

Problema. Nel sistema di figura 1 tutte le travi sono *flessibili* ma *inestensibili*. Sulle travi *AB* e *DE* agisce un carico distribuito assiale, uniforme per unità di lunghezza, d'intensità q ; mentre in corrispondenza della sezione *C* della trave *BD* agisce una coppia concentrata di intensità \bar{M} . La struttura è inoltre soggetta alle sollecitazioni termiche indicate in figura: con andamento variabile nello spessore H della trave in *BD* e con andamento costante in *AB* e *DE*.

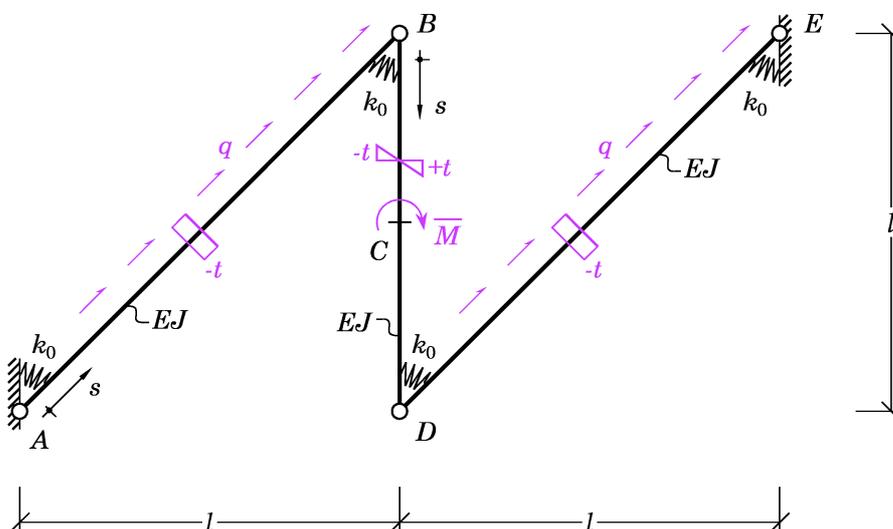


Figura 1

Il sistema presenta simmetria polare rispetto al polo C. È possibile individuare con semplicità una quota polarmente simmetrica ed una polarmente antisimmetrica nei carichi e nelle sollecitazioni termiche agenti sulla struttura. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, quindi, il sistema può essere decomposto nei due sottosistemi rappresentati nelle figure 2 e 3, il primo simmetrico, il secondo antisimmetrico.

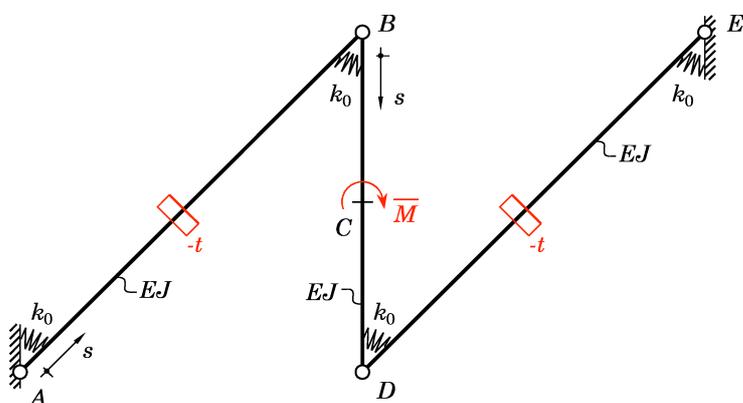


Figura 2: Sottosistema polarmente simmetrico.

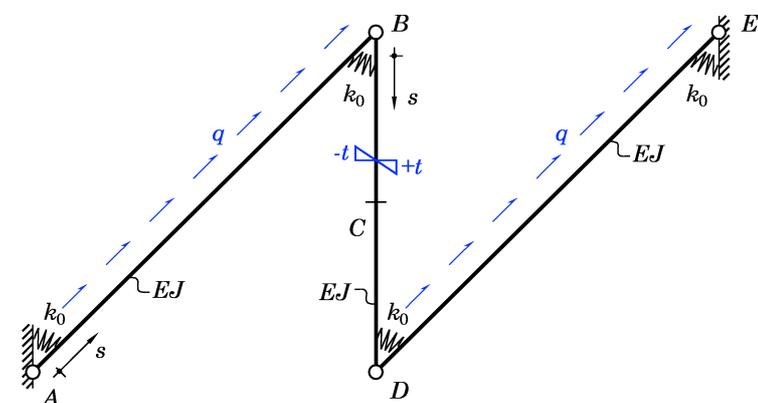


Figura 3: Sottosistema polarmente antisimmetrico.

