Pisa, 29 marzo 2007

il parere di una maggioranza
ed i sistemi elettorali

Claudio Bernardi (Roma – Sapienza)

una scelta è «democratica» se si rispetta il parere della maggioranza
ma … qual è il parere della maggioranza?

non parlerò del paradosso di Arrow,
né di sbarramenti o premi di maggioranza

in una votazione, su 100 persone

40 votano **sì**
30 votano **no**
30 si astengono

la mozione è stata approvata?

necessità di un regolamento,

che influisce sulle votazioni
100 persone eleggono il sindaco
tre candidati: **A**, **B**, **C** (dove B è "di centro", più vicino ad A che a C)

A	B	C
30	**25**	**45**

- turno unico: vince **C**
- doppio turno (ballottaggio): vince **A**
- in confronti diretti (a 2 a 2)
  B batte sia **A** sia **C**

sistemi elettorali maggioritari
si divide l'elettorato in circoscrizioni, con uguale popolazione (più o meno)

in ciascuna vince il candidato che riceve più voti
due partiti **A** e **B** con tre circoscrizioni

	A	**B**	
I	80	20	A
II	40	60	B
III	40	60	B
totale	160	140	

A ha più voti ma ha solo 1 seggio
(Bush e Gore nel 2000)

sistemi elettorali proporzionali
i seggi vengono attribuiti ai partiti «*proporzionalmente*» ai voti ricevuti

metodo usato anche per ripartire i seggi fra le circoscrizioni della Camera

V numero votanti **n** numero seggi

per **1** seggio $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{n}}$ voti (quoziente intero)

A, B, … partiti e numero voti riportati

A+B+… = V; $\mathbf{n_A}$ seggi spettanti ad **A**

$$\mathbf{n_A : n} = \mathbf{A : V} \qquad \mathbf{n_A} = \frac{\mathbf{nA}}{\mathbf{V}} = \mathbf{A} : \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{n}}$$

$\frac{\mathbf{nA}}{\mathbf{V}}$ si chiama **Hare quota**

in generale non è un numero intero

un voto "ponderato" non è nell'uso (unico esempio: Consiglio dell'Unione Europea) le approssimazioni intere sono dette

Hare minimo e **Hare massimo**

V = **300** **n** = **3** $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{n}}$ = **100**

	Hare quote	resti	seggi
A = **160**	1,6	0,6	1
B = **75**	0,75	0,75	0+1
C = **65**	0,65	0,65	0+1

proporzionale pura

Hare minimo e resti più alti

però …

A ha la maggioranza assoluta dei voti ma solo 1 seggio

se **B** e **C** si fondono …

se **A** si scinde in due partiti …

un altro difetto

V = **100** **n** = **10** **V/n** = **10**

	Hare quote	resti	seggi
A = **53**	5,3	0,3	5
B = **33**	3,3	0,3	3
C = 14	1,4	0,4	1+1

5 seggi ad A, 3 seggi a B, 2 seggi a C

supponiamo ora che, ferme restando le altre condizioni, **n** sia **11**

	Hare quote	resti	seggi
A = **53**	5,83	0,83	5+1
B = **33**	3,63	0,63	3+1
C = 14	1,54	0,54	1

6 seggi ad A, 4 seggi a B, 1 seggio a C
aumentando il numero totale dei seggi, C perde un seggio
paradosso dell'Alabama: nel 1881 ci si accorse che, con un seggio in meno nella Camera dei Rappresentanti, l'Alabama avrebbe avuto diritto ad un posto in più

proporzionale corretta
(nota all'estero come *sistema D'Hondt*)
in un certo senso, proporzionale pura con possibilità di "scissione a posteriori"

si compila una graduatoria che non dipende dal numero dei seggi

V = 100 elettori - quattro partiti
A = 48, B= 31, C = 15, D = 6

calcoliamo i quozienti

A/1, A/2, A/3, …, B/1, B/2, …, C/1, …

e disponiamoli in una tabella:

A	48	24	16	12	9,6	8	…
B	31	15,5	$10,\overline{3}$	7,75	…		
C	15	7,5	…				
D	6	…					

disponiamo i quozienti in ordine decrescente:

A/1 > B/1 > A/2 > A/3 > B/2 > C/1 > A/4 > B/3 > A/5 > A/6 > …

si procede in quest'ordine, arrestandosi quando si arriva al numero n dei seggi

il primo seggio spetta ad A

il secondo a B

il terzo e il quarto seggio spettano ad A (A può "pagare" 3 seggi con 16 voti per ciascuno), ecc.
si arriva così alla graduatoria
A, B, A, A, B, C, A, B, A, A, ...

se n = 10, allora:
6 seggi ad A, 3 a B, 1 a C e 0 a D

l'*Hare quota* di A è 48/100 = 4,8
ma A riceve 6 seggi!
ad ogni partito va almeno l'Hare minimo, ma capita che si superi l'Hare massimo

i partiti grandi sono favoriti
(si incoraggia la fusione di partiti):
A ha ottenuto il doppio dei seggi di B, pur avendo meno del doppio dei voti di B

la proporzionale corretta gode della proprietà seguente

(*) se **X** ed **Y** si uniscono e formano il partito **X+Y**, allora $\mathbf{n_{X+Y} \geq n_X + n_Y}$

un sistema assiomatico

requisiti ragionevoli dei sistemi elettorali dal punto di vista matematico: *assiomi*

monotonia $A \geq B$ implica $n_A \geq n_B$

monotonia rispetto al numero dei seggi non devono verificarsi situazioni del tipo "paradosso dell'Alabama"

rispetto dell'Hare minimo

rispetto dell'Hare massimo

(*) *se* **A** *e* **B** *si uniscono e formano il partito* **A+B**, *allora* $\mathbf{n_{A+B} \geq n_A + n_B}$

questi assiomi sono *contraddittori*: non esiste un sistema elettorale che gode della proprietà (*) e rispetti l'Hare massimo
(ciascuno di noi deve scegliere a quale condizione non è disposto a rinunciare)

V = 77 elettori ed **n** = 7 seggi
5 partiti con i seguenti voti:

A	**B**	**C**	**D**	**E**
16	16	15	15	15

A e B almeno 2 seggi ciascuno
se A e B si fondono, almeno 4 seggi
ma A+B = 32

l'Hare quota di A+B è $\frac{7 \cdot 32}{77} = 2,\overline{9}\overline{0}$

Hare massimo è 3

ancora un esempio da discutere

due partiti **A** **60%** dei voti
B **40%** dei voti

(in tutte le circoscrizioni) **n** = **600**

metodo	$\mathbf{n_A}$	$\mathbf{n_B}$
uninominale	600	0
proporzionale	360	240
$\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$	540	60

$\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$	con *scorporo*	450	150

450 seggi vanno ad **A** (uninominale)
resti: **A** non ha resti; quindi tutti i **150** seggi del proporzionale vanno a **B**
in totale: $\mathbf{n_A = 450}$ $\mathbf{n_B = 150}$

altri problemi con le circoscrizioni

2 circoscrizioni, con 50 elettori ciascuna;
3 partiti; 10 rappresentanti da eleggere

risultato:

	A	B	C	totale
(*I*)	14	24	12	50
(*II*)	16	26	8	50
tot.	30	50	20	100

distribuzione dei seggi

	...	...	...	5
	...	...	...	5
tot.	3	5	2	10

proviamo a compilare la tabella rispettando i totali:
dobbiamo rinunciare alla *"monotonia*"

una proposta: un sistema misto
in presenza di circoscrizioni

in ogni circoscrizione assegniamo ad ogni partito il suo Hare minimo;
quindi sommiamo i resti e distribuiamo i seggi rimasti con la proporzionale corretta

es. con 2 circoscrizioni: (*I*) con 100 elettori (5 seggi) e (*II*) con 140 (7 seggi)

	A	B	C	totale
(*I*)	40	39	21	100
(*II*)	54	51	35	140

un seggio per 20 voti

seggi				*resti*		
A	B	C		A	B	C
2	1	1		0	19	1
2	2	1		14	11	15
			tot	14	30	16

dei 3 seggi rimasti, 2 vanno a B e 1 a C

in totale, A ha 4 seggi, mentre B ne ha 5, ma A ha più voti di B in ogni circoscriz.!