_1} - 2sc^3 \frac{\eta_{21}}{E_1} - 2s^2c^2 \frac{V_{12}}{E_1} + s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - 2s^3c \frac{\eta_{22}}{E_2} + s^4 \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \\
 \eta_{xy,x} &= \left(2sc^3 \frac{1}{E_1} + (c^4 - 3s^2c^2) \frac{\eta_{21}}{E_1} + 2(s^3c - sc^3) \frac{V_{12}}{E_1} - (s^3c - sc^3) \frac{1}{4G_{12}} + (3s^2c^2 - s^4) \frac{\eta_{22}}{E_2} + 2s^3c \frac{1}{E_2} \right) E_x \\
 \nu_{xy} &= \left(s^2c^2 \frac{1}{E_1} - (sc^3 - s^3c) \frac{\eta_{21}}{E_1} - (c^4 + s^4) \frac{V_{12}}{E_1} - s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - (s^3c - sc^3) \frac{\eta_{22}}{E_2} + s^2c^2 \frac{1}{E_2} \right) E_x \\
 G_{xy} &= \left(4s^2c^2 \frac{1}{E_1} - 4(sc^3 - s^3c) \frac{\eta_{21}}{E_1} - 8s^2c^2 \frac{V_{12}}{E_1} + (c^4 + s^4 - 2s^2c^2) \frac{1}{4G_{12}} - 4(s^3c - sc^3) \frac{\eta_{22}}{E_2} + 4s^2c^2 \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \\
 \eta_{xy,y} &= \left(2s^3c \frac{1}{E_1} + (3s^2c^2 - s^4) \frac{\eta_{21}}{E_1} + 2(sc^3 - s^3c) \frac{V_{12}}{E_1} - (sc^3 - s^3c) \frac{1}{4G_{12}} + (c^4 - 3s^2c^2) \frac{\eta_{22}}{E_2} + 2s^3c \frac{1}{E_2} \right) E_y \\
 E_y &= \left(s^4 \frac{1}{E_1} - 2s^3c \frac{\eta_{21}}{E_1} - 2s^2c^2 \frac{V_{12}}{E_1} + s^2c^2 \frac{1}{4G_{12}} - 2sc^3 \frac{\eta_{22}}{E_2} + c^4 \frac{1}{E_2} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$



I parametri di Tsai e Pagano

- Le formule precedenti mostrano una particolarità nella meccanica dei compositi: la difficoltà di rappresentare le quantità che rappresentano il comportamento elastico in un riferimento qualsiasi; questa è, come vedremo, una necessità corrente nello studio dei laminati.
- Diversi studiosi si sono dunque preoccupati di trovare una rappresentazione più efficace dell'anisotropia, basata eventualmente su quantità diverse, non necessariamente sulle componenti Cartesiane o sulle costanti tecniche.
- Una rappresentazione alternativa dell'elasticità anisotropa, in dimensione 3, è per esempio quella data da Rychlewski, 1984.
- In elasticità bidimensionale vi sono due tentativi alternativi di un certo rilievo, quello che utilizza i cosiddetti *parametri di Tsai e Pagano* e il *metodo polare di Verchery*.
- Vediamo per cominciare il primo metodo, utilizzato in diverse circostanze, specie in progettazione dei laminati in composito.



I parametri di Tsai e Pagano

- Tsai e Pagano (1968) hanno utilizzato le trasformazioni delle funzioni circolari per esprimere in modo differente le componenti della matrice $[Q]$ in un riferimento qualsiasi $\{x, y, z\}$:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta, \\ Q_{xy} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta, \\ Q_{xs} &= U_6 \cos 2\theta + \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_7 \cos 4\theta + U_3 \sin 4\theta, \\ Q_{yy} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta - 2U_6 \sin 2\theta + U_3 \cos 4\theta + U_7 \sin 4\theta, \\ Q_{ys} &= U_6 \cos 2\theta + \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_7 \cos 4\theta - U_3 \sin 4\theta, \\ Q_{ss} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta - U_7 \sin 4\theta. \end{aligned}$$

- I 7 parametri U_i sono i cosiddetti *parametri di Tsai e Pagano*, e sono definiti come segue

I parametri di Tsai e Pagano

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2}, \\ U_3 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, & U_4 &= \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, \\ U_5 &= \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, & U_6 &= \frac{Q_{16} + Q_{26}}{2}, & U_7 &= \frac{Q_{16} - Q_{26}}{2}. \end{aligned}$$

- Evidentemente, nel caso di materiale ortotropo e se $\{x_1, x_2, x_3\}$ è il riferimento di ortotropia, allora $U_6 = U_7 = 0$.
- I 7 parametri U_i non sono tutti indipendenti, come è ovvio per il fatto che si utilizzano 7 quantità per esprimerne 6; ad esempio, si dimostra facilmente che

$$U_5 = \frac{U_1 - U_4}{2}.$$

I parametri di Tsai e Pagano

- Inoltre, contrariamente a quanto erroneamente a volte si afferma nei testi, o comunque con un malinteso senso della parola invariante, i parametri U_i non sono tutti invarianti tensoriali; si può dimostrare in effetti che U_2 e U_3 dipendono dal riferimento.
- Un ultimo inconveniente di questa rappresentazione è che i parametri U_i non hanno alcun significato fisico diretto. Questo non permette di esprimere con efficacia alcune proprietà elastiche, come ad esempio le simmetrie.