Considerazioni di simmetria consentono infine di limitare l'analisi alla sola parte ABC , vincolando la sezione C con una cerniera nel caso del sistema simmetrico e con un doppio-doppio pendolo nel caso del sistema polarmente antisimmetrico, come indicato nelle figure 4 e 5.

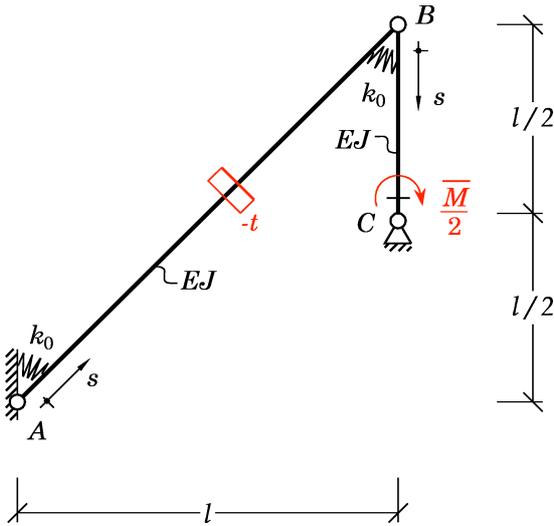


Figura 4: Sottosistema polarmente simmetrico.

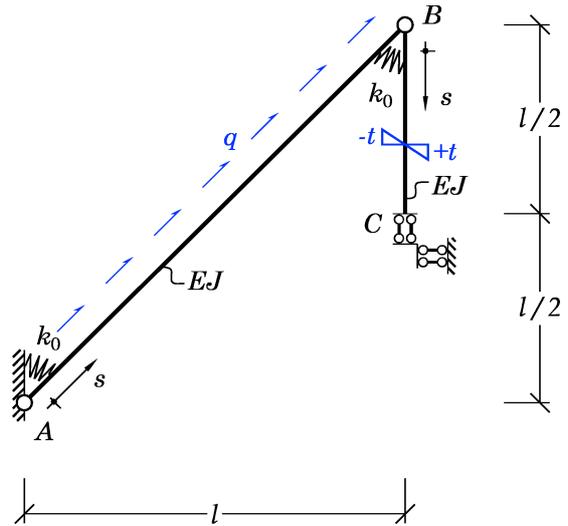


Figura 5: Sottosistema polarmente antisimmetrico.

Agli studenti dei CdL in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Chimica era richiesto di risolvere il sistema rappresentato in figura 4 con il metodo delle forze; agli studenti del CdL in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile era invece richiesto di risolvere con il metodo delle forze il sistema rappresentato in figura 5. Entrambi i gruppi avrebbero dovuto impostare la risoluzione del problema con il metodo della linea elastica per il sistema rappresentato in figura 5.

Le equazioni differenziali per i tratti AB (tratto 1) e BC (tratto 2) e le condizioni al bordo che consentono di risolvere il sistema antisimmetrico (fig. 5) mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti:

$$EJv_1^{IV} = 0;$$

$$EJv_2^{IV} = 0;$$

$$1. v_1(0) = 0;$$

$$2. -EJv_1''(0) + k_0v_1'(0) = 0;$$

$$3. v_2(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_1(\sqrt{2}l);$$

$$4. -EJ \left[v_2''(0) - \frac{2\alpha t}{H_3} \right] = -EJv_1''(\sqrt{2}l);$$

$M_2(0)$

$$5. -EJv_1''(\sqrt{2}l) = k_0 \left[v_1'(\sqrt{2}l) - v_2'(0) \right];$$

$$6. -EJv_1'''(\sqrt{2}l) = 0;$$

$$7. v_2^1\left(\frac{l}{2}\right) = 0;$$

$$8. -EJv_2'''\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Soluzione del problema relativo al sistema antisimmetrico

Il sottosistema raffigurato in fig. 5 risulta una volta staticamente non determinato. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze si sceglie come incognita iperstatica X_1 la coppia esercitata dall'incastro elastico in B . Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 6):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)},$$

con: $\phi_{BC}(0) - \phi_{AB}(\sqrt{2}l) = X_1/k_0$, avendo assunto la rotazione della sezione trasversale, ϕ , positiva in senso orario.

