



Facoltà di Ingegneria di Pisa
Dottorato in Ingegneria delle Strutture
29 maggio 2007

**DALL'INGEGNERIA EMPIRICA VERSO
L'INGEGNERIA DELLA SCIENZA**

**La perizia di tre Matematici
del 1742 per la Cupola di San Pietro**

Olimpia Niglio,

Università di Pisa – Dipartimento di Storia delle Arti

ARCHITECTURA EST SCIENTIA

Marco Vitruvio Pollione : *De Architectura*

*"... ciò che è significato e ciò che significa.
Ciò che è significato è l'oggetto in questione, mentre ciò che
significa è una dimostrazione condotta secondo il metodo
razionale della scienza".*



Daniele Barbaro (1514-1570)

I dieci libri dell'architettura di M. Vitruvio



Fondare l'architettura sulla matematica per farne un'espressione di verità

l'arte e l'architettura sono attività intellettuali basate sulla ragione

ragione e scienza partecipano alla verità assoluta

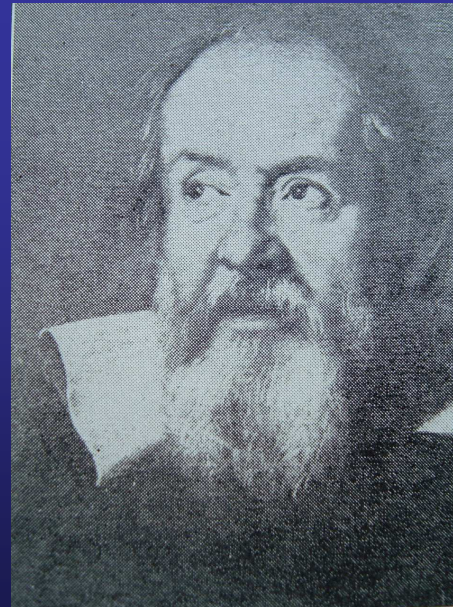
la dignità e la grandezza dell'architettura dipendono dal suo radicamento nelle discipline scientifiche

GALILEO GALILEI

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica et i movimenti locali, 1638



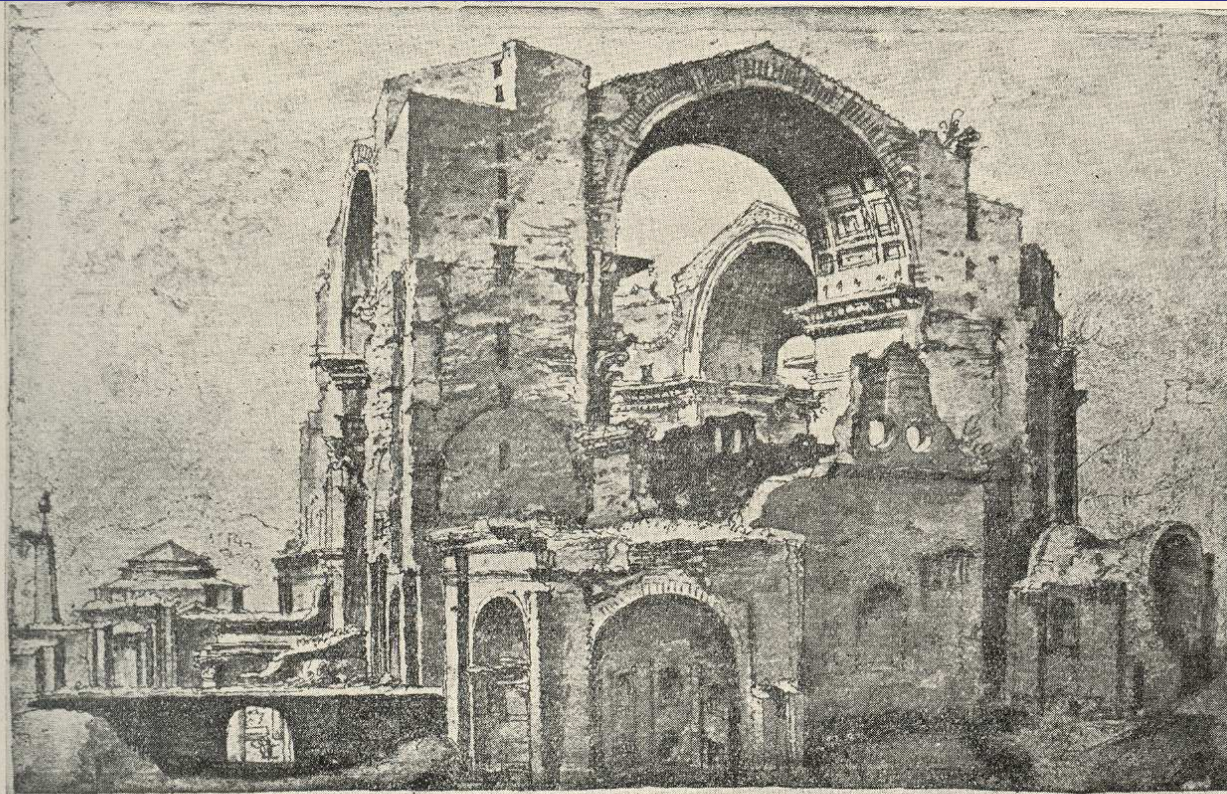
le prime osservazioni sulla "nuova scienza attinente alla meccanica" delle strutture



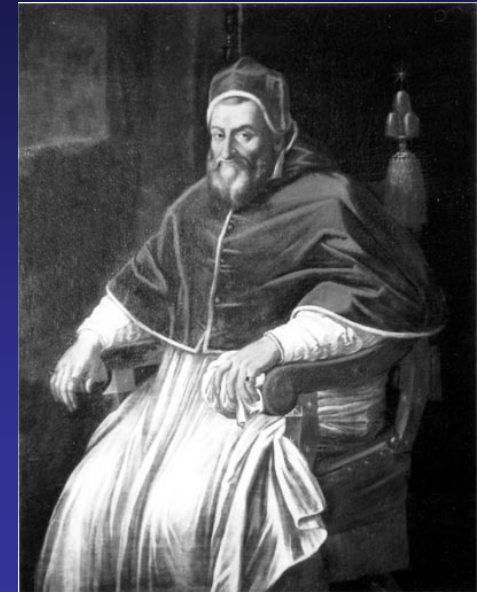
SISTO V

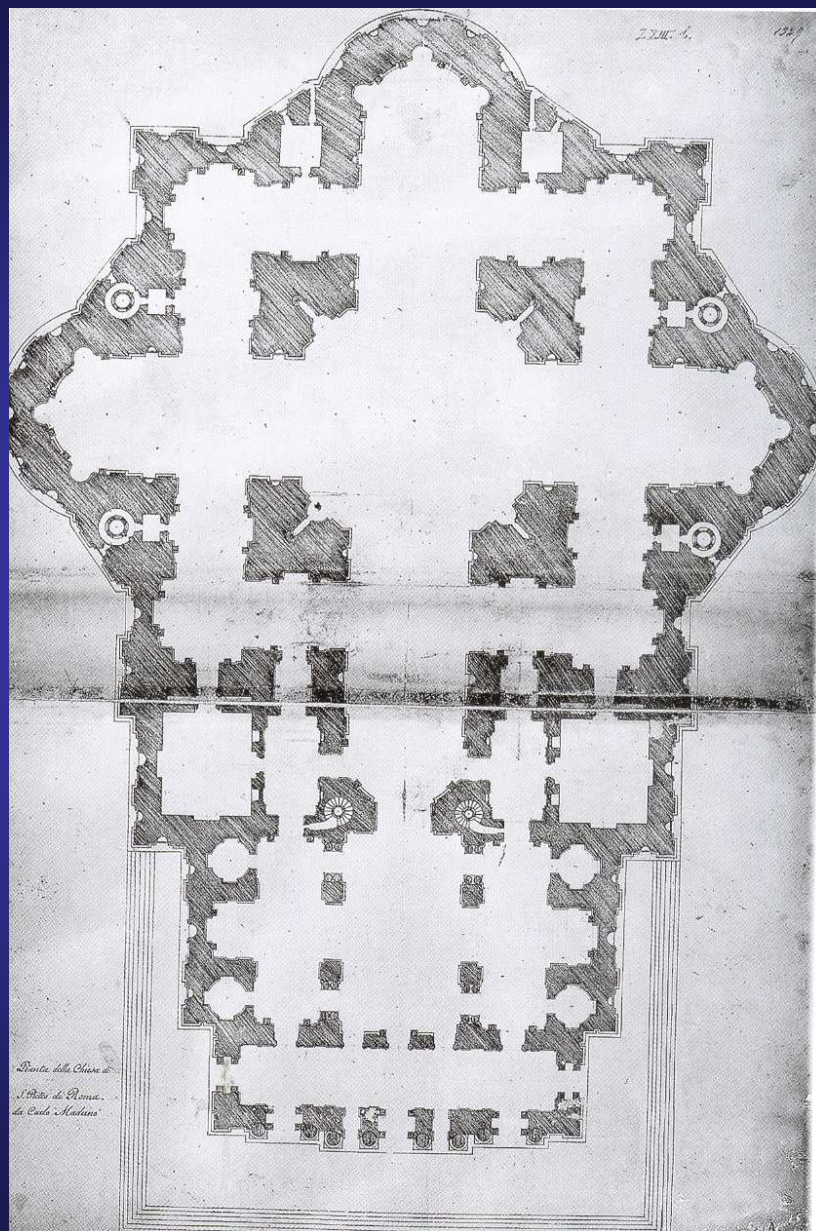
Inizio dei lavori per la Cupola **15 luglio 1588**

Interruzione dei lavori **13 maggio 1590**



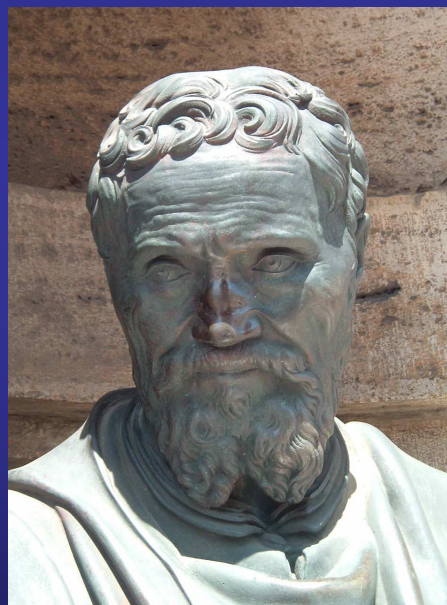
Veduta dello stato dei lavori della Basilica, alla morte di Bramante - Disegno di Martin Heemeskerk (1532-36).