I parametri polari di Verchery

- Verchery (1979) ha proposto una rappresentazione alternativa dell'anisotropia bidimensionale, utilizzando una trasformazione di variabile complessa da lui stesso introdotta.
- Nel cosiddetto *metodo polare*, come lui stesso ha chiamato questo approccio, le componenti di un tensore \mathbf{L} del 4° ordine del tipo dell'elasticità in \mathbb{R}^2 (sia di rigidità, sia di cedevolezza) sono espresse in funzione di 5 invarianti tensoriali indipendenti e di un angolo, che fissa il riferimento:

$$L_{1111} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1;$$

$$L_{1112} = R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1;$$

$$L_{1122} = -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0;$$

$$L_{1212} = T_0 - R_0 \cos 4\Phi_0;$$

$$L_{2212} = -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1;$$

$$L_{2222} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1.$$



I parametri polari di Verchery

- I 4 moduli T_0 , T_1 , R_0 , R_1 e la differenza dei due angoli polari $\Phi_0 - \Phi_1$ sono degli invarianti tensoriali; il loro valore è legato a quello delle componenti Cartesiane nel riferimento $\{x_1, x_2, x_3\}$ dalle relazioni inverse delle precedenti, che in forma complessa sono

$$\begin{aligned} 8T_0 &= L_{1111} - 2L_{1122} + 4L_{1212} + L_{2222}; \\ 8T_1 &= L_{1111} + 2L_{1122} + L_{2222}; \\ 8R_0 e^{4i\Phi_0} &= L_{1111} - 2L_{1122} - 4L_{1212} + L_{2222} + 4i(L_{1112} - L_{2212}); \\ 8R_1 e^{2i\Phi_1} &= L_{1111} - L_{2222} + 2i(L_{1112} + L_{2212}). \end{aligned}$$

- Fissare un riferimento, consiste dunque a fissare uno dei due angoli polari; nel caso di un materiale ortotropo, fissare $\Phi_1 = 0$ equivale a scegliere come asse x_1 l'asse secondo cui $E_1 > E_2$, ed è la scelta normalmente fatta.
- I vantaggi del metodo polare sono essenzialmente due, e riguardano il cambiamento di riferimento ed il significato meccanico dei parametri polari.



I parametri polari di Verchery

- Infatti, si dimostra che nel passaggio al riferimento $\{x, y, z\}$ le nuove componenti Cartesiane si ottengono semplicemente sottraendo l'angolo di rotazione dagli angoli polari:

$$\begin{aligned} L_{xxxx} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{xxyy} &= R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{xyxy} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta); \\ L_{yyxy} &= T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta); \\ L_{yyyy} &= -R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta); \\ L_{yyyy} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta). \end{aligned}$$

- Inoltre, gli invarianti polari sono legati alle simmetrie elastiche, caratterizzandole in modo invariante; si dimostra in effetti che si hanno le seguenti condizioni necessarie e sufficienti di simmetria elastica nel piano:



I parametri polari di Verchery

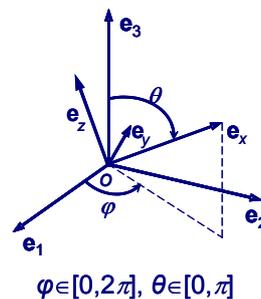
- Ortotropia ordinaria $\Leftrightarrow \Phi_0 - \Phi_1 = k \frac{\pi}{4}, \quad k = 0,1.$
- Ortotropia $R_0 \Leftrightarrow R_0=0.$
- Ortotropia quadrata (corrispondente alla singonia cubica in 3 dimensioni) $\Leftrightarrow R_1=0.$
- Isotropia $\Leftrightarrow R_0= R_1=0.$
- L'utilizzo di queste relazioni riesce utile soprattutto per analizzare in via analitica certe proprietà elastiche dei laminati e per le fasi di progetto dei laminati rispetto alle loro proprietà elastiche.

171



Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Per terminare il capitolo, si riportano di seguito i grafici delle costanti tecniche per qualche materiale anisotropo; l'esame di questi grafici permette di meglio comprendere le tipiche variazioni delle proprietà elastiche secondo la direzione nei solidi anisotropi.
- I diagrammi direzionali rappresentano il valore della costante in una direzione data, proporzionalmente alla lunghezza del segmento tra l'origine e la superficie o la curva, nella direzione in questione.
- I grafici sono ottenuti utilizzando le formule di rotazione delle componenti elastiche o delle costanti tecniche viste in precedenza; nel caso tridimensionale si è utilizzato un cambiamento di riferimento come quello usato in coordinate sferiche: il vettore \mathbf{e}_y è sempre orizzontale. La direzione di tracciamento della grandezza è quella dell'asse \mathbf{e}_x .
- Le costanti non indicate sono nulle.