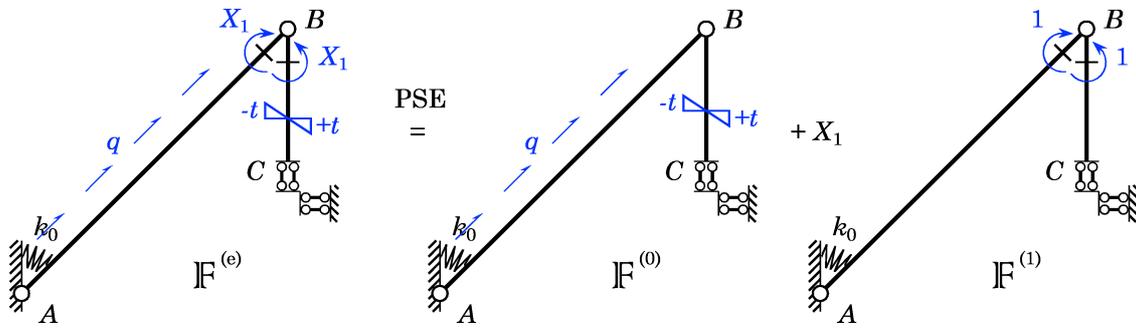


Figura 6: Scomposizione del sistema effettivo (fig. 5)

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 7 e 8.

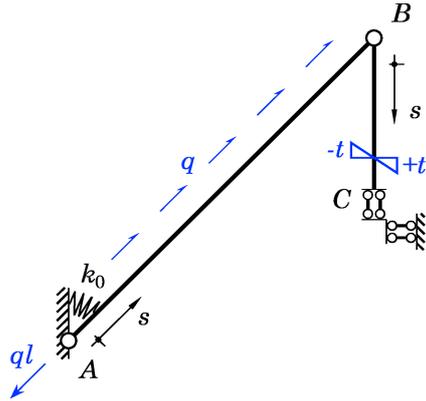


Figura 7: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

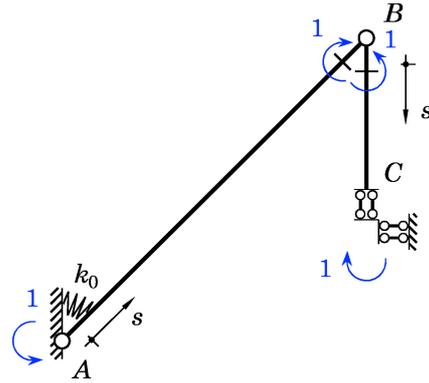


Figura 8: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0, \sqrt{2}l)$ per AB e $s \in (0, l/2)$ per BC.

| | N_0 | T_0 | M_0 | N_1 | T_1 | M_1 |
|----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AB | $q(l-s)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| BC | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 |

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura seguente.

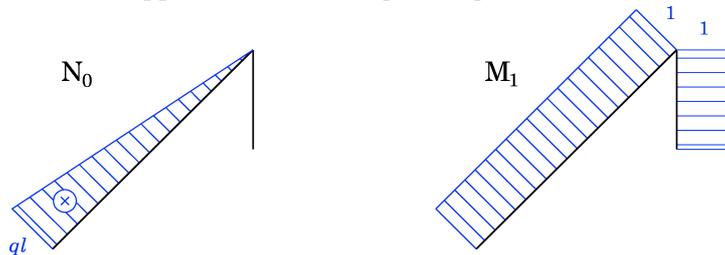


Figura 9: Diagrammi delle CdS in $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$.

I coefficienti di Müller-Breslau risultano essere i seguenti:

$$\eta_1 = -\frac{X_1}{k_0};$$

$$\eta_{10} = \frac{\alpha t l}{H};$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{k_0} + \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{l}{EJ}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11} + \frac{1}{k_0}};$$

□

$$X_1 = -\frac{2EJ \alpha t l / H}{1 + 2\sqrt{2} + 4 \frac{EJ}{lk_0}}$$

▪ **Soluzione del sistema simmetrico**

Il sistema polarmente simmetrico rappresentato nella fig. 4 risulta *due volte staticamente non determinato*. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze si sceglie come incognita iperstatica X_1 la coppia esercitata dall'incastro elastico in A e come incognita iperstatica X_2 la componente orizzontale della reazione vincolare esercitata dalla cerniera in C. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 10):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)} + X_2 \mathbf{F}^{(2)},$$

con: $\phi_{AB}(0) = -X_1/k_0$, avendo assunto la rotazione della sezione trasversale, ϕ , positiva in senso orario, e $v_{Cx} = 0$.