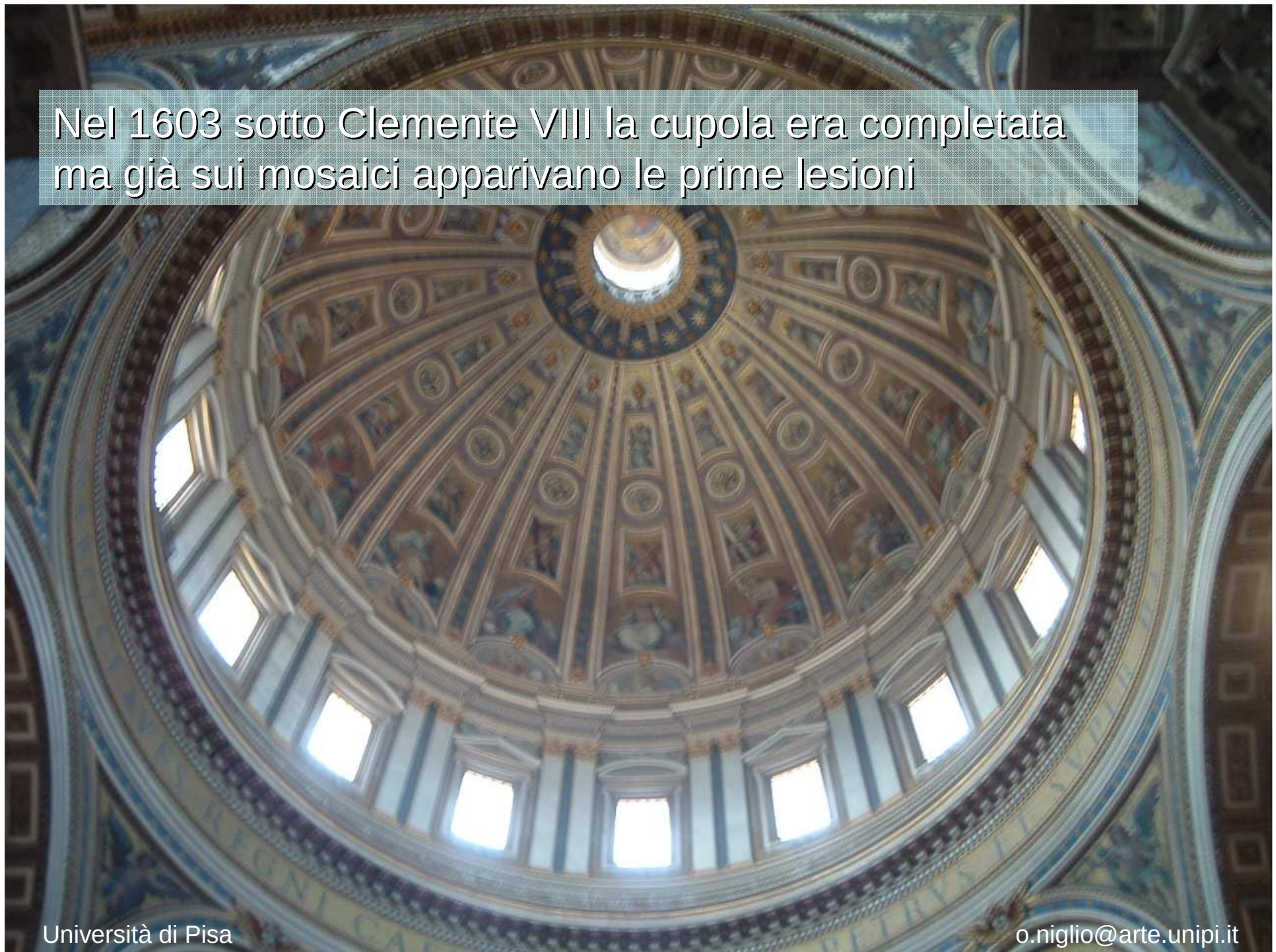


Proposta di *Michelangelo* per la nuova basilica di San Pietro

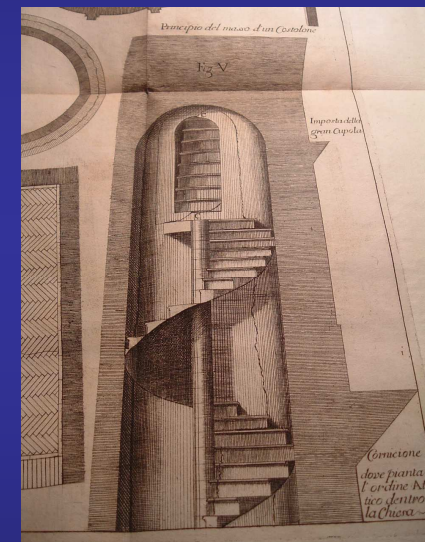
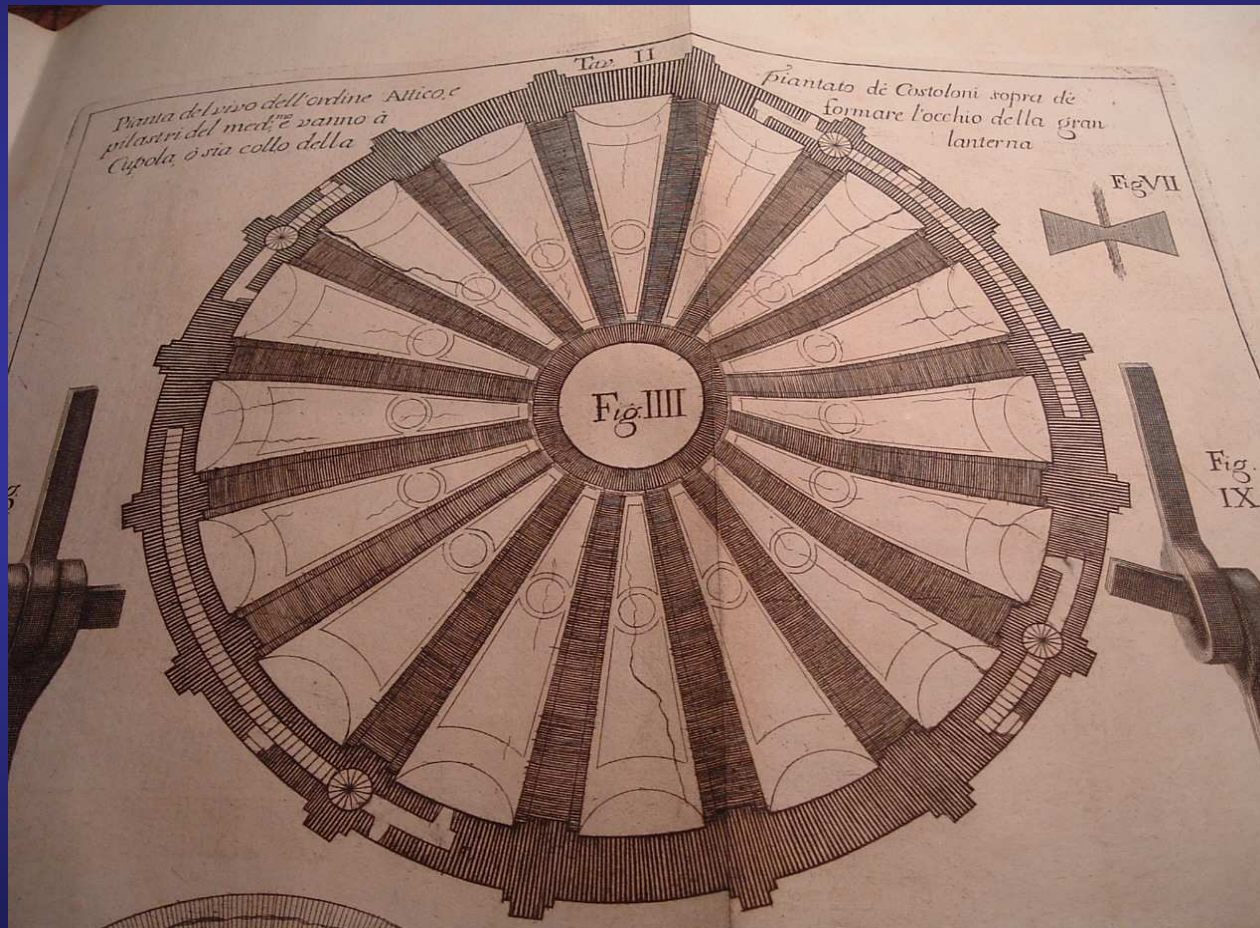
La basilica viene completata dal *Maderno* e da *Della Porta*.



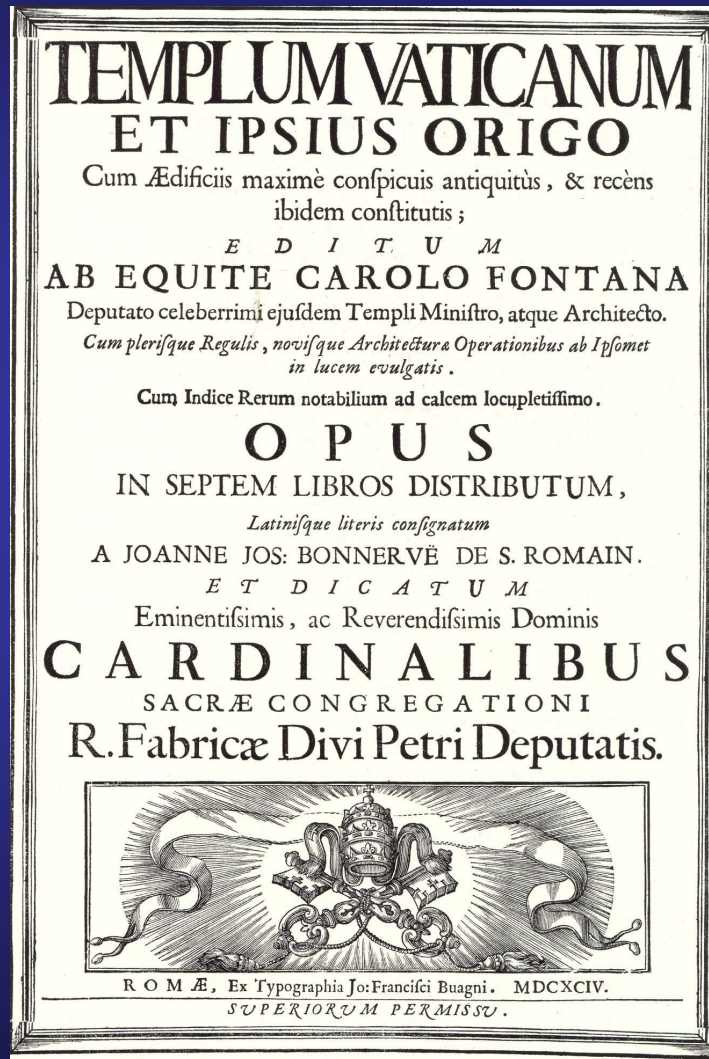
Nel 1603 sotto Clemente VIII la cupola era completata
ma già sui mosaici apparivano le prime lesioni



Nel 1631 Filippo Baldinucci scriveva sulla statica della cupola e degli interventi di *Gian Lorenzo Bernini*

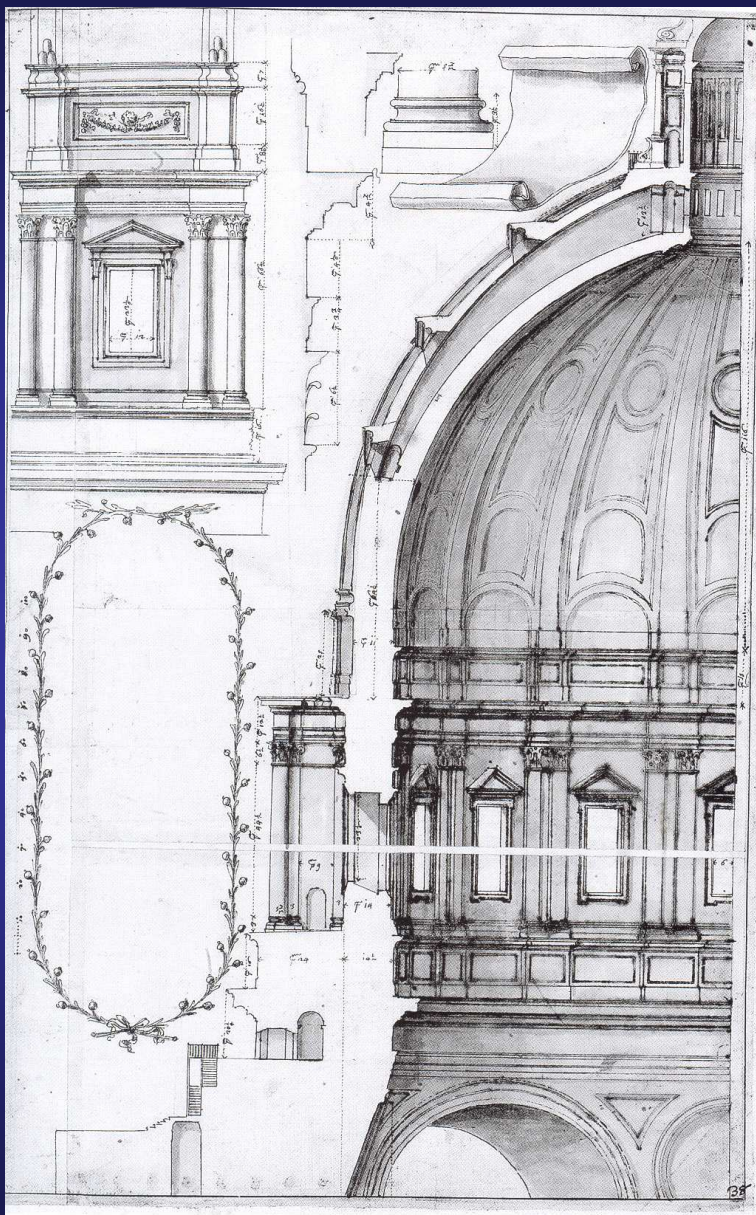


1694 - Carlo Fontana pubblica il “Tempio Vaticano”



L'opera non si propone solo di celebrare la “più grande fabbrica della cristianità” ma intende fornire gli strumenti per comprendere