172

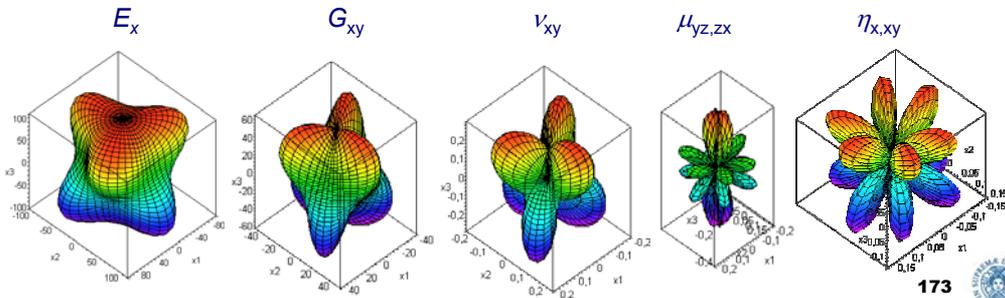


Alcuni esempi di materiali anisotropi

- **Quarzo:** classe IV, singonia trigonale o romboedrica, 6 costanti elastiche indipendenti (fonte: Lekhnitskii, Love).

$$[C] = \begin{bmatrix} 86.8 & 7.1 & 14.4 & 17.2 & 0 & 0 \\ 7.1 & 86.8 & 14.4 & -17.2 & 0 & 0 \\ 14.4 & 14.4 & 107.5 & 0 & 0 & 0 \\ 17.2 & -17.2 & 0 & 58.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58.2 & 17.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17.2 & 39.85 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = 78.5 \text{ GPa}, E_3 = 103 \text{ GPa}, \\ G_{12} = 34.8 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 50.8 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} = 0.13, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.12, \\ \mu_{31,12} = -0.3, \eta_{2,23} = -\eta_{1,23} = 0.22. \end{aligned}$$

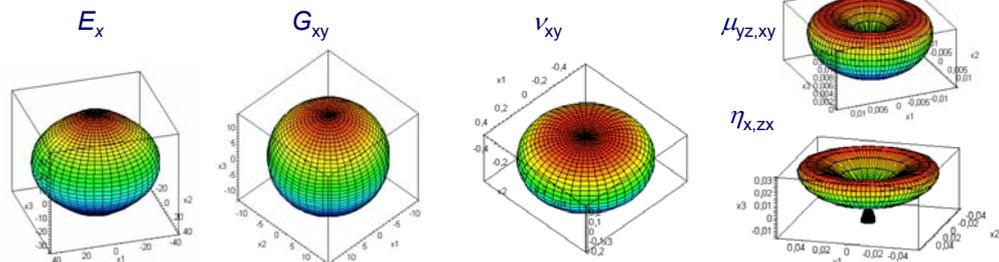


Alcuni esempi di materiali anisotropi

- **Lega Cd-Mg (cadmio-magnesio):** classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 66.4 & 38.8 & 22.9 & 0 & 0 & 0 \\ 38.8 & 66.4 & 22.9 & 0 & 0 & 0 \\ 22.9 & 22.9 & 45.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.8 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = 41.3 \text{ GPa}, E_3 = 35.1 \text{ GPa}, \\ G_{12} = 13.8 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 13.3 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} = 0.49, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.26. \end{aligned}$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

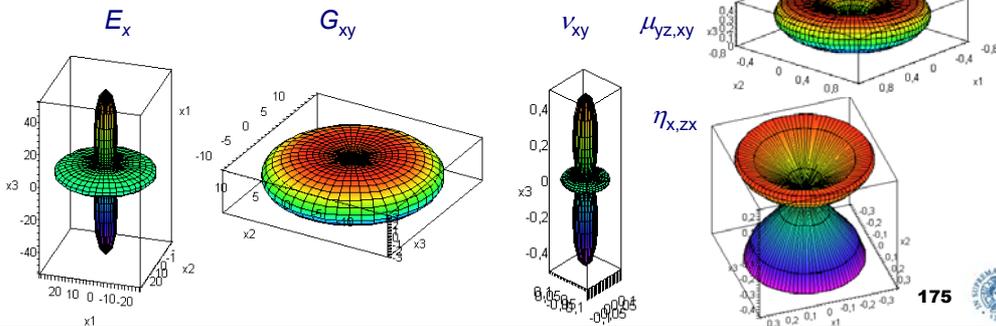
- **RbNiCl3**: classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 35.2 & 9.9 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 9.9 & 35.2 & 22.9 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 22.9 & 72.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.6 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 28.1 \text{ GPa}, E_3 = 50.8 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 12.6 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 2.5 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.11, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.27.$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

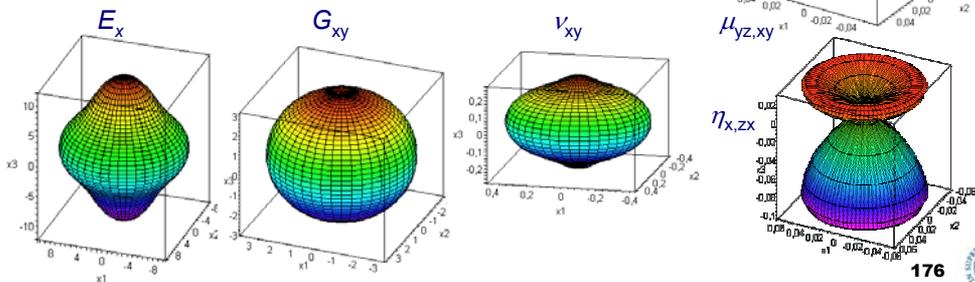
- **Ghiaccio (ghiacciaio Mendenhall; T=270°K)**: classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 13.7 & 6.9 & 5.6 & 0 & 0 & 0 \\ 6.9 & 13.7 & 5.6 & 0 & 0 & 0 \\ 5.6 & 5.6 & 14.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 9.6 \text{ GPa}, E_3 = 11.7 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 3.4 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 3 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.41, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.22.$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