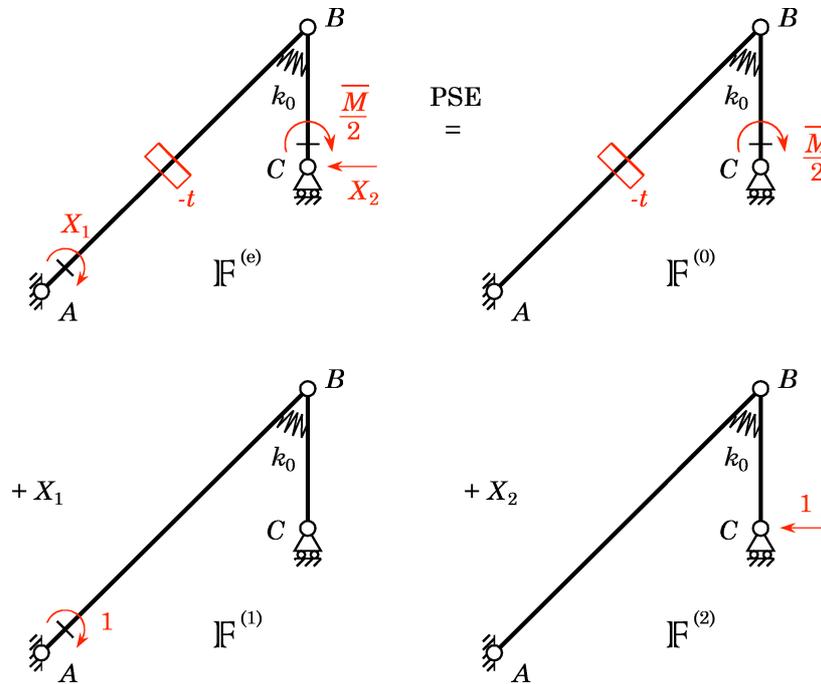


Figura 10: Scomposizione del Sistema effettivo (fig. 4)

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$. I tre sistemi sono rappresentati nelle figure 11, 12 e 13.

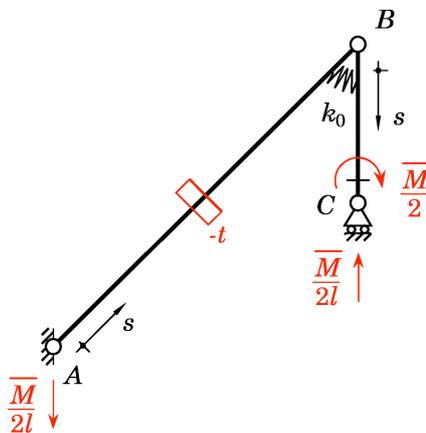


Figura 11: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

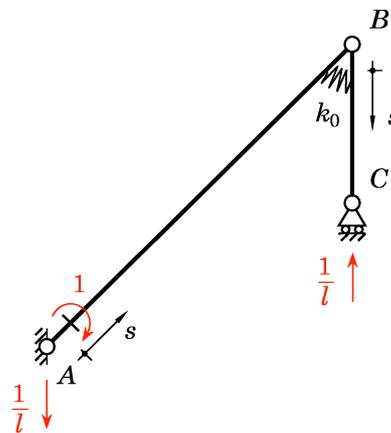


Figura 12: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

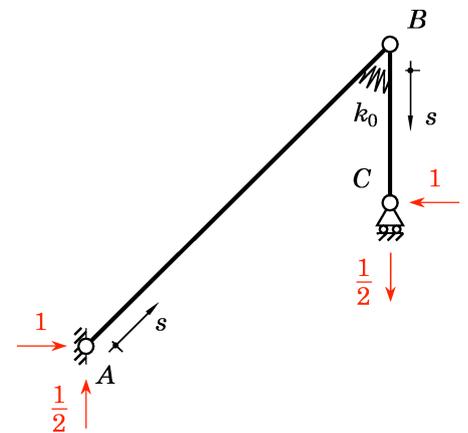


Figura 13: Sistema $\mathbf{F}^{(2)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0, \sqrt{2}l)$ per AB e $s \in (0, l/2)$ per BC.

| | N_0 | T_0 | M_0 | N_1 | T_1 | M_1 | N_2 | T_2 | M_2 |
|----|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| AB | $\sqrt{2} \frac{\bar{M}}{4l}$ | $-\sqrt{2} \frac{\bar{M}}{4l}$ | $-\sqrt{2} \frac{\bar{M}}{4l} s$ | $\frac{\sqrt{2}}{2l}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2l}$ | $1 - \frac{\sqrt{2}}{2l} s$ | $-\frac{3}{4} \sqrt{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{4} s$ |
| BC | $-\frac{\bar{M}}{2l}$ | 0 | $-\frac{\bar{M}}{2}$ | $-\frac{1}{l}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $-\frac{l}{2} + s$ |

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 14.