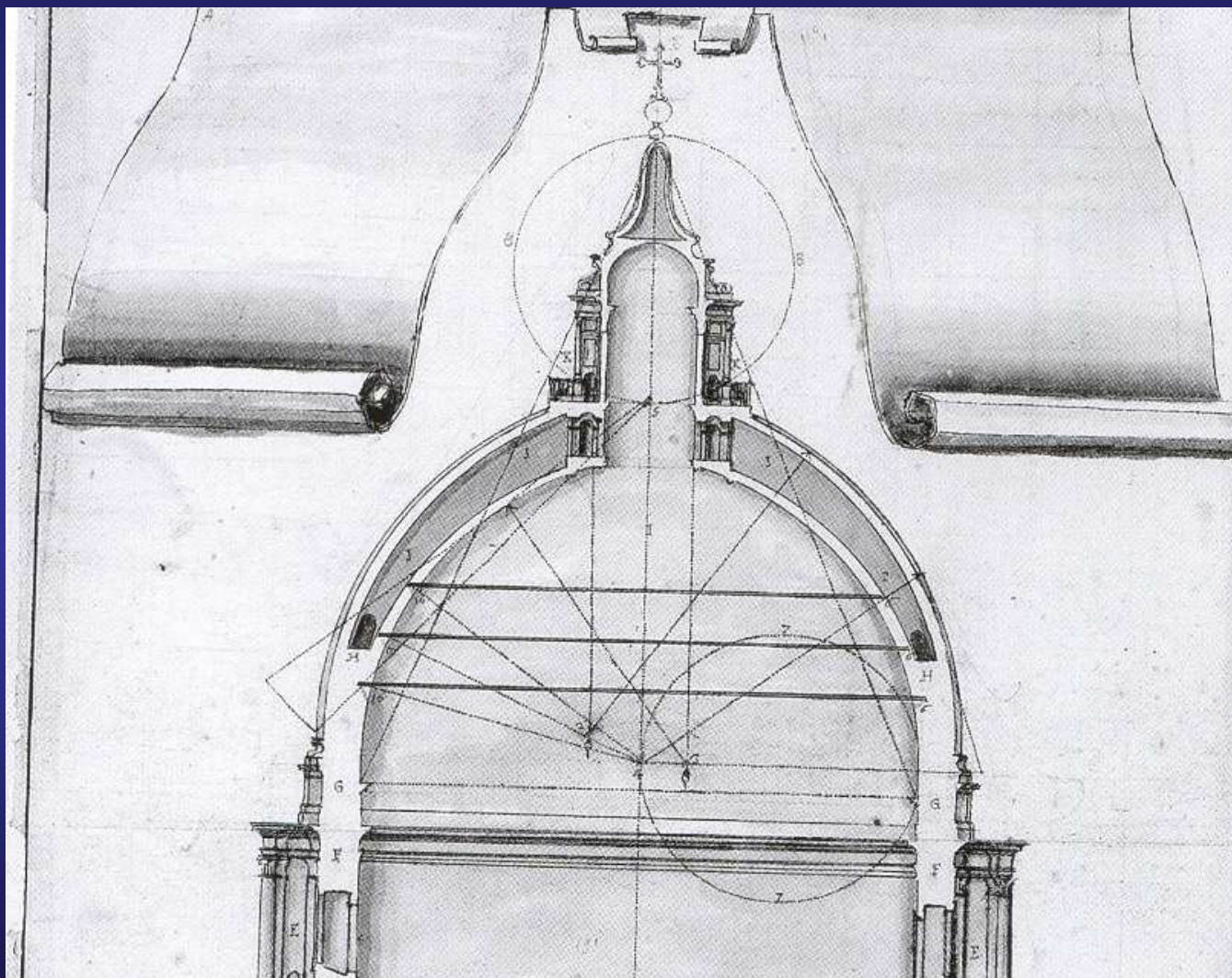
..... quanto sia stato l'artificio, e l'ingegnosa, e stabile costruzione di così grande, e portentosa Machina; acciò anche le Persone assenti studiose, e professori delle Matematiche possano intendere li modi praticati da Bramante, Bonarvuota, & altri grand'huomini, che la disposero



Descrizione della
geometria della cupola

Illustrazione delle regole
che sottendono alla sua
costruzione

Rilievo di Carlo Fontana e posizionamento delle catene (1694)



Le prime applicazioni dei nuovi metodi scientifici ai problemi strutturali cominciarono ad apparire nel XVIII secolo.

Fu allora che Benedetto XIV, nel 1741, commissiona una storica perizia ai tre Matematici



Ruggiero Giuseppe Boscovich
della Compagnia di Gesù
Professore di Matematica in
Collegio Romano



Tommaso Le Seur
dell'Ordine de' Minimi
Professore di Matematica

Francesco Jacquier
dell'Ordine de' Minimi
Professore di Matematica

**PARERE DI TRE MATEMATICI SOPRA I DANNI
CHE SI SONO TROVATI NELLA CUPOLA DI S. PIETRO
SUL FINIRE DELL'ANNO MDCCXLII.**

Dato per ordine di nostro signore Papa Benedetto XIV.



SCRITTURE

CONCERNENTI I DANNI

DELLA CVPOLA

DI

SAN PIETRO

DI ROMA

E I LORO RIMEDI.



VENEZIA

Appresso SIMONE OCCHI
Con Licenza de' Superiori.

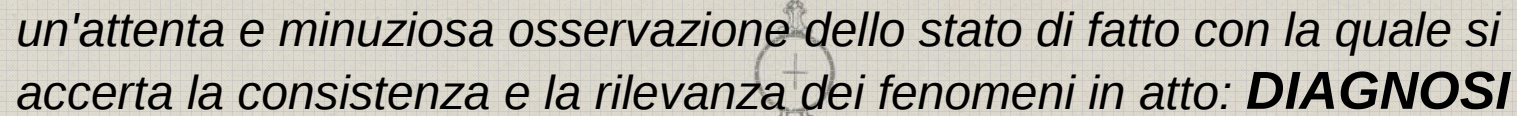
P A R E R E
DI TRE

MATEMATICI
Sopra i danni, che si sono trovati
NELLA CVPOLA
DI S. PIETRO

Sul fine dell'Anno MDCCXLII.
DATO PER ORDINE
DI NOSTRO SIGNORE
PAPA BENEDETTO XIV.

*Benedetto XIV alla fine del novembre 1741 da ordine
a Monsignor Gio. Francesco Abbati Olivieri
Segretario ed Economo della Rev. Fabbrica di S.
Pietro di ricercare il sentimento de' Matematici e
nominatamente di noi tre sottoscritti sopra i danni
presenti, che si osservano nella cupola della detta
Basilica e molto più per la sua **ristauratione** acciò
possano gli architetti metter in pratica i rimedi, che
verranno giudicati più necessari per la stabile
conservazione della gran mole*

*Nulla meno bisognoso di una pratica ben fondata sulle proprie oculari osservazioni ed esperienze, ma (anche) di una **buona teoria** fondata sulla **Meccanica** per conoscere dagli effetti la causa del male, e adattare i progetti alla natura della medesima, determinando quali siano i necessari e giovevoli quali gl'inutili e forse ancora nocivi*



*un'attenta e minuziosa osservazione dello stato di fatto con la quale si accerta la consistenza e la rilevanza dei fenomeni in atto: **DIAGNOSI***

*una valutazione, desunta dalle osservazioni precedenti, riguardante l'individuazione delle cause che possono o non possono avere determinato i fenomeni: **EZIOLOGIA***

*una disamina dei possibili criteri e delle metodologie disponibili che possono essere usate per valutare e per definire, anche quantitativamente, i rimedi da adottare: **PROGNOSI***

*una definizione dettagliata delle modalità esecutive da seguire per l'applicazione dei rimedi individuati : **TERAPIA***

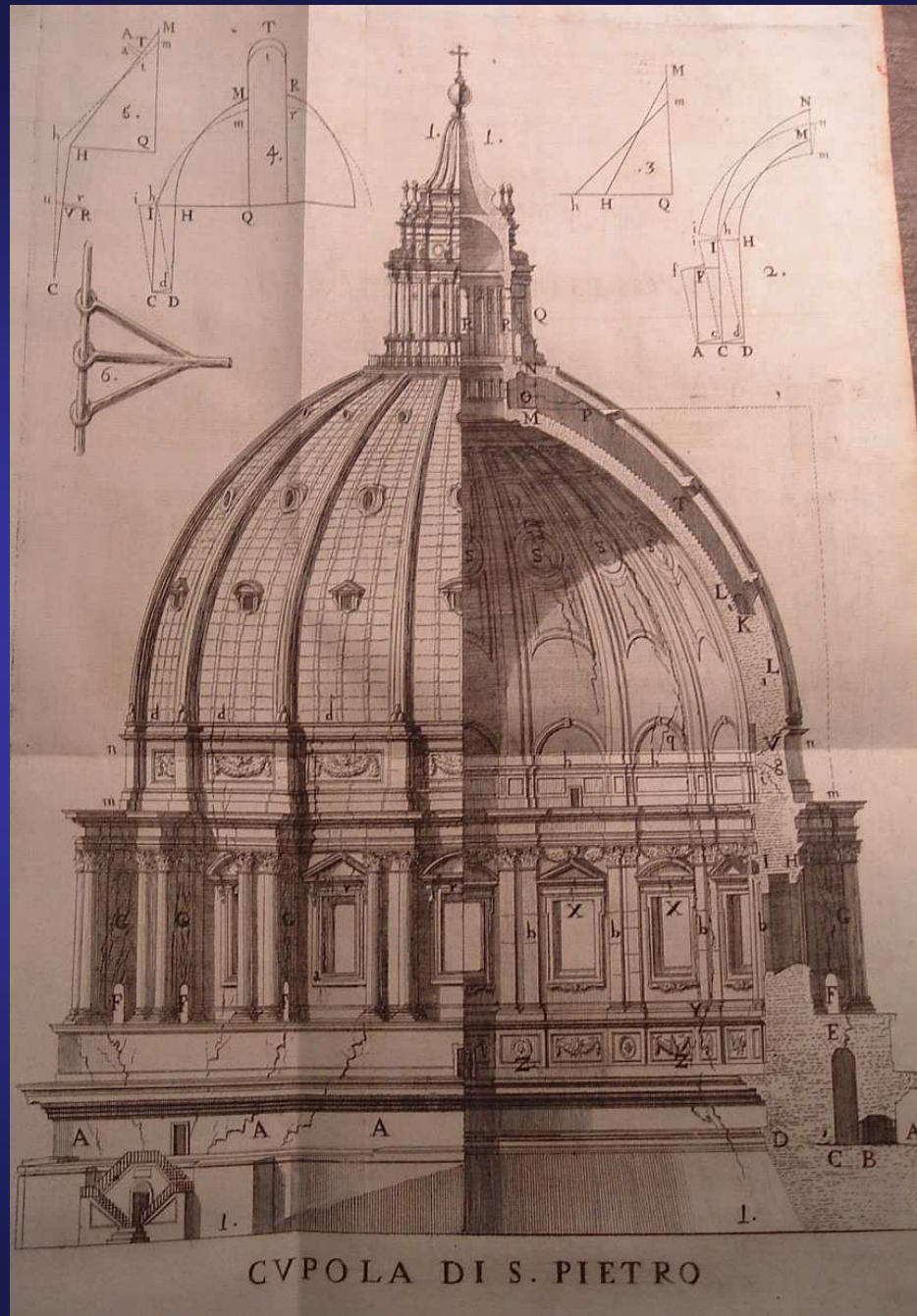
DIAGNOSI

Su quattro vasti piloni, che vengono su dà fondamenti, si appoggiano i quattro arconi che sostengono tutta la macchina



DIAGNOSI

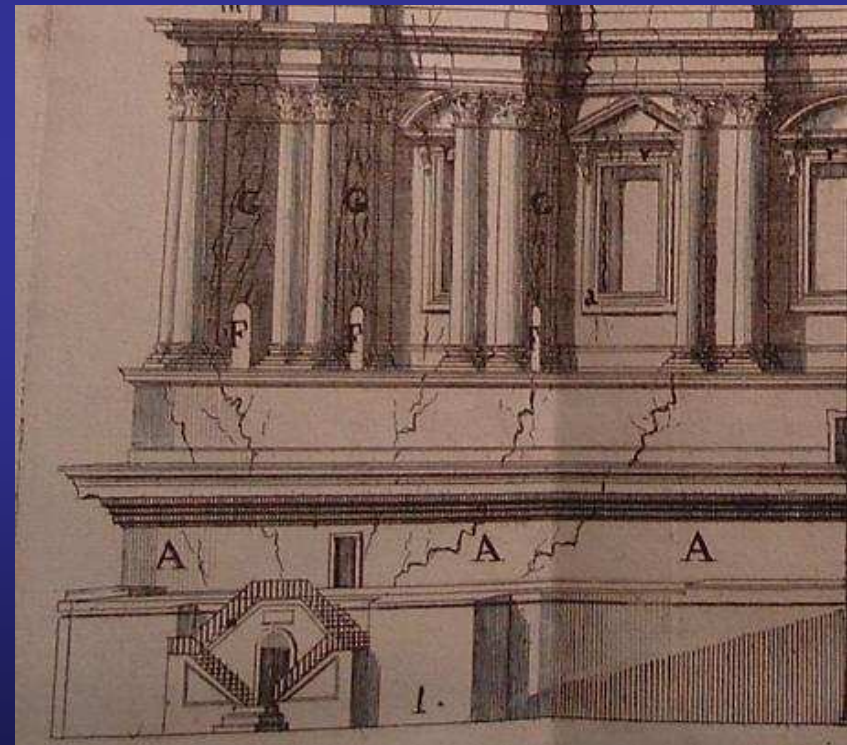
Rilievo della cupola tratto
dalla Perizia del 1742