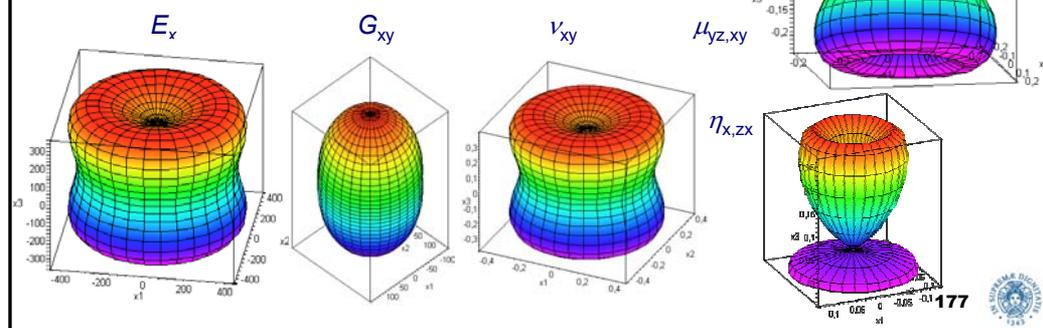
- **Titanio-Boride (TiB₂):** classe VI, singonia esagonale, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 684.3 & 404.2 & 317.7 & 0 & 0 & 0 \\ 404.2 & 684.3 & 317.7 & 0 & 0 & 0 \\ 317.7 & 317.7 & 439.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140.1 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 387.6 \text{ GPa}, E_3 = 253.8 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 140.1 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 250 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.38, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.46.$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

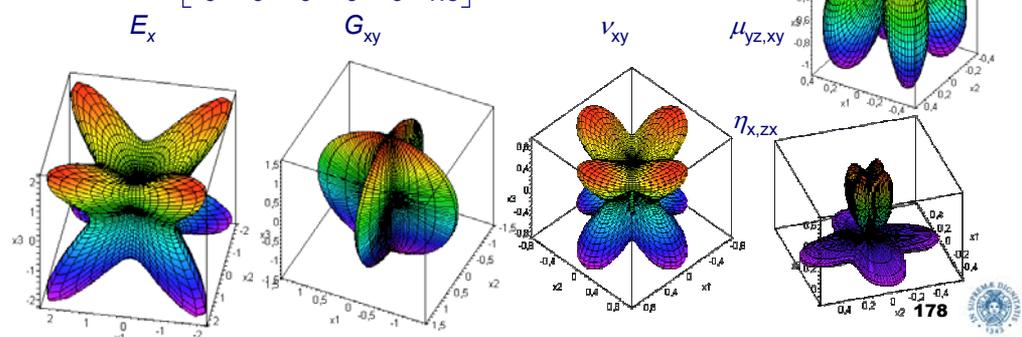
- **Cesio:** classe VII, singonia cubica, 3 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.1 & 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1 & 2.5 & 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.1 & 2.1 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0.6 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = G_{31} = G_{23} = 1.5 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.45.$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

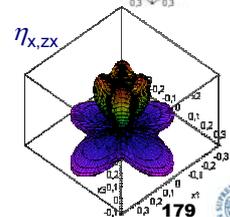
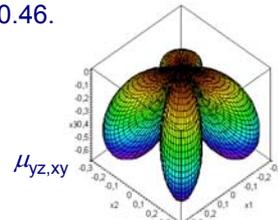
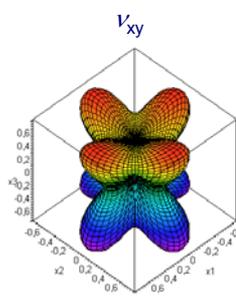
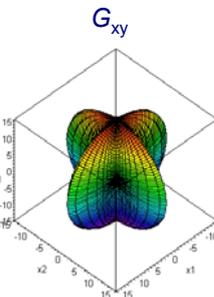
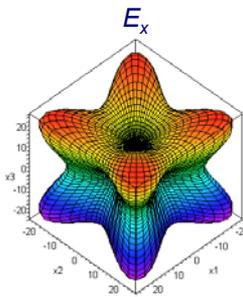
- **Piombo:** classe VII, singonia cubica, 3 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 48.2 & 40.8 & 40.8 & 0 & 0 & 0 \\ 40.8 & 48.2 & 40.8 & 0 & 0 & 0 \\ 40.8 & 40.8 & 48.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.7 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 10.7 \text{ GPa,}$$

$$G_{12} = G_{31} = G_{23} = 14.7 \text{ GPa,}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.46.$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

