

Sintesi della soluzione della prova scritta del 16 gennaio 2016

**Problema.** Nel sistema di figura 1 la trave  $AD$  è rigida, le travi  $BC$  e  $CD$  sono flessibili ma inestensibili, mentre  $AB$  è estensibile. Sulla trave  $BC$  agisce un carico distribuito uniforme per unità di lunghezza, di intensità  $p$ . Inoltre, l'asta  $AB$  presenta il difetto di lunghezza indicato in figura e l'appoggio elastico in  $A$  subisce un cedimento anelastico di intensità  $\bar{\delta}$ .

1) Il sistema è una volta staticamente non determinato. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica  $X_1$  il valore dello sforzo normale nell'asta reticolare  $AB$ . Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 2):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)},$$

$$\text{con: } w_B - w_A = \sqrt{2}l \left( \frac{X_1}{EA} - \bar{\varepsilon} \right),$$

dove  $w_A$  e  $w_B$  sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da  $A$  verso  $B$ , delle sezioni  $A$  e  $B$  dell'asta  $AB$ .

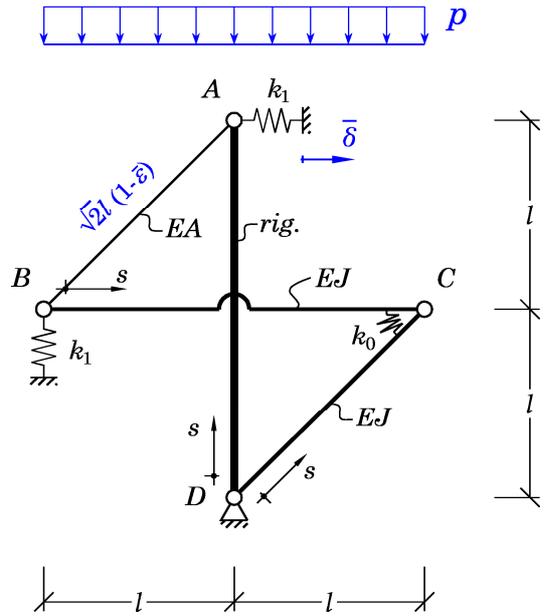


Figura 1

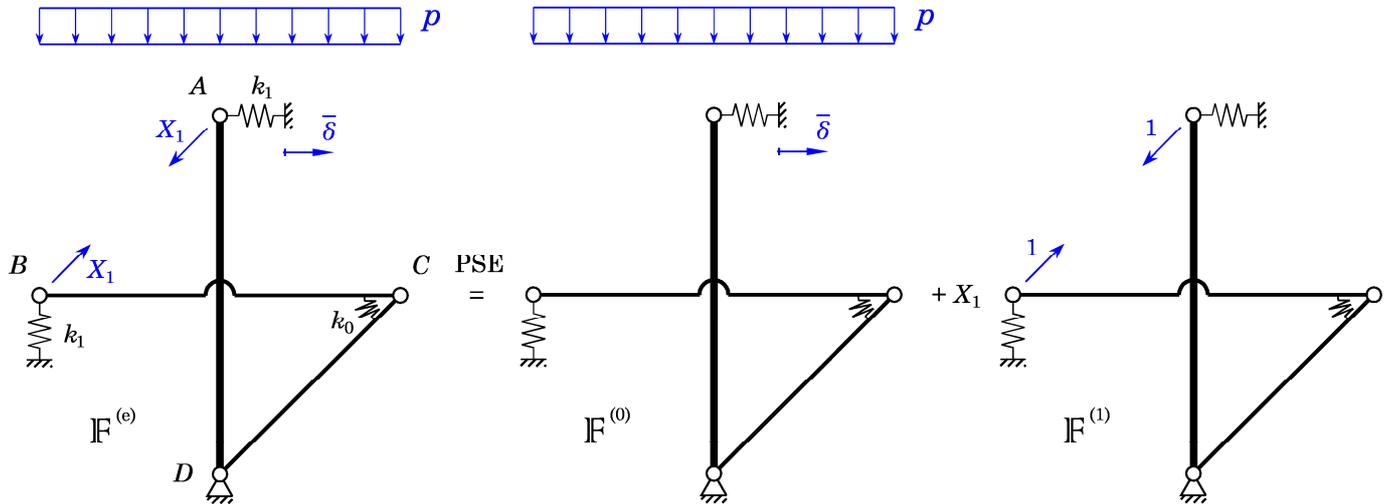


Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi  $\mathbf{F}^{(0)}$  e  $\mathbf{F}^{(1)}$ . I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

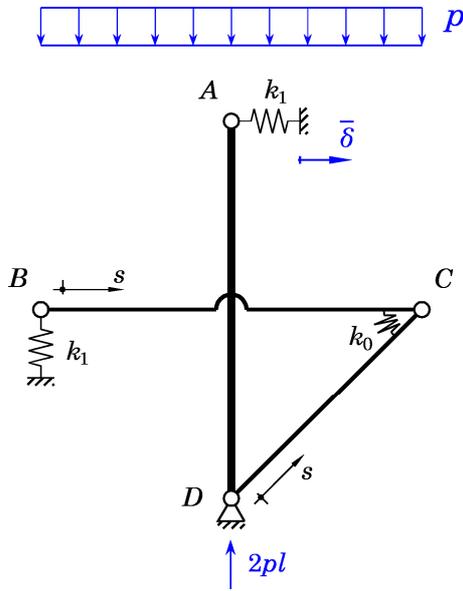


Figura 3: Sistema  $F^{(0)}$ .