Il rilievo diviene così strumento di conoscenza e di supporto per approfondimenti tematici comprendenti analisi cinematiche dei dissesti

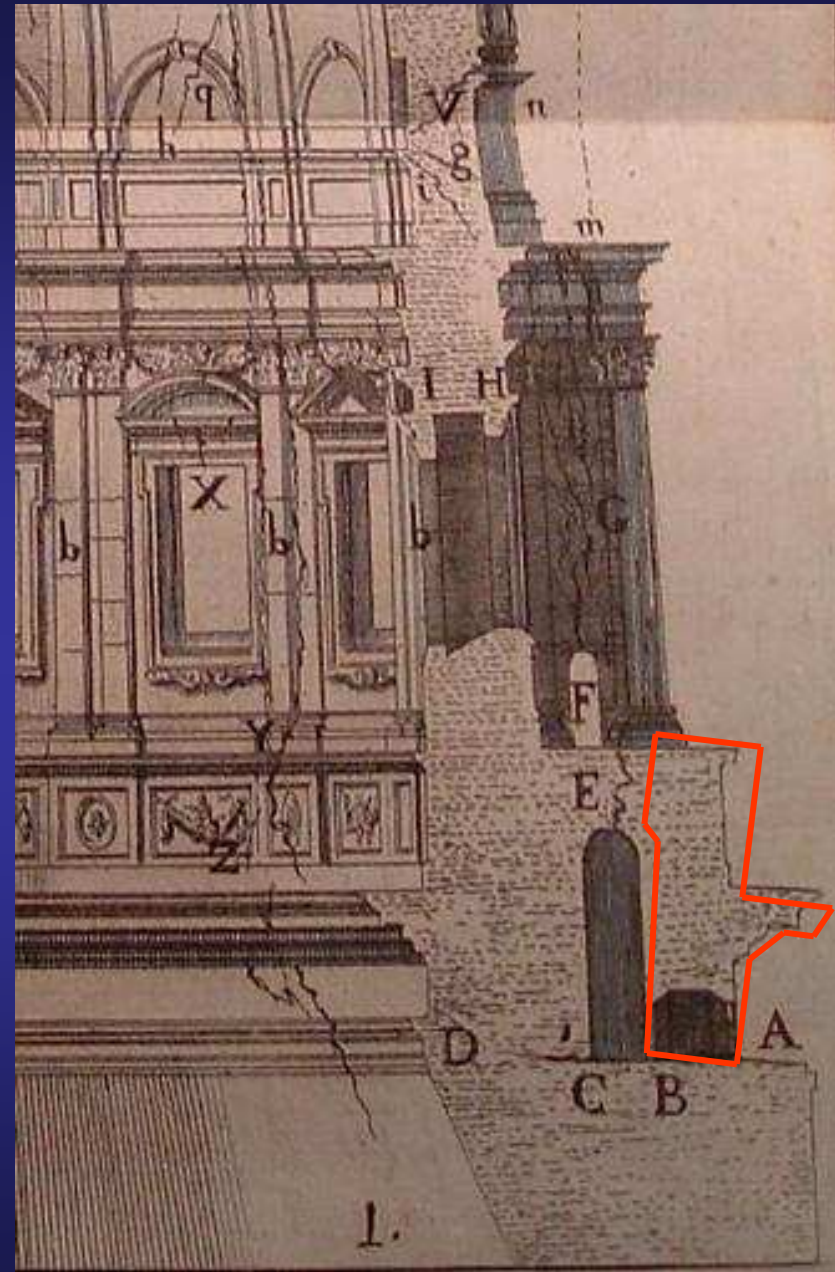
Descrizione dei danni osservati sul tamburo della cupola

*La base esteriore **A** del tamburo si vede piena di spaccature, molte delle quali corrono unite in su per tutto il tamburo medesimo e per tutto l'Attico. Le spaccature infrangono una quantità grandissima di travertini*



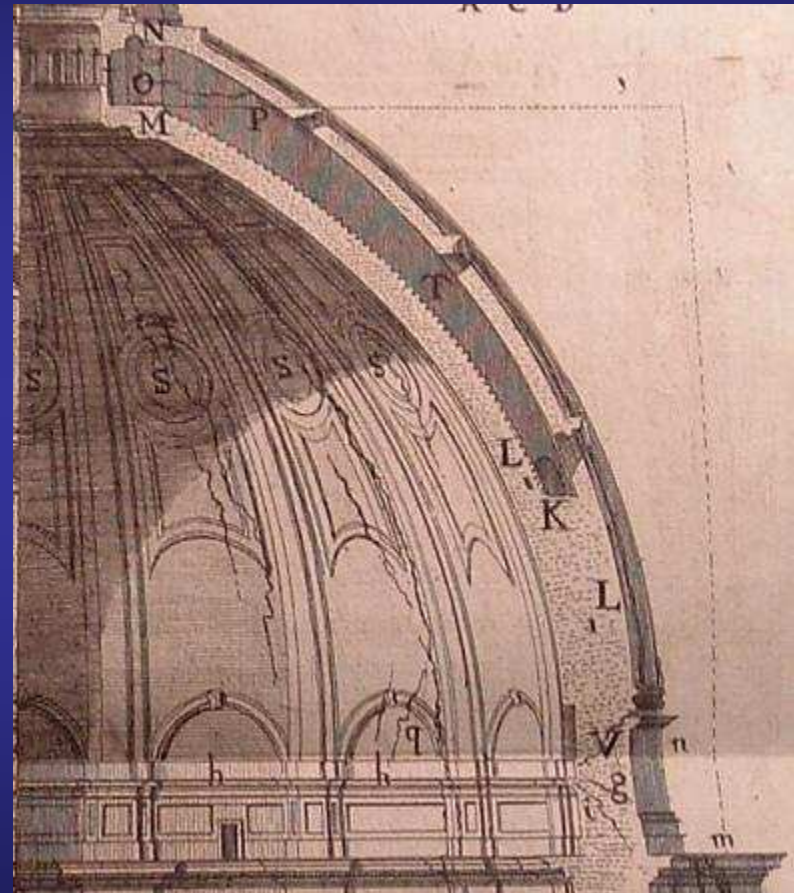
DIAGNOSI

*Aperture orizzontali passano tutte la grossezza **BA** del muro esteriore della base (...), rialzandosi tutto il muro dalla parte interiore verso **B** e rimanendo l'appoggio solamente verso **A**; anzi verso **B** tra una spaccatura orizzontale e l'altra in qualche luogo si levano colle mani senza sforzo considerevole i mattoni non più premuti*



Descrizione dei danni osservati sulle volte

*Entrando fra le due cupole per il corridoietto **K** si vedono delle aperture verticali negli spicchi tra muri **T** de' costoloni e si seppelliscono sotto **K**, dove le due cupole sono unite. Le medesime anche rompono gli architravi e soglie delle porte e finestre. Lo spicchio che corrisponde sopra il pilone della Veronica, principalmente verso il mezzo delle scale **T**, è dissestato molto*

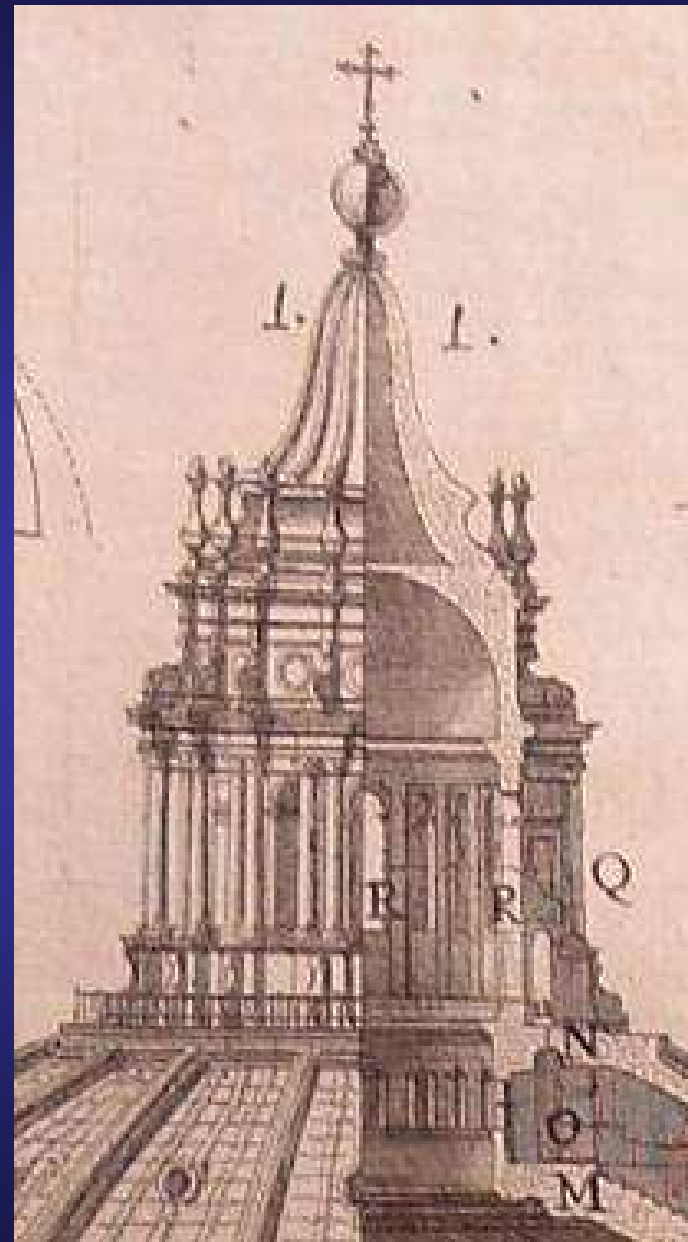


DIAGNOSI

Descrizione dei danni osservati nell'ordine Attico

*I medesimi contrafforti **Q** hanno molte aperture che terminano verso il mezzo delle finestre.*

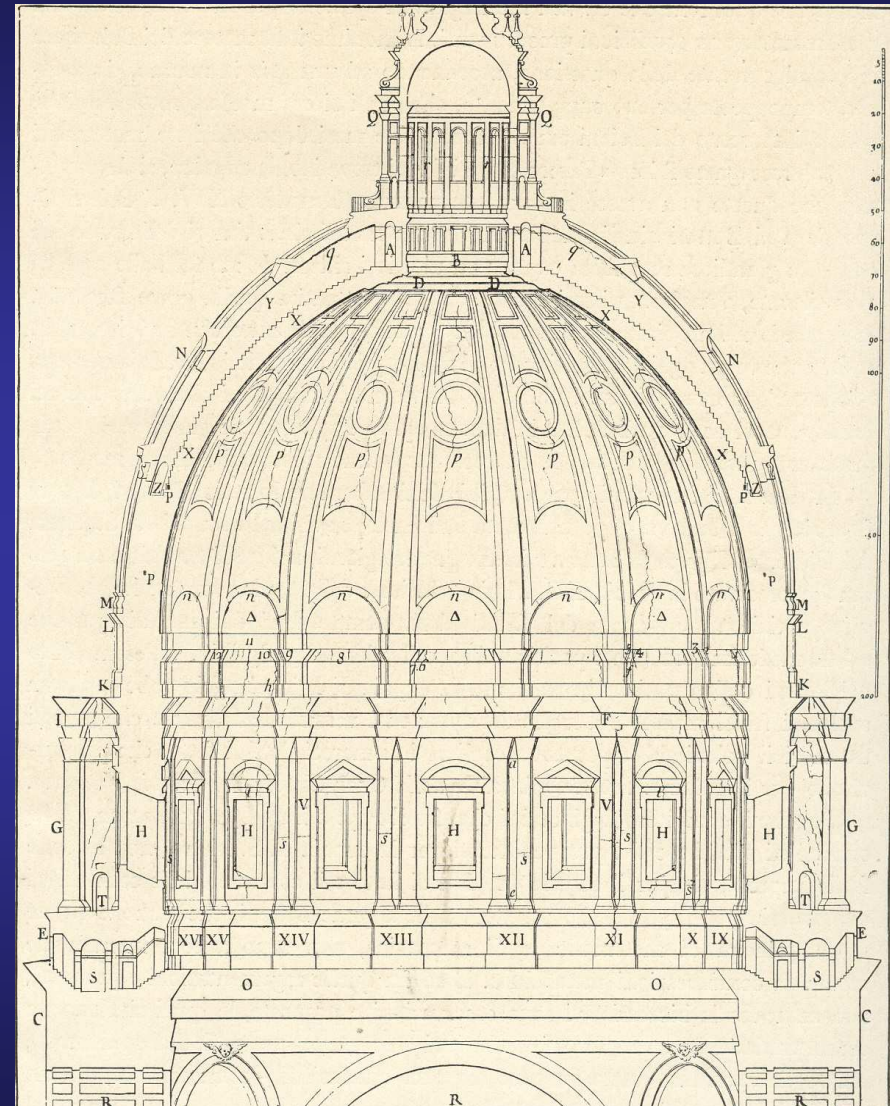
*Tutti i piastrini di dentro tra le finestre in **R** a mezza altezza in circa si vedon rotti.*