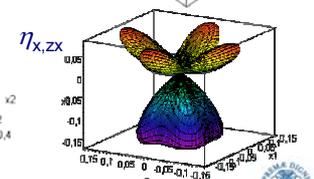
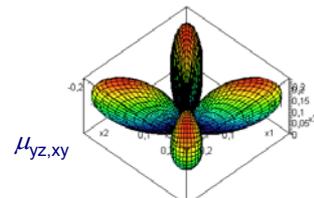
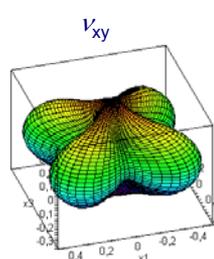
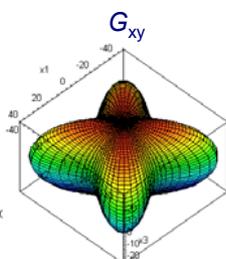
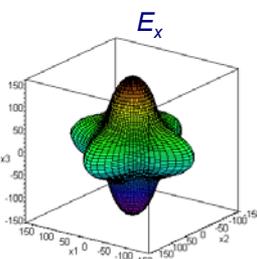
- **Niobio:** classe VII, singonia cubica, 3 costanti elastiche indipendenti (fonte: Landolt-Börnstein).

$$[C] = \begin{bmatrix} 243.7 & 130.7 & 130.7 & 0 & 0 & 0 \\ 130.7 & 243.7 & 130.7 & 0 & 0 & 0 \\ 130.7 & 130.7 & 243.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.4 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 152.4 \text{ GPa,}$$

$$G_{12} = G_{31} = G_{23} = 28.4 \text{ GPa,}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.35.$$



Alcuni esempi di materiali anisotropi

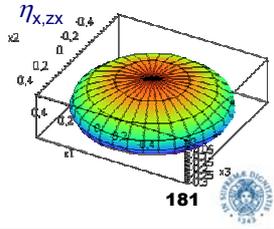
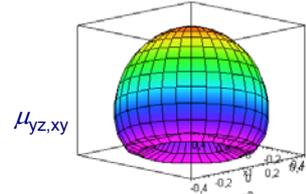
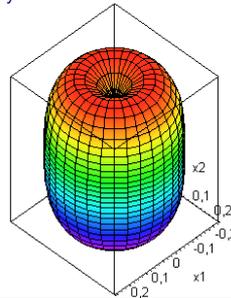
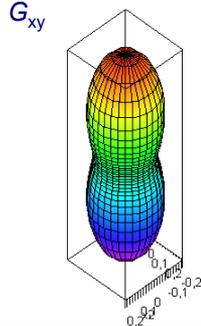
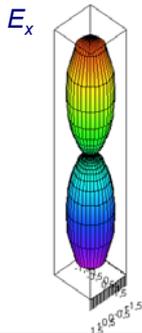
- **Legno d'abete:** isotropo trasverso, 5 costanti elastiche indipendenti (fonte: Lekhnitskii).

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.11 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.45 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0.13 & 10.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = E_2 = 0.42 \text{ GPa}, E_3 = 10 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 0.17 \text{ GPa}, G_{31} = G_{23} = 0.75 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.24, \nu_{13} = \nu_{23} = 0.01.$$



181

Alcuni esempi di materiali anisotropi

- **Lastre di legno d'abete:** ortotropo (fonte: Lekhnitskii).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 10 & 0.004 & 0 \\ 0.004 & 0.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 10 \text{ GPa}, E_2 = 0.42 \text{ GPa}, G_{12} = 0.75 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.01, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 4.28 \text{ GPa}, U_2 = 4.79 \text{ GPa}, U_3 = 0.93 \text{ GPa},$$

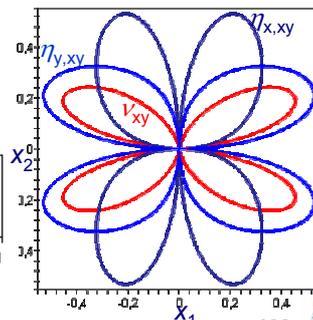
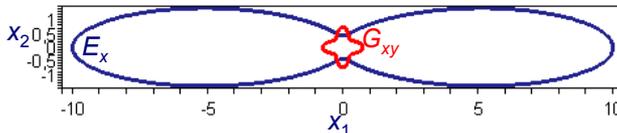
$$U_4 = 0.93 \text{ GPa}, U_5 = 1.68 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 1.68 \text{ GPa}, T_1 = 1.30 \text{ GPa}, R_0 = 0.93 \text{ GPa},$$

$$R_1 = 1.19 \text{ GPa}, \phi_0 = 0^\circ, \phi_1 = 0^\circ.$$

NB: è lo stesso materiale del caso precedente, ma con l'asse x_3 che qui è diventato x_1 ; [Q] si ottiene da [C] con le formule di pagina 155.

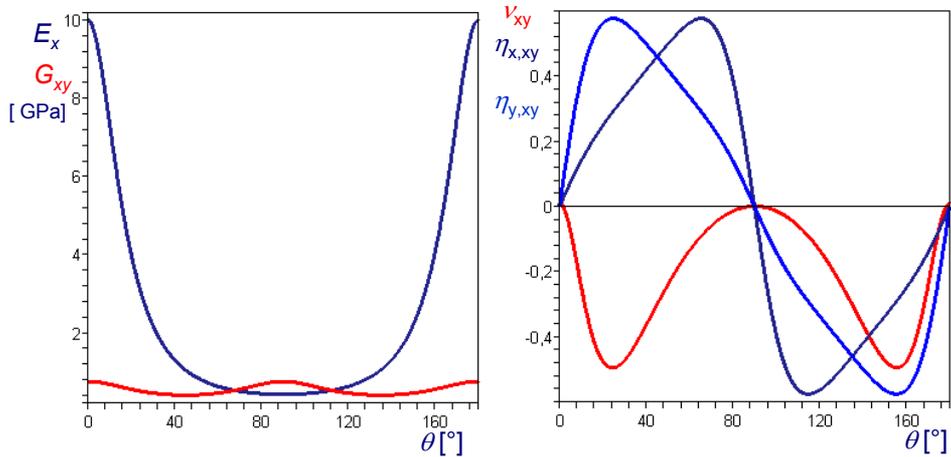
- **Grafici direzionali**



182

Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Grafici Cartesiani



183



Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Boro-epoxy B(4)/5505 Vf=0.5: ortotropo (fonte: Tsai e Hahn).

