

Problema. Nel sistema di figura 1 la trave AB è rigida, mentre la trave BC è flessibile. Sulla trave BC agisce un carico distribuito uniforme per unità di lunghezza, d'intensità p . Il sistema è vincolato da due semplici appoggi in B e C e da un letto di molle, agente solo in direzione verticale, che collega la trave AB al suolo.

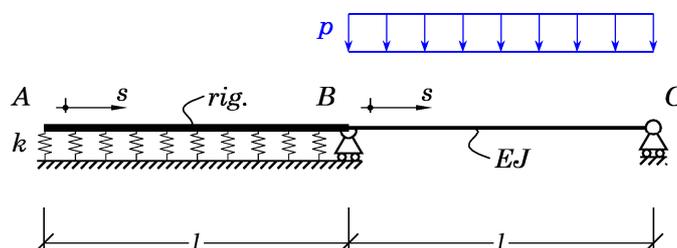


Figura 1

1) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per il tratto BC che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1)

$$EJv^{IV} = p;$$

$$1. v(0) = 0; \quad 2. v(l) = 0; \quad 3. -EJv''(l) = 0; \quad 4. -EJv''(0) + \frac{kl^3}{3}v'(0) = 0.$$

Integrando l'equazione differenziale, si ottiene la ben nota espressione per gli spostamenti trasversali della trave flessibile, soggetta ad un carico distribuito uniforme per unità di lunghezza:

$$v(s) = \frac{p}{EJ} \frac{s^4}{24} + C_1 \frac{s^3}{6} + C_2 \frac{s^2}{2} + C_3 s + C_4.$$

Sostituendo questa espressione in quelle delle condizioni al bordo, si ottiene il seguente sistema algebrico (in forma matriciale), la cui soluzione fornisce il valore delle costanti d'integrazione nel caso in esame:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{l^3}{6} & \frac{l^2}{2} & l & 0 \\ l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -EJ & \frac{kl^3}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{l^4}{24} \frac{p}{EJ} \\ -\frac{l^2}{2} \frac{p}{EJ} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Semplici operazioni algebriche consentono di semplificare il sistema e di ridursi ad analizzare un sistema di due equazioni in due incognite. Ad ogni modo, anche nella sua forma completa, un algoritmo risolutivo basato sulla regola di Cramer conduce rapidamente alle seguenti espressioni per le costanti di integrazione:

$$C_1 = -\frac{pl}{2EJ} \left[1 + \frac{5}{4} \frac{kl^4}{9EJ} \right] \Bigg/ \left[1 + \frac{kl^4}{9EJ} \right]; \quad C_2 = \frac{pl^2}{8EJ} \left\{ \frac{kl^4}{9EJ} \Bigg/ \left[1 + \frac{kl^4}{9EJ} \right] \right\}; \quad C_3 = \frac{pl^3}{24EJ} \Bigg/ \left[1 + \frac{kl^4}{9EJ} \right]; \quad C_4 = 0.$$

L'introduzione della semplificazione $kl^4/EJ = 9$, conduce infine alle espressioni fornite nel testo dell'esercizio:

$$C_1 = -\frac{9}{16} \frac{pl}{EJ}; \quad C_2 = \frac{1}{16} \frac{pl^2}{EJ}; \quad C_3 = \frac{1}{48} \frac{pl^3}{EJ}; \quad C_4 = 0.$$

Per derivazione, è possibile determinare sia l'espressione della rotazione della sezione trasversale, sia quelle delle caratteristiche della sollecitazione (taglio e momento flettente) nella trave BC . Le reazioni esterne del sistema possono essere determinate osservando che $Y_c = EJv'''(l)$, mentre il carico distribuito applicato dal letto di molle è determinabile facilmente osservando che è proporzionale allo spostamento trasversale, a sua volta proporzionale alla rotazione in B della trave rigida AB , $v'(0)$.