DIAGNOSI

Passando ora alla parte interna della Cupola in tutti i sedici spicchi si vedono delle aperture verso s nelle cornici tonde de'Serafini di mosaico e nelle bislunghe degli Angeli, molte delle quali aprono considerabilmente i mosaici stessi

In vari luoghi tanto di fuori quanto di dentro le due cupole si vedono rotti, o distaccati alcuni pezzi di marmo a coda di rondine messi in questi ultimi anni attraverso alle spaccature per vedere se' la fabbrica faceva moto



EZIOLOGIA

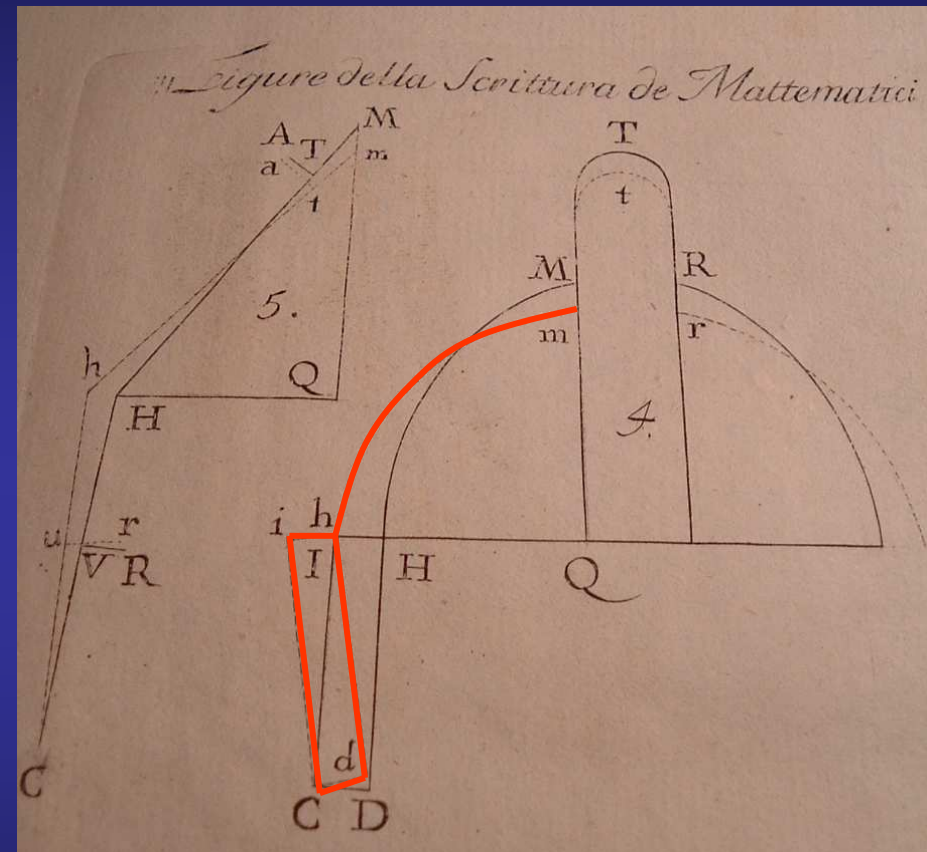
La causa del dissesto non va attribuita alle fondamenta in quanto non si rilevano dissesti imputabili a tale causa, soprattutto osservando gli arconi che gravano su di esse. Qui si rilevano solo leggere lesioni

se le cause dei dissesti fossero dipese dalle fondazioni:

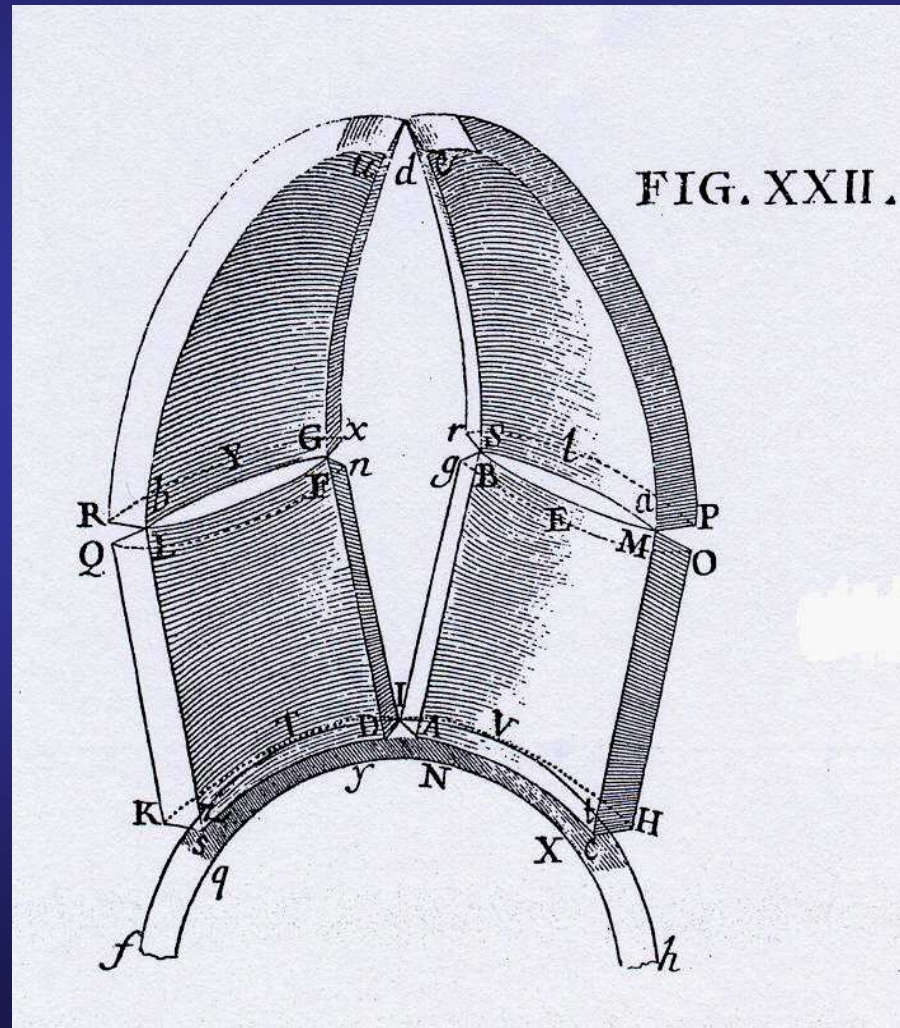
allora non sarebbero così tenui le aperture verso il fondo della base del Tamburo

Ma quale la causa principale?

Il peso del cupolino premendo sulla doppia calotta della cupola e i costoloni continuati tra le medesime unito col proprio peso alle cupole stesse abbia spinto in fuori il comune sostegno, che era il Tamburo



non poteva accadere senza aprirsi a modo di mela granata di sopra e di sotto



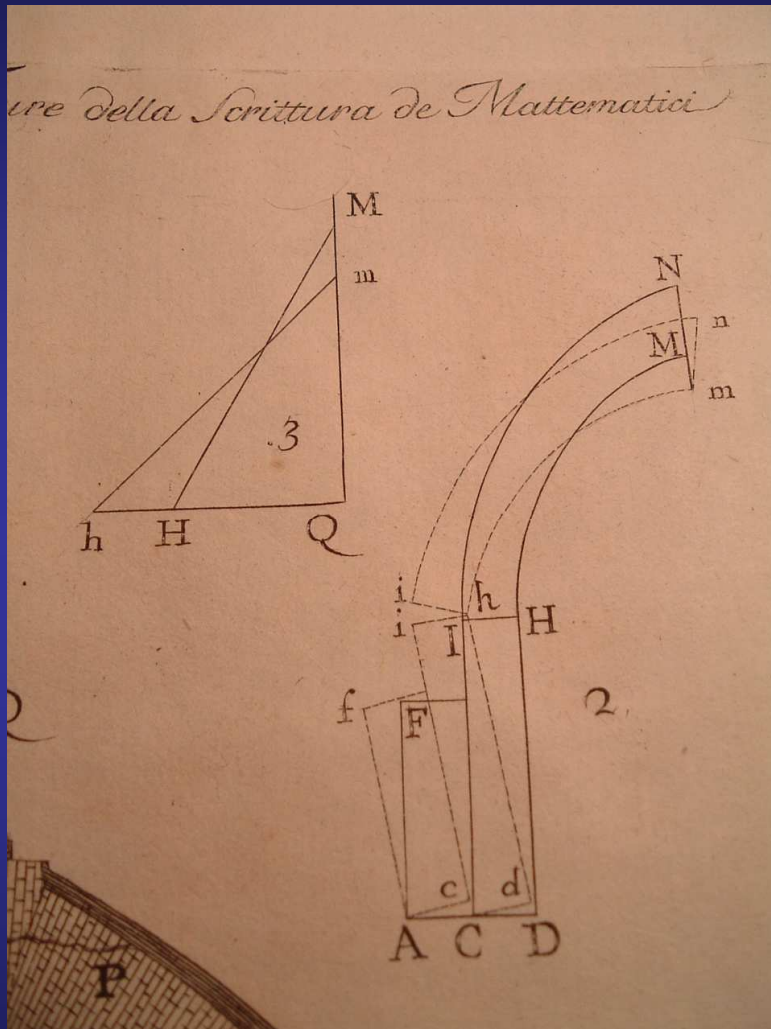
(...) non si può sapere di certo, se in qualche parte sia pur seguita la rottura de' medesimi cerchi, non essendo essi scoperti fuorché in pochissimi siti.

In secondo luogo, posso anche che non si siano rotti, come crediamo ancor noi, converrebbe sapere con quanto diligenza siano essi da principio stati lavorati.

In terzo luogo (e ciò crediamo sia seguito almeno in gran parte) non è cosa nuova, che il ferro si estenda.

Quell'allungamento, che in poco tempo cagiona il caldo o del Sole, o del Fuoco, lo deve qui aver prodotto in più d'un secolo e mezzo l'azione continua di una spinta così gagliarda.

EZIOLOGIA



(...) la scesa de' Costoloni nella impastatura della Volta sia seguita una dilatazione di Palmi due; si ricava da un **problema geometrico**, che più giù sarà esposto, che la dilatazione nel sito del Cerchio basso deve essere di Palmi uno Once sette, e nel sito del più alto Palmi uno Once due Minuti due, d'onde ne segue, che i medesimi cerchi sono ridotti ad una tensione così violenta, che supera la stessa azione del fuoco, e però stanno in evidente pericolo di rottura. Pare così messo fuori d'ogni controversia il nostro generale sistema del movimento seguito

Al momento della redazione della perizia era già noto il concetto di elasticità dei materiali nella forma enunciata da Robert Hooke (1635-1703) nel "*De Potentia Restituiva*" (1678), il quale aveva dimostrato che l'allungamento di una barra prismatica è direttamente proporzionale alla forza che produce l'allungamento e alla sua lunghezza, mentre è inversamente proporzionale all'area trasversale e al modulo di elasticità.

$$\delta = P / AE$$

PROGNOSI

Entità delle azioni associate al meccanismo cinematico.

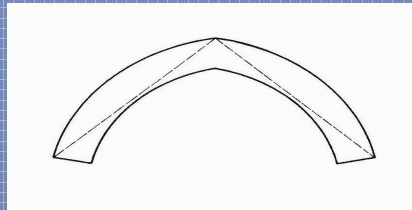
Stato tensionale delle cerchiature presenti nella cupola.