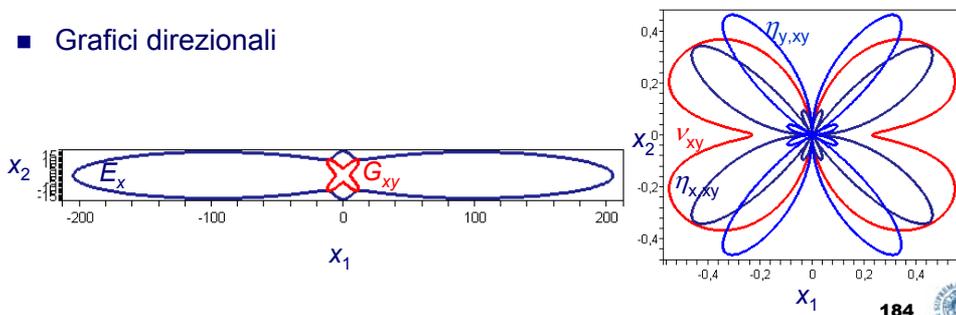
$$[Q] = \begin{bmatrix} 206 & 4.27 & 0 \\ 4.27 & 18.59 & 0 \\ 0 & 0 & 5.59 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 205 \text{ GPa}, E_2 = 18.5 \text{ GPa}, G_{12} = 5.59 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.23, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 88.08 \text{ GPa}, U_2 = 93.71 \text{ GPa}, U_3 = 24.21 \text{ GPa}, U_4 = 28.48 \text{ GPa}, U_5 = 29.80 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 29.80 \text{ GPa}, T_1 = 29.14 \text{ GPa}, R_0 = 24.21 \text{ GPa}, R_1 = 23.42 \text{ GPa}, \phi_0 = 0^\circ, \phi_1 = 0^\circ.$$

- Grafici direzionali

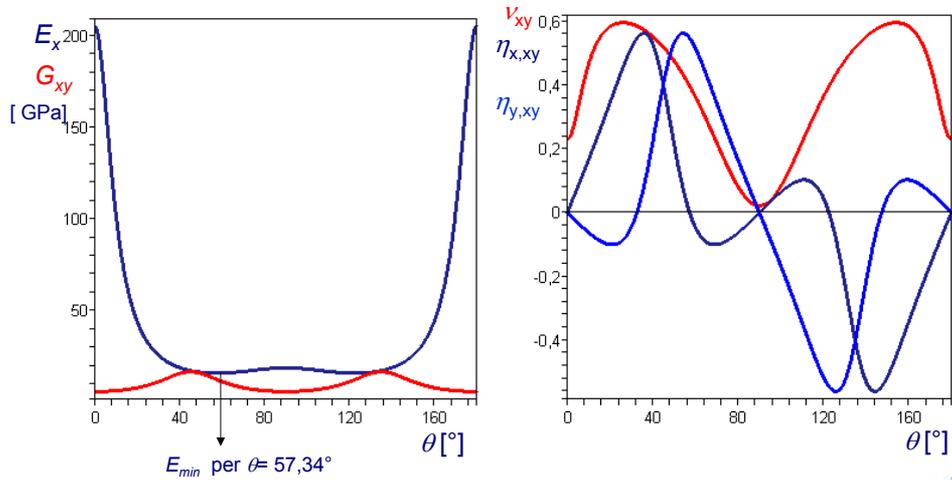


184



Alcuni esempi di materiali anisotropi

■ Grafici Cartesiani



185



Alcuni esempi di materiali anisotropi

■ Carbonio-epoxy T300/5208 Vf=0.7: ortotropo (fonte: tsai e Hahn).

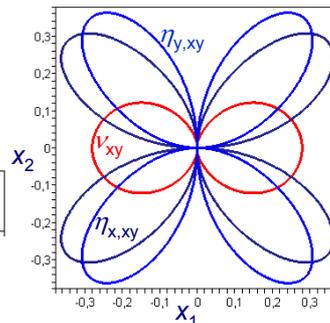
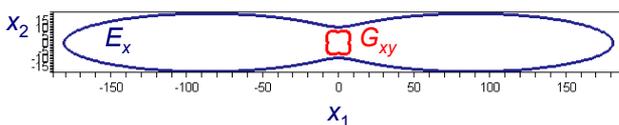
$$[Q] = \begin{bmatrix} 181.8 & 2.89 & 0 \\ 2.89 & 10.35 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$E_1 = 181 \text{ GPa}$, $E_2 = 10.3 \text{ GPa}$, $G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$,
 $\nu_{12} = 0.28$, $\eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0$.

$U_1 = 76.36 \text{ GPa}$, $U_2 = 85.72 \text{ GPa}$, $U_3 = 19.71 \text{ GPa}$,
 $U_4 = 22.60 \text{ GPa}$, $U_5 = 26.88 \text{ GPa}$, $U_6 = U_7 = 0$.

