

Esame di **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI - Parte I**  
 Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale  
 Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta in itinere del 21 maggio 2016

**Problema.** Nel sistema di figura 1 la trave  $AD$  è flessibile ma inestensibile, mentre le altre sono solo estensibili. Sulla trave  $AD$  agisce un carico distribuito uniforme per unità di lunghezza, d'intensità  $p$ , e una coppia concentrata, di intensità  $pl^2$ , agente in corrispondenza della sezione  $C$ . Inoltre, la trave  $AD$  è soggetta alla variazione termica, variabile nello spessore  $H$  della trave, indicata in figura. Infine, le travi  $BE$  e  $DE$  presentano i difetti di lunghezza indicati.

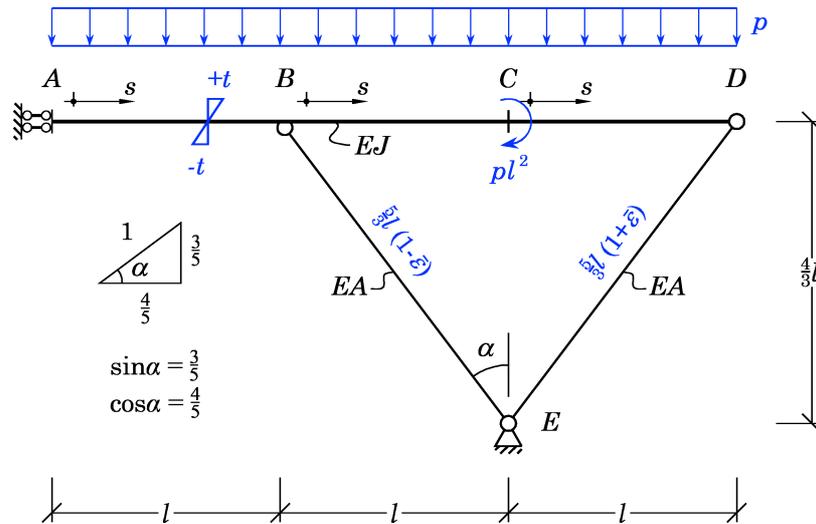


Figura 1

1) Il sistema risulta una volta staticamente non determinato. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze si sceglie come incognita iperstatica  $X_1$  la coppia di incastro interna in corrispondenza della sezione  $B$  della trave  $AD$ , in corrispondenza della sezione  $B$ . Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 2):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)},$$

con:  $\phi_{BC}(0) - \phi_{AB}(l) = 0$ , avendo assunto, come al solito, la rotazione della sezione trasversale,  $\phi$ , positiva se avviene in verso orario.

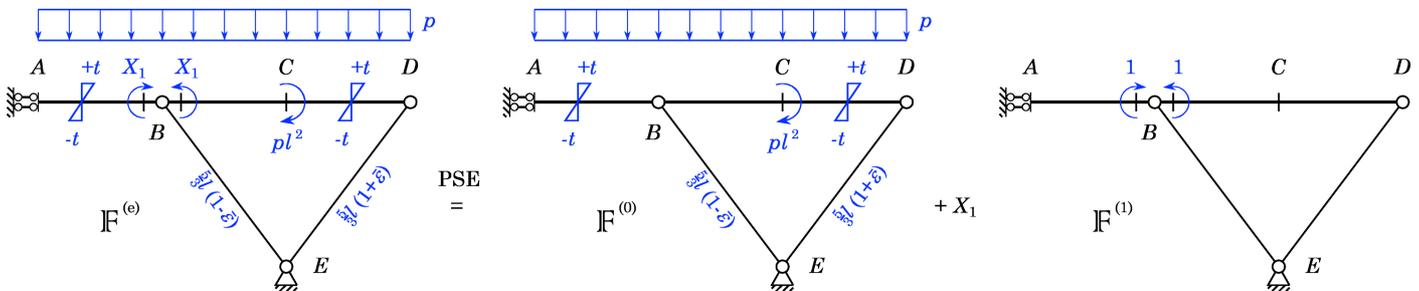


Figura 2: Scomposizione del Sistema effettivo

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi  $\mathbf{F}^{(0)}$  e  $\mathbf{F}^{(1)}$ . I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

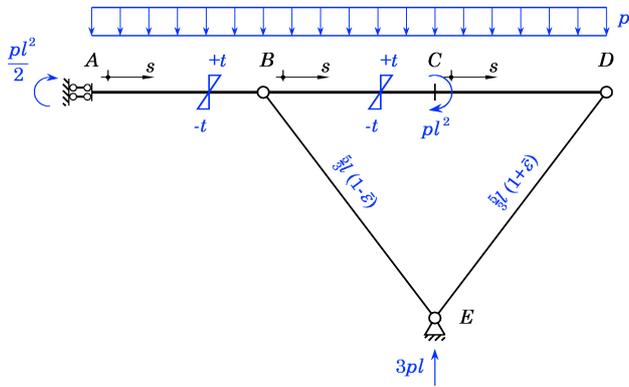


Figura 3: Sistema  $F^{(0)}$ .