Procedimento di calcolo.
Embrionale applicazione del **PLV**

LEONARDO DA VINCI

Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze imperocché l'arco negli edifiti è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circolî ciascuno debolissimo per sé desidera cadere ed opporsi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in un'unica fortezza

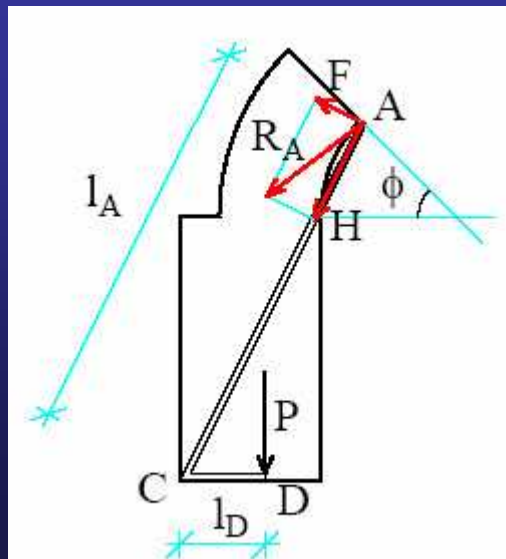
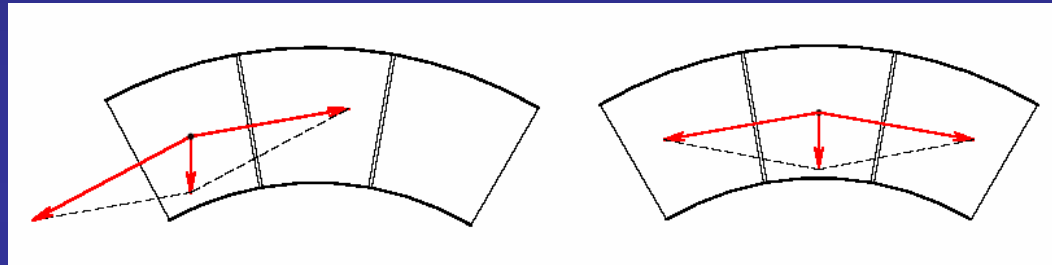
I 'arco non si romperà, se la corda dell'archi di fori non toccherà l'arco di dentro



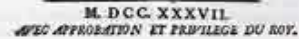


Philippe De La Hire

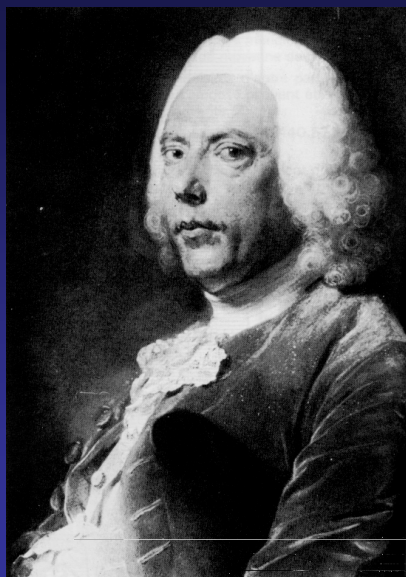
Traité de mecanique : ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, & les propriétés des corps pesants lesquelles ont un plus grand usage dans la physique (1695)



La reazione dell'arco è applicata all'intradosso

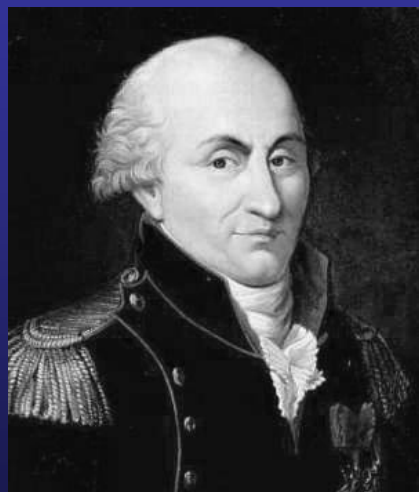


o.niglio@arte.unipi.it



P. Bourguer

Sur les lignes courbes qui son propres à former les voûtes en dôme, in *Mémoires de l'Accadémie Royale des Sciences*, Paris 1736



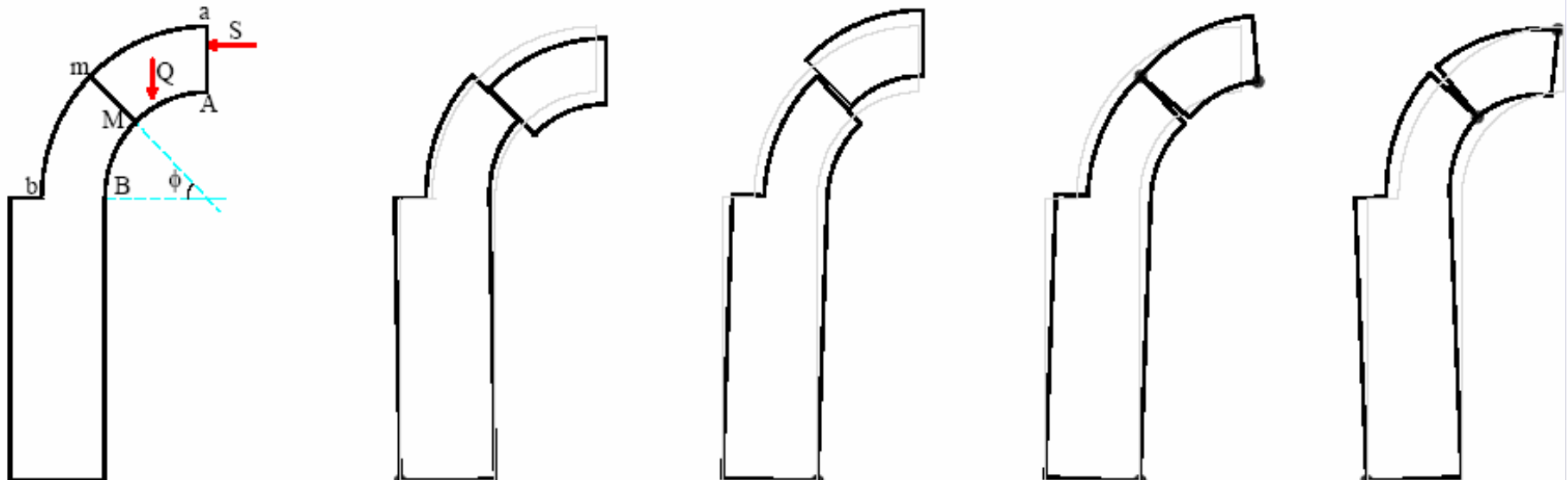
C.A. de Coulomb, *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages* (1779)

Il problema fondamentale che Coulomb si pone è questo:

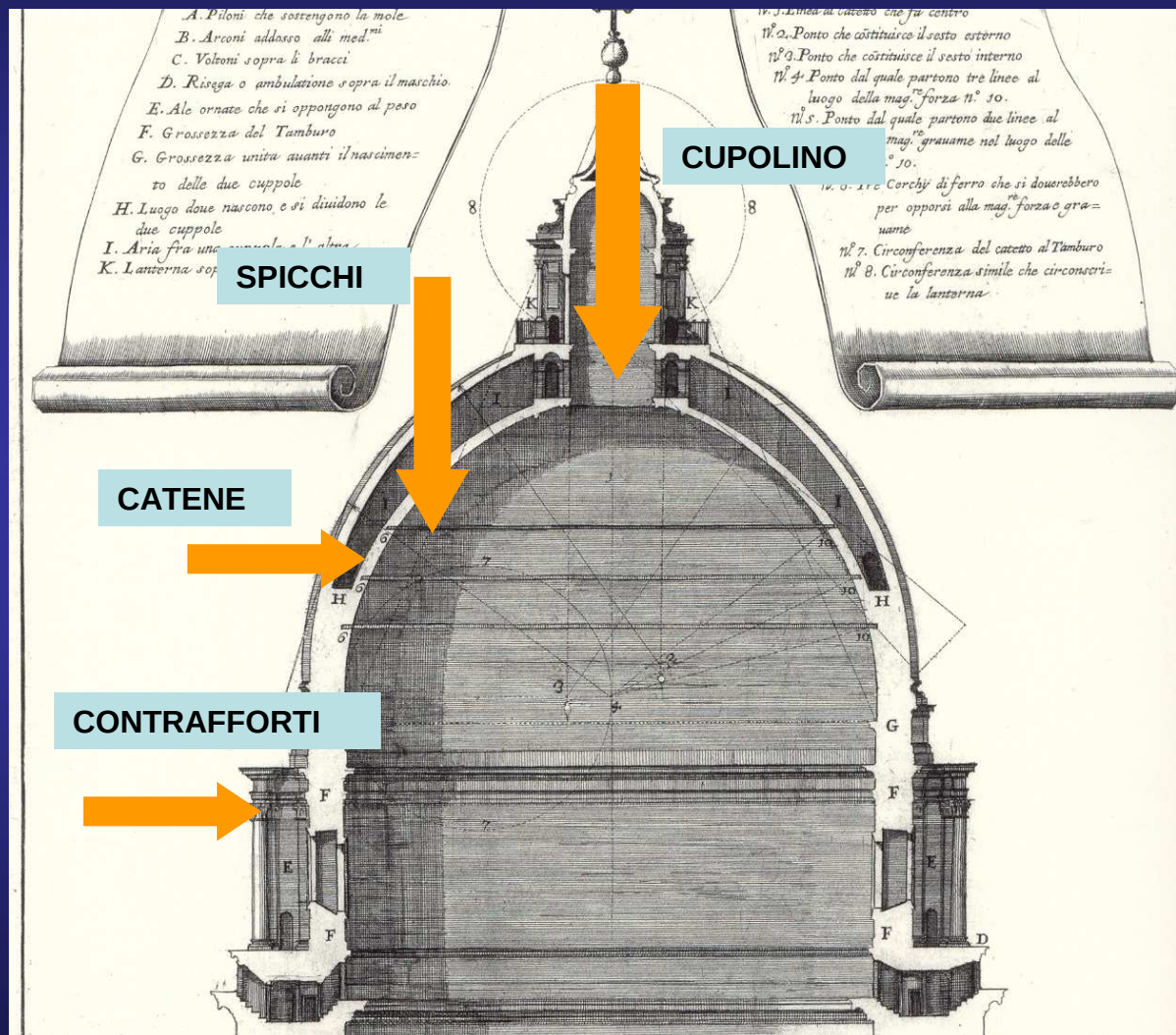


In una volta per la quale siano assegnate la curva interna AB e la curva esterna ab, sono dati anche i giunti Mm perpendicolari agli elementi della curva interna; si richiedono i limiti della forza orizzontale S che sostiene questa volta, supponendo che essa sia sollecitata dal proprio peso, e sia trattenuta dalla coesione e dall'attrito

Modalità di collasso



Entità delle azioni associate al meccanismo cinematico



Per avere la quantità assoluta della forza con cui agisce da una parte il Cupolino e la Volta della Cupola co' Costoloni per spingere; e dall'altra la base, il Tamburo e i Contrafforti per ritenere la spinta, conviene avere il peso

<i>Cupolino Libbre poco più di 4 milioni, cioè 4,081461</i>	<i>1`384 t</i>
<i>Cupole co' Contrafforti poco più di 50 , cioè 50,138000</i>	<i>16`997 t</i>
<i>Tamburo coll'Ordine Attico poco più di 48, cioè 48,013750</i>	<i>16`277 t</i>
<i>Contrafforti poco più di 13, cioè 13,342081</i>	<i>4`523 t</i>
<i>Base, poco più di 50, cioè 50,087359</i>	<i>16`980 t</i>
TOTALE	56.161 t

1 384 t

<i>Cupole co' Contrafforti poco più di 50 , cioè 50,138000</i>	16`997 t
<i>Tamburo coll'Ordine Attico poco più di 48, cioè 48,013750</i>	16`277 t
<i>Contrafforti poco più di 13, cioè 13,342081</i>	4`523 t
<i>Base, poco più di 50, cioè 50,087359</i>	16`980 t
TOTALE	56.161 t

16'997 t

Tamburo coll'Ordine Attico poco più di 48, cioè 48,013750	16'277 t
Contrafforti poco più di 13, cioè 13,342081	4'523 t
Base, poco più di 50, cioè 50,087359	16'980 t
TOTALE	56.161 t

16 277 t

Contrafforti poco più di 13, cioè 13,342081	4'523 t
Base, poco più di 50, cioè 50,087359	16'980 t
TOTALE	56.161 t

4 523 t

Base, poco più di 50, cioè 50,087359

TOTALE

16'980 t

56.161 t

16'980 t

Settore	Consumo (t)
Industria e artigianato	12.100
Commercio	1.100
Edilizia	1.100
Trasporti	1.100
Altre attività	1.100
TOTALE	56.161 t

56.161 t

Trattato Coesione de' corpi solidi di Pietro Muffchenbroek

Questi aveva riscontrato sperimentalmente che un filo tondo di ferro, il cui spessore era la decima parte di un dito del "piede renano" (sic!), è rotto da un peso di 450 libbre (153 kg)

(...) la forza assoluta del ferro che forma il primo Cerchio equivale a Libbre trecento trentasei mila ottocento sessanta tre, e del secondo ducento ottanta mila settecento diciannove

Resistenza a trazione della prima cerchiatura 114 t

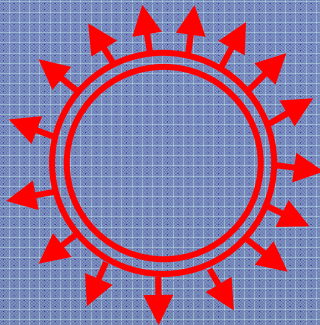
Resistenza a trazione della seconda cerchiatura 95 t

Il concetto di **energia di deformazione elastica** fu chiarito solo nel XIX secolo.