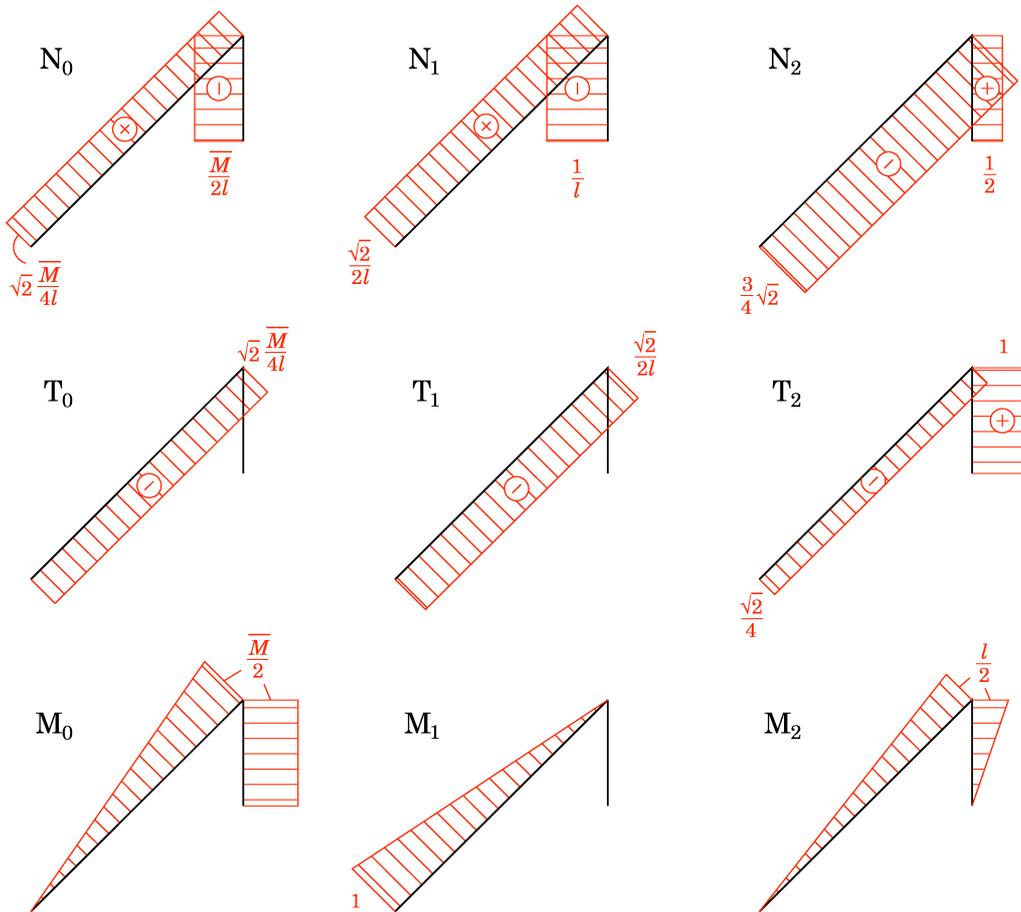


Figura 14: Diagrammi delle CdS in $\mathbf{F}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$.

Il sistema costituito dalle equazioni di elasticità di Müller-Breslau è il seguente:

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X_1 + \eta_{12}X_2 \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21}X_1 + \eta_{22}X_2 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \eta_1 = -X_1/k_0, \quad \text{e} \quad \eta_2 = 0,$$

mentre gli altri coefficienti, calcolati attraverso opportune applicazioni del teorema dei lavori virtuali, sono:

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= -\alpha t - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{l\bar{M}}{EJ}; & \eta_{11} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{l}{EJ}; & \eta_{12} &= -\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{l^2}{EJ}; \\ \eta_{20} &= \frac{3}{2} \alpha t l + \frac{\bar{M}l}{4k_0} + (4\sqrt{2} + 3) \frac{\bar{M}l^2}{48EJ}; & \eta_{21} &= \eta_{12}; & \eta_{22} &= \frac{l^2}{4k_0} + (1 + 2\sqrt{2}) \frac{l^3}{24EJ}. \end{aligned}$$

Il valore delle incognite iperstatiche può infine essere calcolato risolvendo il sistema algebrico seguente, ad esempio attraverso la regola di Cramer:

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} + 1/k_0 & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_{10} \\ -\eta_{20} \end{pmatrix}.$$

9 giugno 2016