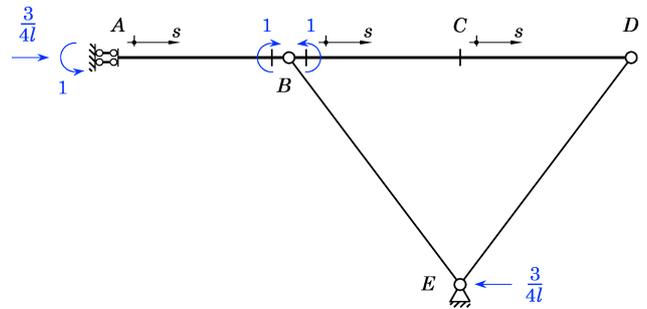


Figura 4: Sistema  $F^{(1)}$ .

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi  $F^{(0)}$  e  $F^{(1)}$  sono raccolte nella tabella seguente, nella quale,  $s \in (0, l)$ , nei versi indicati nelle figure 3 e 4.

	$N_0$	$T_0$	$M_0$	$N_1$	$T_1$	$M_1$
AB	0	$-ps$	$\frac{p}{2}(l^2 - s^2)$	$-\frac{3}{4l}$	0	-1
BC	$\frac{9}{8}pl$	$\frac{p}{2}(l - 2s)$	$\frac{ps}{2}(l - s)$	$-\frac{3}{8l}$	$\frac{1}{2l}$	$\frac{s}{2l} - 1$
CD	$\frac{9}{8}pl$	$-\frac{p}{2}(l + 2s)$	$\frac{p}{2}(2l + s)(l - s)$	$-\frac{3}{8l}$	$\frac{1}{2l}$	$\frac{s - l}{2l}$
BE	$-\frac{15}{8}pl$	0	0	$-\frac{5}{8l}$	0	0
DE	$-\frac{15}{8}pl$	0	0	$\frac{5}{8l}$	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura seguente.

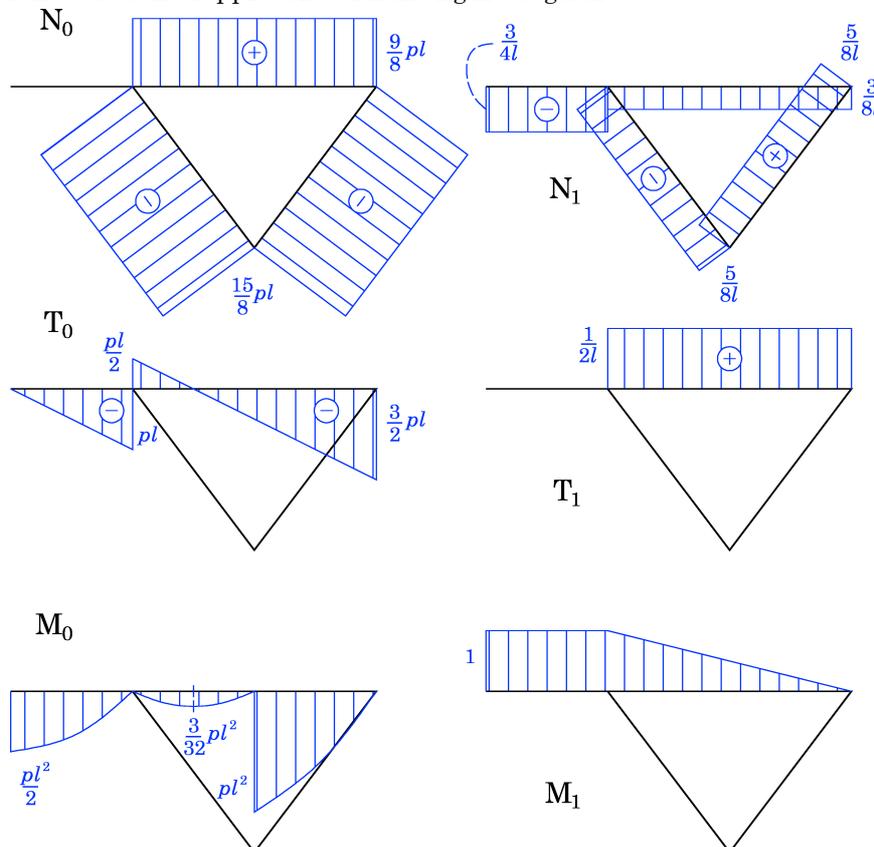


Figura 5: Diagrammi delle CdS in  $F^{(0)}$  e  $F^{(1)}$ .