In un suo trattato riguardante l'elasticità dei materiali, **Lamé** lo attribuisce a **Clapeyron** che, nella prima metà dello stesso secolo, avrebbe affermato che la somma del prodotto delle forze esterne applicate ad un corpo per le componenti degli spostamenti nelle direzioni dei loro punti di applicazione è uguale al doppio dell'energia di deformazione del corpo stesso

Trazione di un anello circolare

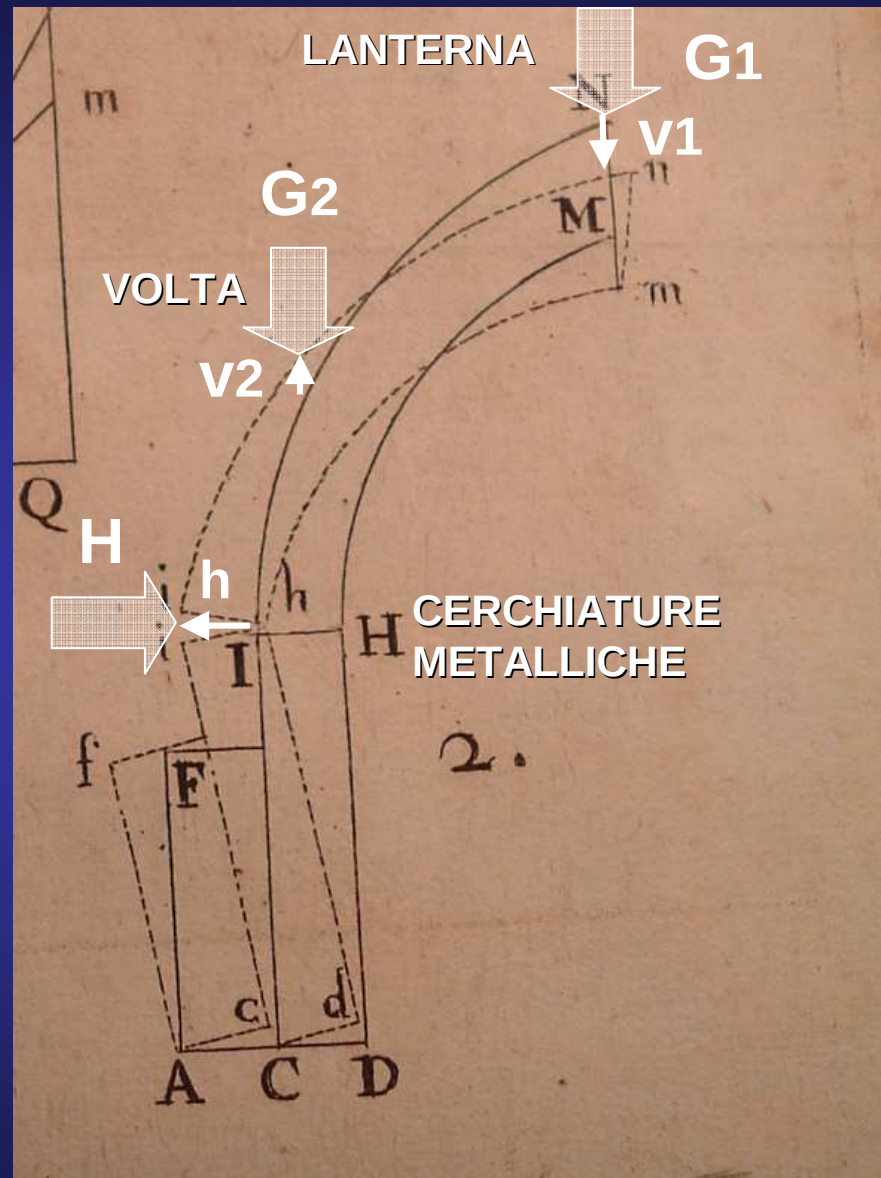
i tre Matematici giungono quindi a dimostrare che il peso del cupolino e della cupola esercitato sull'anello di imposta, produce una forza **H** distribuita sull'intera circonferenza, a modo di pressione interna **p**



$$H=p=q \times r$$

dove lo sforzo di trazione **p** nell'anello è pari al prodotto del carico **q** per unità di lunghezza per il raggio **r** della circonferenza.

$$H \times h = \Sigma (G \times v)$$



*Passando ora a' momenti di queste forze, Momento chiamasi da Meccanici l'**Energia**, con cui agisce una determinata forza, nella particolare circostanza, nella quale essa viene applicata. Due forze, che contrastano insieme, allora sono in equilibrio, quando la velocità del moto, che far dovrebbe la prima contro la direzione sua propria nell'esser superata dalla seconda tante volte è più grande della velocità, che la seconda avrebbe pur nella propria sua direzione, quante volte la seconda forza considerata in se stessa, è maggior della prima.*

..... ne viene che l'Energia, o il momento di una forza cresce o scema, quando pur cresce o scema la piegata velocità e per avere la sua misura conviene moltiplicar essa forza per la via, che contro la sua propria direzione farebbe se fosse vinta, e a seconda della medesima, se vincitrice.

René Descartes (1637) Discours de la Méthode de bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.

La matematica va rifondata come scienza generale dell'ordine e della misura e da questa nuova scienza unificata deve procedere tutta la scienza.



G. Bernoulli

Immaginate di imprimere ad un sistema di forze un piccolo movimento sia di traslazione che di rotazione; vi sarà facile comprendere che per questo movimento ognuna di tali forze avanzerà o si ritirerà nella sua direzione, a meno che qualcuna delle forze non abbia direzione perpendicolare a quella del piccolo movimento, nel qual caso non si sposterà

Lettera a Varignon, 17 gennaio 1717

La Spinta

Cupolino	libbre	2'961060	
Cupola e costoloni	libbre	6'412590	
Totale	libbre	9'373650	3'200 t

La Resistenza

Attico	libbre	1'266690
Contrafforti staccati	libbre	0'574555
Parte esteriore della base	libbre	0'752686

che messe insieme alle resistenze dei cerchi di ferro

	libbre	2'674919	
Totale	libbre	6.136294	2'100 t

Vi rimane dunque uno sbilancio di

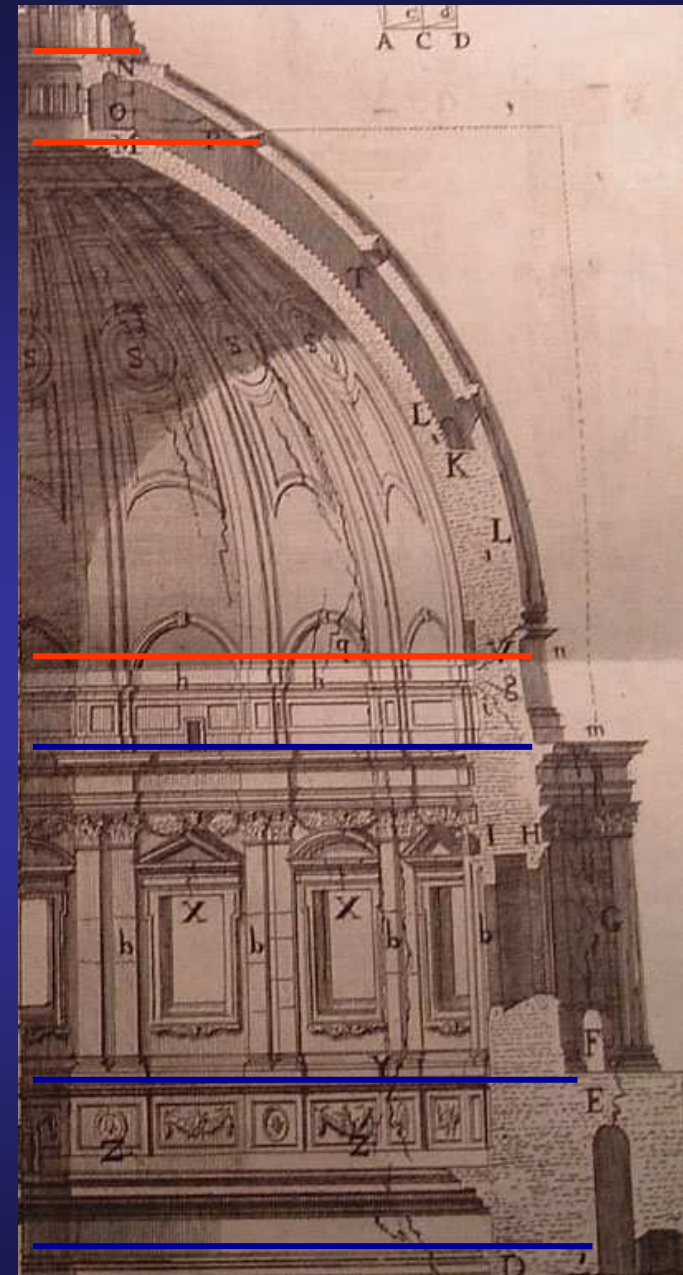
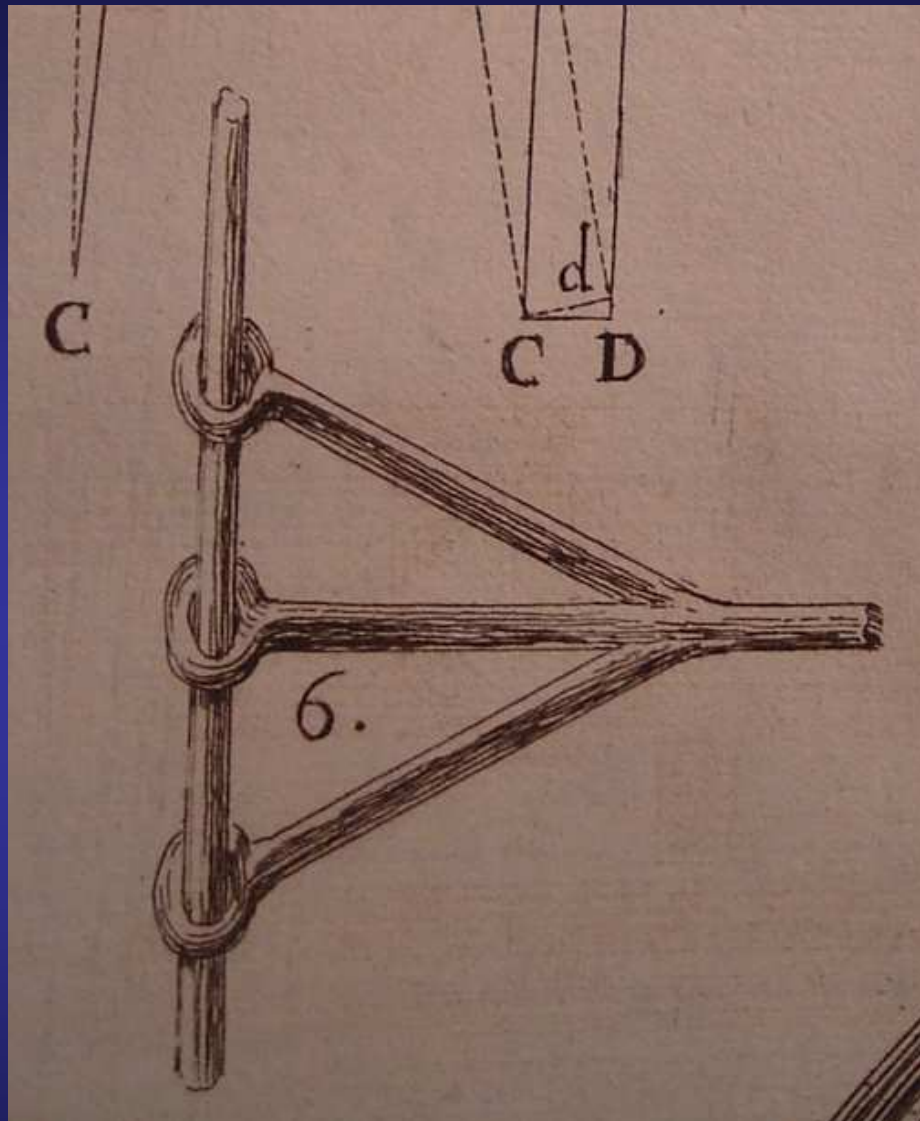
Totale (spinta)	libbre	9'373650	
Totale (resistenza)	libbre	6'136294	
Sbilancio	libbre	3'237356	1'100 t