Le reazioni vincolari esterne per il sistema sono rappresentate in figura 2.

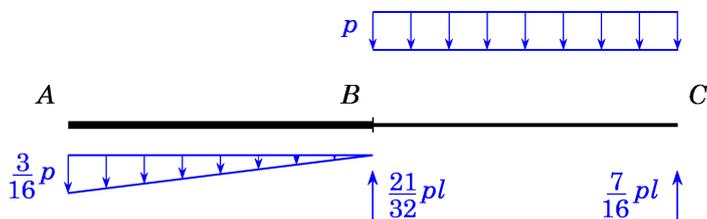


Figura 2

Le CdS nei vari tratti nel sistema effettivo sono raccolte nella tabella seguente, nella quale si è posto, per semplicità. $\xi = s/l \in (0, 1)$.

	N	T	M
AB	0	$-\frac{3}{32} pl(2-\xi)\xi$	$-\frac{pl^2}{32}(3-\xi)\xi^2$
BC	0	$-pl\left(\xi - \frac{9}{16}\right)$	$-\frac{pl^2}{16}(8\xi^2 - 9\xi + 1)$

L'andamento delle CdS è raffigurato nella figura 3.

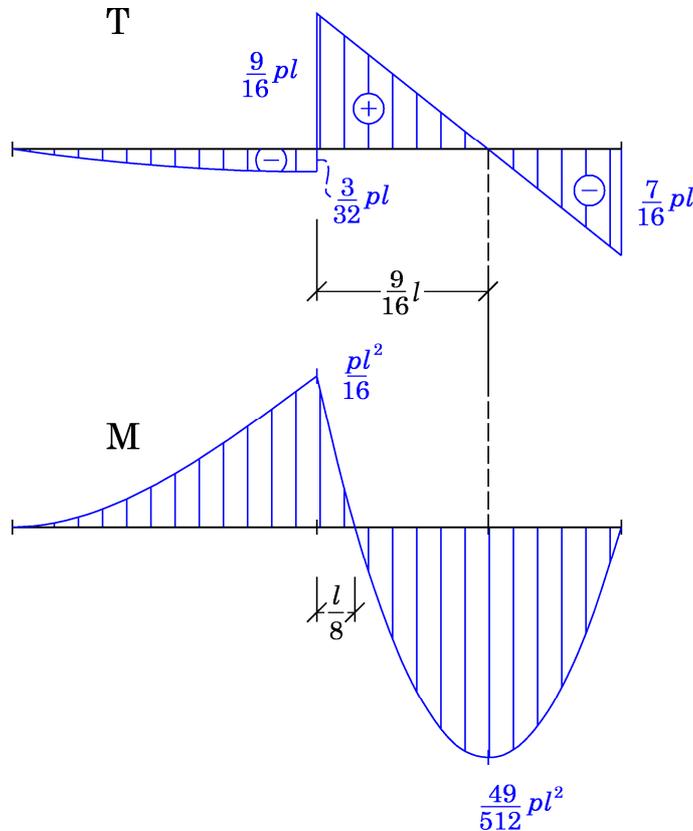


Figura 3

2) Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore della reazione esercitata dall'appoggio in C. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig.4):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)},$$

con: $v_C = 0$.

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$. I due sistemi di forze esterne sono rappresentati nelle figure 5 e 6.