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = 0;$$

$$1 \cdot \eta_{10} = \int_{BE} N_1 \left( \frac{N_0}{EA} - \bar{\varepsilon} \right) ds + \int_{DE} N_1 \left( \frac{N_0}{EA} + \bar{\varepsilon} \right) ds + \int_{AB, BC, CD} M_1 \left( \frac{M_0}{EJ} - \frac{2\alpha t}{H} \right) ds; \quad \square \quad \eta_{10} = \frac{25}{12} \bar{\varepsilon} - \frac{7}{12} \frac{pl^3}{EJ} + 4 \frac{\alpha t l}{H};$$

$$1 \cdot \eta_{11} = \int_{BE, DE} \frac{N_1^2}{EA} ds + \int_{AB, BC, CD} \frac{M_1^2}{EJ} ds; \quad \square \quad \eta_{11} = \frac{125}{96} \frac{1}{EA l} + \frac{5}{3} \frac{l}{EJ}.$$

**T**

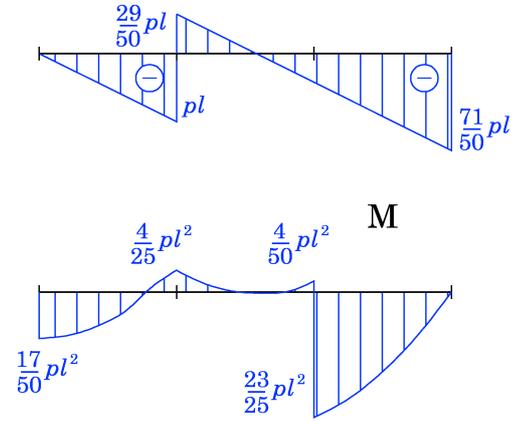
Conseguentemente,

$$X_1 = -\eta_{10} / \eta_{11}, \quad \square \quad X_1 = \frac{56 \frac{EA l^2}{EJ} - 200 \frac{EA \bar{\varepsilon}}{pl} - 384 \frac{EA \alpha t}{pH}}{125 + 160 \frac{EA l^2}{EJ}} pl^2.$$

Assumendo  $EJ = EA l^2$ ;  $\bar{\varepsilon} = (pl/EA)/50$ ;  $\alpha t/H = (p/EA)/60$ , risulta:

$$X_1 = \frac{4}{25} pl^2.$$

I corrispondenti diagrammi del taglio e del momento flettente nella trave AD e nel sistema effettivo sono raffigurati nella figura 6.



**Figura 6**

2) Le equazioni differenziali per i tratti *AB* (tratto 1), *BC* (tratto 2) e *CD* (tratto 3) e le condizioni al bordo che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1):

$$EJv_1^{IV} = p;$$

$$EJv_2^{IV} = p;$$

$$EJv_3^{IV} = p;$$

$$1. v_1^I(0) = 0;$$

$$2. -EJv_1^{III}(0) = 0;$$

$$3. v_1(l) = v_2(0);$$

$$4. v_1^I(l) = v_2^I(0);$$

$$5. v_1^{II}(l) = v_2^{II}(0);$$

$$6. -EJ[v_2^{III}(0) - v_1^{III}(l)] + \frac{4}{5} N_{BE} = 0;$$

$$7. v_2(l) = v_3(0);$$

$$8. v_2^I(l) = v_3^I(0);$$

$$9. v_2^{II}(l) = v_3^{II}(0) + \frac{pl^2}{EJ};$$

$$10. -EJv_2^{III}(l) = -EJv_3^{III}(0);$$

$$11. v_3^{II}(l) = \frac{2\alpha t}{H};$$

$$12. -EJv_3^{III}(l) - \frac{4}{5} N_{DE} = 0.$$

Nelle condizioni al bordo precedenti compaiono gli sforzi  $N_{BE}$  e  $N_{DE}$ , ancora incogniti. Per completare le condizioni al bordo è dunque necessario esprimerli in funzione degli spostamenti trasversali delle sezioni *B* e *D*:

$$N_{BE} = -EA \left[ \frac{12}{25} \frac{v_2(0)}{l} - \bar{\varepsilon} \right]; \quad N_{DE} = -EA \left[ \frac{12}{25} \frac{v_3(l)}{l} + \bar{\varepsilon} \right].$$

3) Le componenti in direzione orizzontale degli spostamenti dei nodi *B* e *D* sono nulle perché impedito dalla condizione di vincolo in *A* e dall'instensibilità della trave *AD*. Le componenti in direzione verticale possono essere determinate invertendo le espressioni precedentemente ottenute per gli sforzi normali nelle aste *BE* e *DE*:

$$v_B = v_2(0) = \frac{25}{12} \left( \bar{\varepsilon} - \frac{N_{BE}^0 + X_1 N_{BE}^1}{EA} \right) l; \quad v_D = v_3(l) = -\frac{25}{12} \left( \bar{\varepsilon} + \frac{N_{DE}^0 + X_1 N_{DE}^1}{EA} \right) l.$$

Per un valore dell'incognita iperstatica pari a:  $X_1 = \frac{4}{25} pl^2$ , con  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{50} \frac{pl}{EA}$ , esse risultano:

$$v_B = \frac{133}{32} \frac{pl^2}{EA}; \quad v_D = \frac{117}{32} \frac{pl^2}{EA}.$$