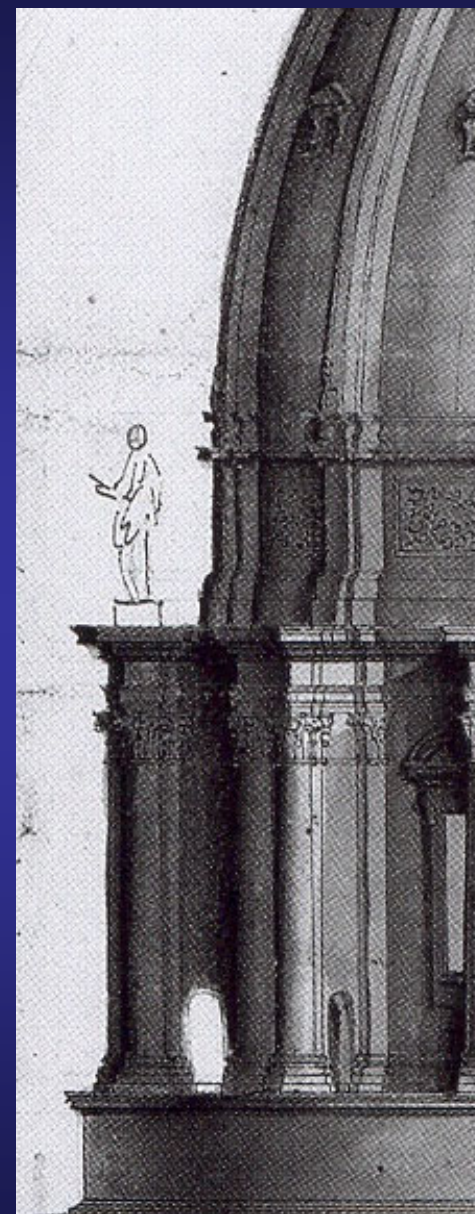
TERAPIA

(...) venendo ora a' rimedi premettiamo in primo luogo che se alcun sene trova efficace a rimuovere ogni pericolo di rovina e che lasci alla fabbrica e la vaghezza e i comodi che gode al presente, questo li deve preferire ad ogni altro.

TERAPIA

(...) conviene tenersi in un semplice equilibrio, ma raddoppiare le resistenze in maniera che se mai per accidente impensato una parte mancasse sussista l'altra; dal qual principio si ricava che conviene in tal modo stabilire in se stessa la Cupola che non possa più spingere lateralmente il suo sostegno e riunire in tal modo il sostegno che da se solo resti capace a fermare ogni spinta







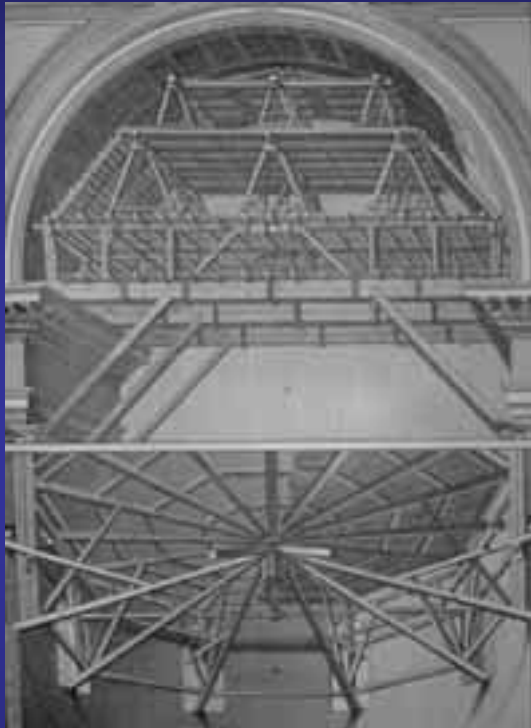
Nicolò Pagliarini

Contignationes ac pontes, Roma 1743



Nicola Zabaglia (1664-1750)

Maestro muratore in Roma



Ponteggi per i restauri della cupola di San Pietro in Roma

(....) Tutto ciò che abbiamo detto finora appartiene all'assicurare in avvenire ogni pericolo questo grande edificio e a riparare a que' danni più principali che potevano tirarsi dietro delle conseguenze troppo funeste. Così ci pare di aver adempite appieno le parti del nostro debito

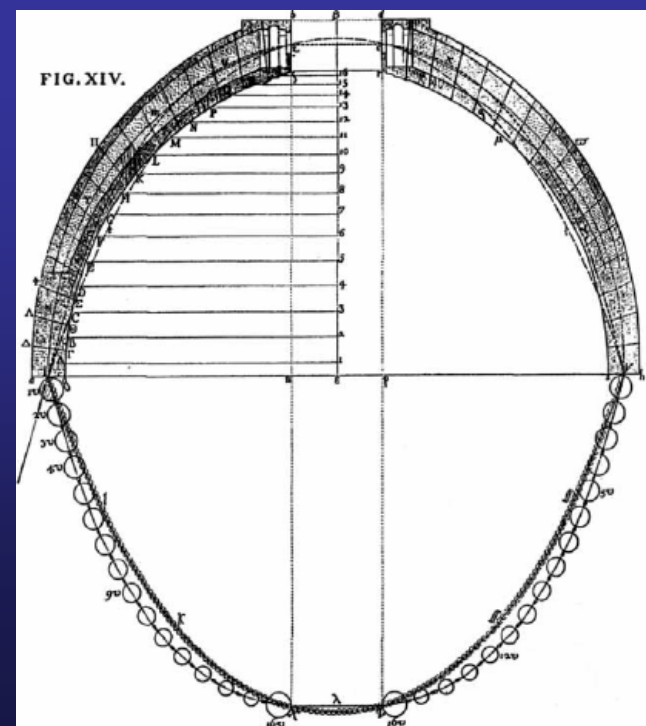
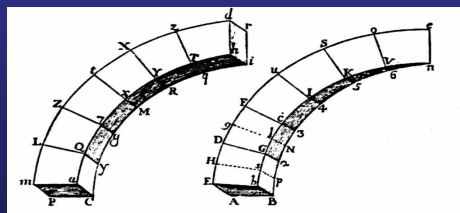
I risultati della perizia furono resi noti durante una conferenza tenuta da Boscowich a Roma il 20 gennaio 1743



Giovanni Poleni, nel 1743 aveva ricevuto l'incarico di analizzare l'instabilità della cupola e di risalire alle sue cause per porre opportuni rimedi.

.....E per dir breve, in questo esame fatto con la catenaria, il punto principale consisteva nel vedere, se veramente alcuna parte della catenaria cadesse fuori de' contorni della volta...

.....in un certo modo convalidata resta anche la proposizione, in cui costituito abbiamo, che per non cattiva la figura della gran volta riputar si debba....





Università di Pisa



MAR · J856

AGO 1835

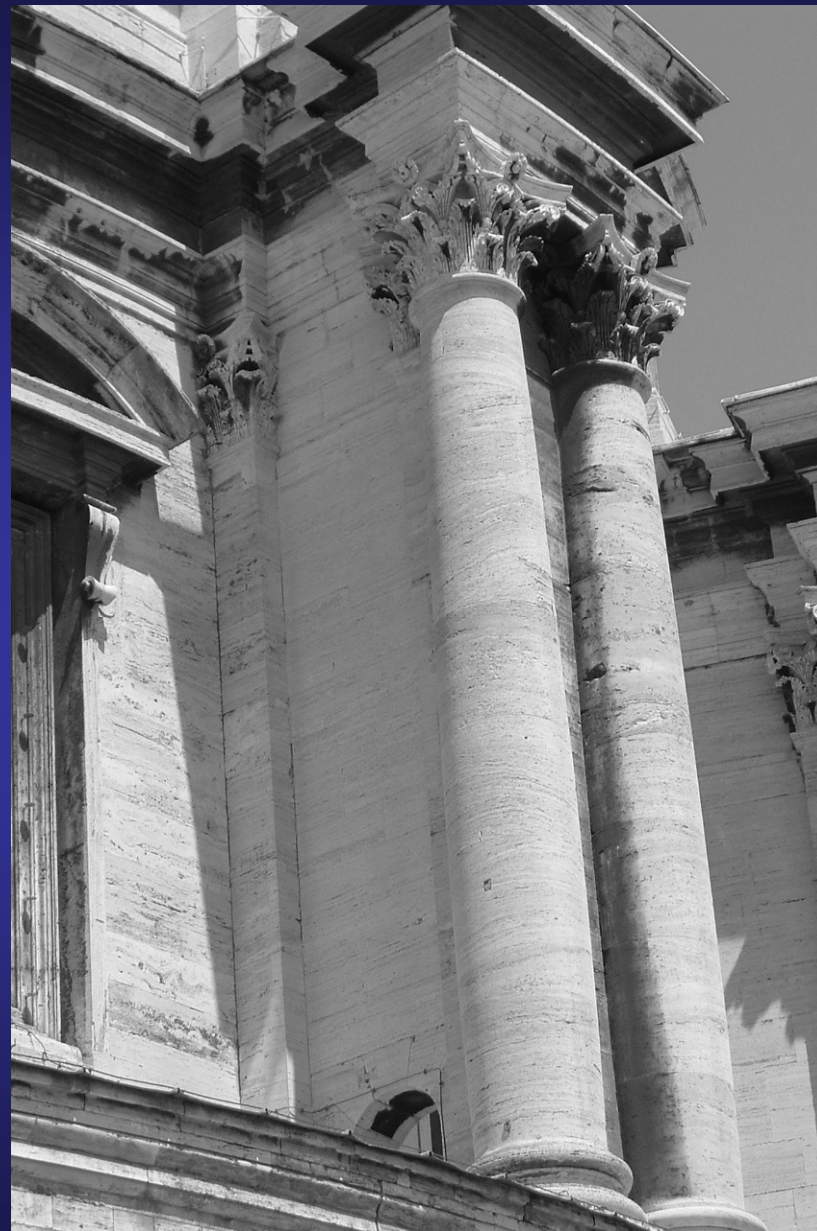
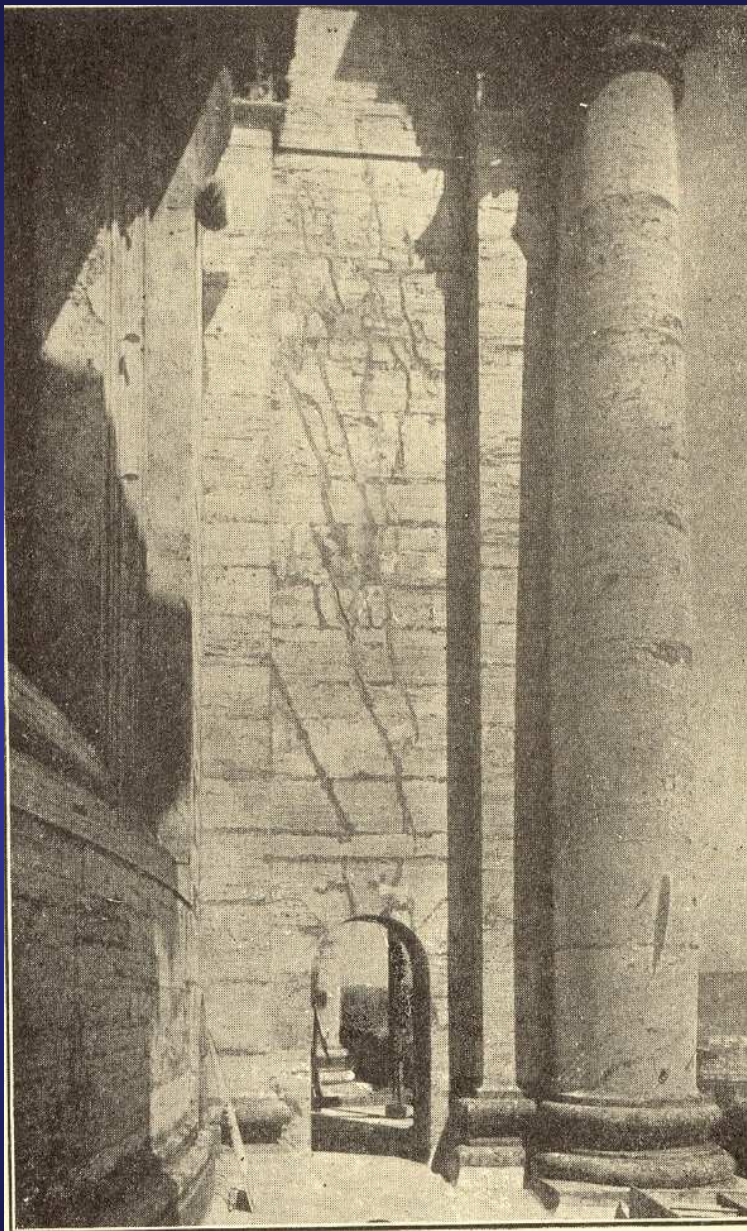
MAG°

J869

S. LONGI







GRAZIE PER L'ATTENZIONE