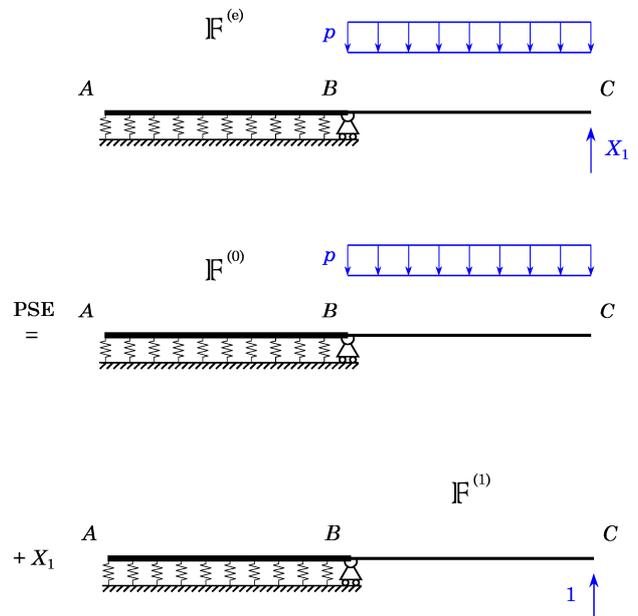


Figura 4

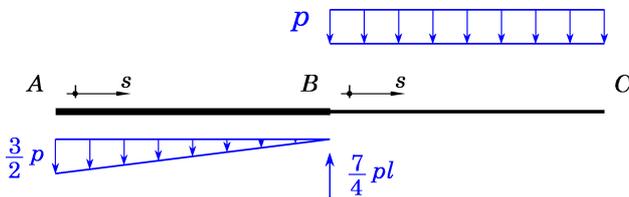


Figura 5: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

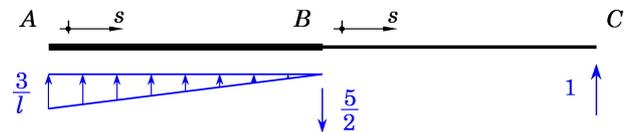


Figura 6: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale, $\xi = s/l \in (0, 1)$, nei versi indicati nelle figure 5 e 6.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	0	$-\frac{3}{4} pl(2-\xi)\xi$	$-\frac{pl^2}{4}(3-\xi)\xi^2$	0	$\frac{3}{2}(2-\xi)\xi$	$\frac{l}{2}(3-\xi)\xi^2$
BC	0	$pl(1-\xi)$	$-\frac{pl^2}{2}(1-\xi)^2$	0	-1	$l(1-\xi)$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 7.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = 0; \quad \eta_{10} = -\frac{3p}{2k} - \frac{1}{8} \frac{pl^4}{EJ};$$

$$\eta_{11} = \frac{3}{kl} + \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{3 + \frac{1}{4} \frac{kl^4}{EJ} \frac{pl}{2}}{3 + \frac{1}{3} \frac{kl^4}{EJ}} \xrightarrow{\frac{kl^4}{EJ}=9} \frac{7}{16} pl.$$

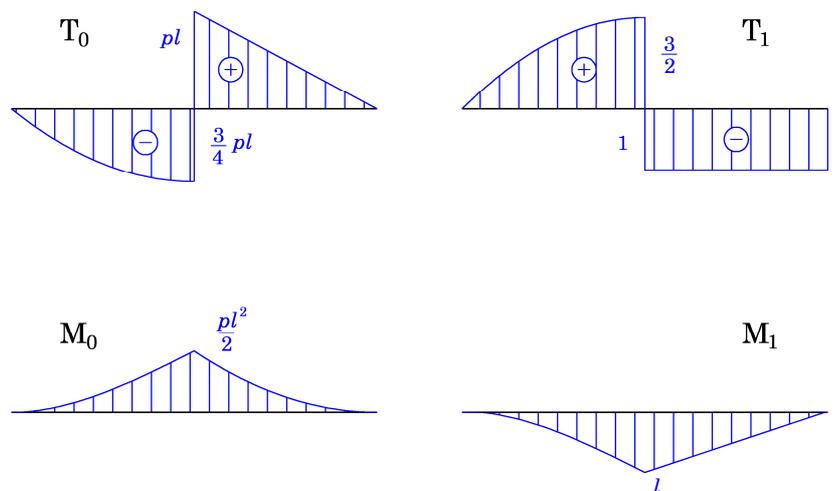


Figura 7