$T_0 = 26.88 \text{ GPa}$, $T_1 = 24.74 \text{ GPa}$, $R_0 = 19.71 \text{ GPa}$,
 $R_1 = 21.43 \text{ GPa}$, $\phi_0 = 0^\circ$, $\phi_1 = 0^\circ$.

■ Grafici direzionali

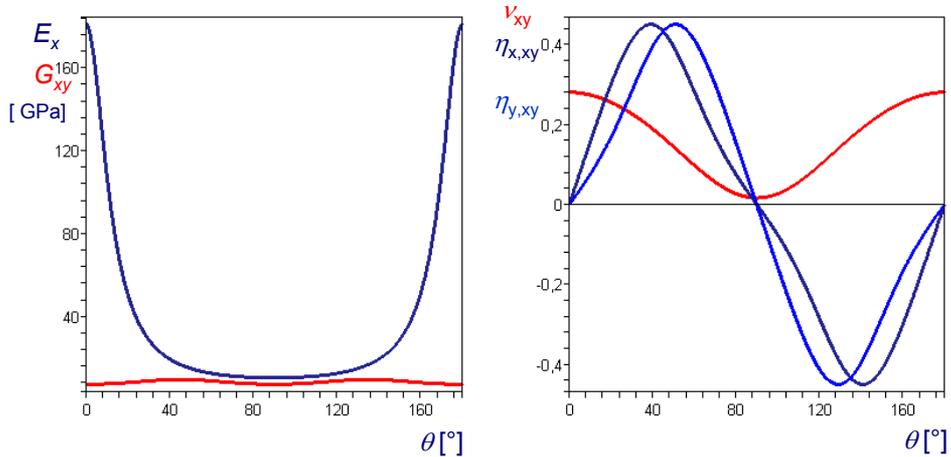


186



Alcuni esempi di materiali anisotropi

■ Grafici Cartesiani



187



Alcuni esempi di materiali anisotropi

■ Vetro-epoxy scotchply 1002 Vf=0.45: ortotropo (fonte: Tsai e Hahn).

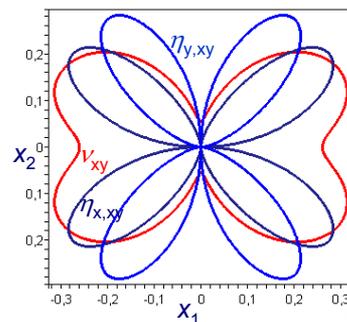
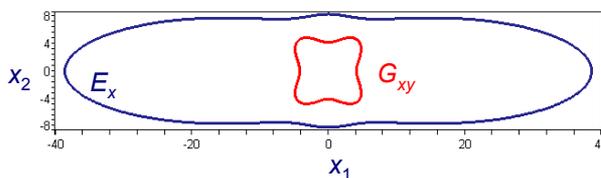
$$[Q] = \begin{bmatrix} 39.17 & 2.18 & 0 \\ 2.18 & 8.39 & 0 \\ 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, E_2 = 8.27 \text{ GPa}, G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.26, \eta_{1,12} = \eta_{2,12} = 0.$$

$$U_1 = 20.45 \text{ GPa}, U_2 = 15.39 \text{ GPa}, U_3 = 3.33 \text{ GPa}, U_4 = 5.51 \text{ GPa}, U_5 = 7.47 \text{ GPa}, U_6 = U_7 = 0.$$

$$T_0 = 7.47 \text{ GPa}, T_1 = 6.49 \text{ GPa}, R_0 = 3.33 \text{ GPa}, R_1 = 3.85 \text{ GPa}, \phi_0 = 0^\circ, \phi_1 = 0^\circ.$$

■ Grafici direzionali

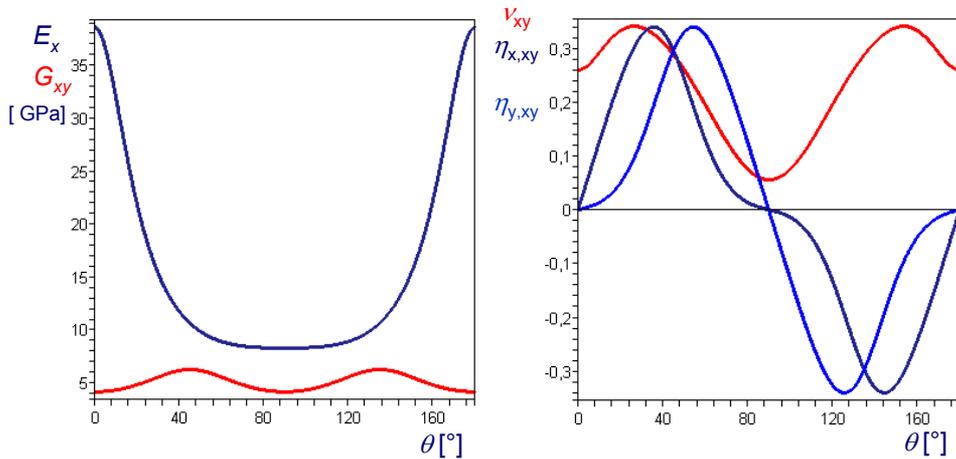


188



Alcuni esempi di materiali anisotropi

■ Grafici Cartesiani



189



Alcuni esempi di materiali anisotropi

■ Vetro-epoxy con rinforzo in tessuto: ortotropia (fonte: Jones).

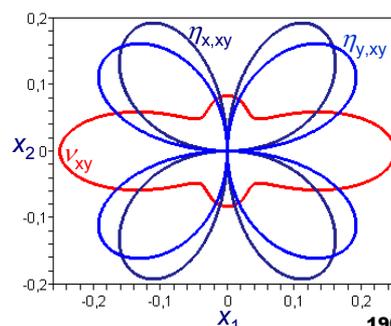
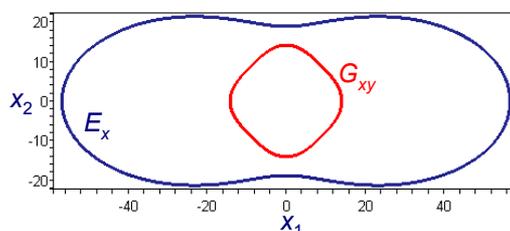
$$[Q] = \begin{bmatrix} 58 & 4.82 & 0 \\ 4.82 & 19.3 & 0 \\ 0 & 0 & 14.14 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1=56.8 \text{ GPa}, E_2= 18.9 \text{ GPa}, G_{12}=14.14 \text{ GPa}, \nu_{12}=0.25, \eta_{1,12}=\eta_{2,12}=0.$$

$$U_1=37.26 \text{ GPa}, U_2=19.35 \text{ GPa}, U_3=1.39 \text{ GPa}, U_4=6.21 \text{ GPa}, U_5=15.52 \text{ GPa}, U_6=U_7=0.$$

$$T_0=15.53 \text{ GPa}, T_1= 10.87 \text{ GPa}, R_0= 1.38 \text{ GPa}, R_1= 4.84 \text{ GPa}, \phi_0=0^\circ, \phi_1=0^\circ.$$

■ Grafici direzionali

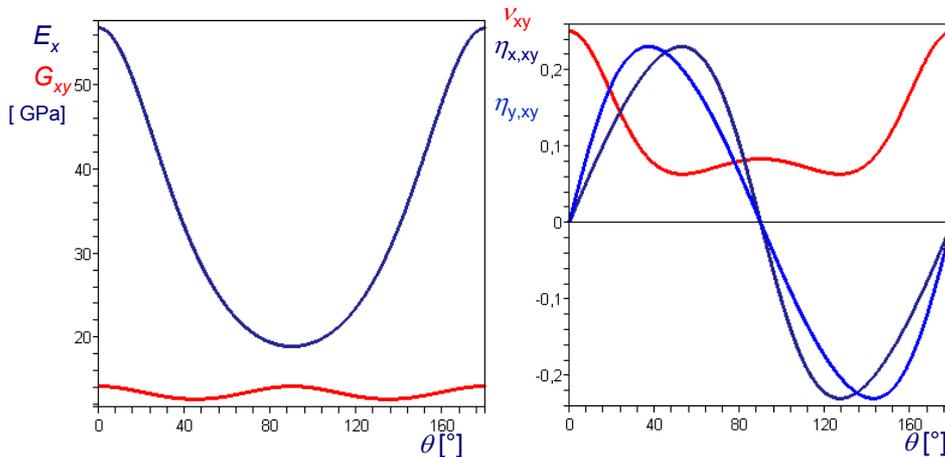


190



Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Grafici Cartesiani



191



Alcuni esempi di materiali anisotropi

- **Vetro-epoxy con rinforzo in tessuto equilibrato: ortotropia cubica** (simmetria del quadrato; fonte: Tsai e Hahn).

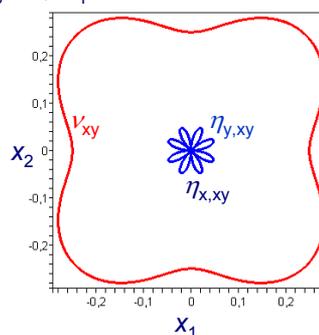
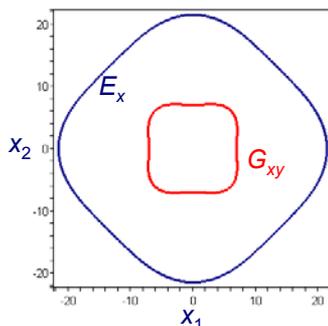
$$[Q] = \begin{bmatrix} 22.93 & 5.73 & 0 \\ 5.73 & 22.93 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

$$E_1=E_2= 21.5 \text{ GPa}, G_{12}=7 \text{ GPa}, \nu_{12}=0.25, \\ \eta_{1,12}=\eta_{2,12}=0.$$

$$U_1=22.13 \text{ GPa}, U_2=0 \text{ GPa}, U_3=0.8 \text{ GPa}, \\ U_4=6.53 \text{ GPa}, U_5=7.80 \text{ GPa}, U_6=U_7=0.$$

- Grafici direzionali

$$T_0=7.8 \text{ GPa}, T_1= 7.17 \text{ GPa}, R_0= 0.8 \text{ GPa}, \\ R_1= 0, \phi_0=0^\circ, \phi_1=0^\circ.$$



192



Alcuni esempi di materiali anisotropi

- Grafici Cartesiani