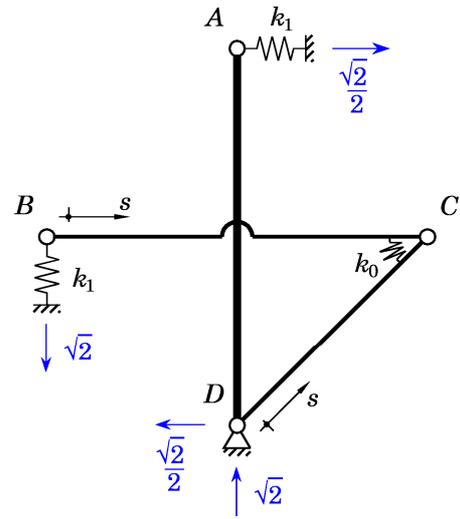


Figura 4: Sistema  $F^{(1)}$ .

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi  $F^{(0)}$  e  $F^{(1)}$  sono raccolte nella tabella seguente, nella quale,  $s \in (0, 2l)$  per  $BC$  e  $s \in (0, l\sqrt{2})$  per  $CD$ , nei versi indicati nelle figure 3 e 4.

	$N_0$	$T_0$	$M_0$	$N_1$	$T_1$	$M_1$
$AD$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0
$BC$	0	$-ps$	$-\frac{ps^2}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}s$
$CD$	$-\sqrt{2}pl$	$\sqrt{2}pl$	$\sqrt{2}pls$	0	1	$s$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 5.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -\sqrt{2}l \left( \frac{X_1}{EA} - \bar{\varepsilon} \right); \quad \eta_{10} = 2\sqrt{2} \frac{pl^3}{k_0} + \left( \sqrt{2} + \frac{4}{3} \right) \frac{pl^4}{EJ} - \frac{\sqrt{2}}{2} \delta; \quad \eta_{11} = \frac{5}{2k_1} + \frac{2l^2}{k_0} + \frac{2}{3} (2 + \sqrt{2}) \frac{l^3}{EJ}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}l \bar{\varepsilon} - \eta_{10}}{\eta_{11} + \frac{\sqrt{2}l}{EA}}; \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{\sqrt{2}l \bar{\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2} \delta - \left[ 2\sqrt{2} \frac{l^2}{k_0} + \left( \sqrt{2} + \frac{4}{3} \right) \frac{l^3}{EJ} \right] pl}{\frac{5}{2k_1} + \frac{2l^2}{k_0} + \frac{2}{3} (2 + \sqrt{2}) \frac{l^3}{EJ} + \frac{\sqrt{2}l}{EA}}.$$

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti  $BC$  (tratto 1),  $CD$  (tratto 2) e  $AD$  (tratto 3) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1):

$$EJv_1^{IV} = p; \quad EJv_2^{IV} = 0; \quad v_3^{II} = 0;$$

1.  $v_2(0) = 0;$
2.  $v_3(0) = 0;$
3.  $-EJv_2^{II}(0) = 0;$
4.  $-EJv_1^{II}(2l) = k_0 [v_1^I(2l) - v_2^I(\sqrt{2}l)];$
5.  $-EJ [v_1^{II}(2l) + v_2^{II}(\sqrt{2}l)] = 0;$
6.  $v_1(2l) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2(\sqrt{2}l);$
7.  $-EJv_1^{II}(0) = 0;$
8.  $-EJv_1^{III}(0) - k_1 v_1(0) - \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = 0;$
9.  $k_1 [v_3(2l) - \delta] + \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = 0;$
10.  $-EJv_2^{III}(\sqrt{2}l) = \frac{1}{\sqrt{2}} EJv_1^{III}(2l) + \frac{N_{AB}}{2}.$

Le precedenti condizioni al bordo sono completate esprimendo lo sforzo  $N_{AB}$  in funzione delle componenti orizzontali e verticali degli spostamenti dei nodi  $A$  e  $B$ .

$$N_{AB} = EA \left[ \bar{\epsilon} + \frac{v_1(0) + v_3(2l)}{2l} - \frac{v_2(\sqrt{2}l)}{2\sqrt{2}l} \right].$$

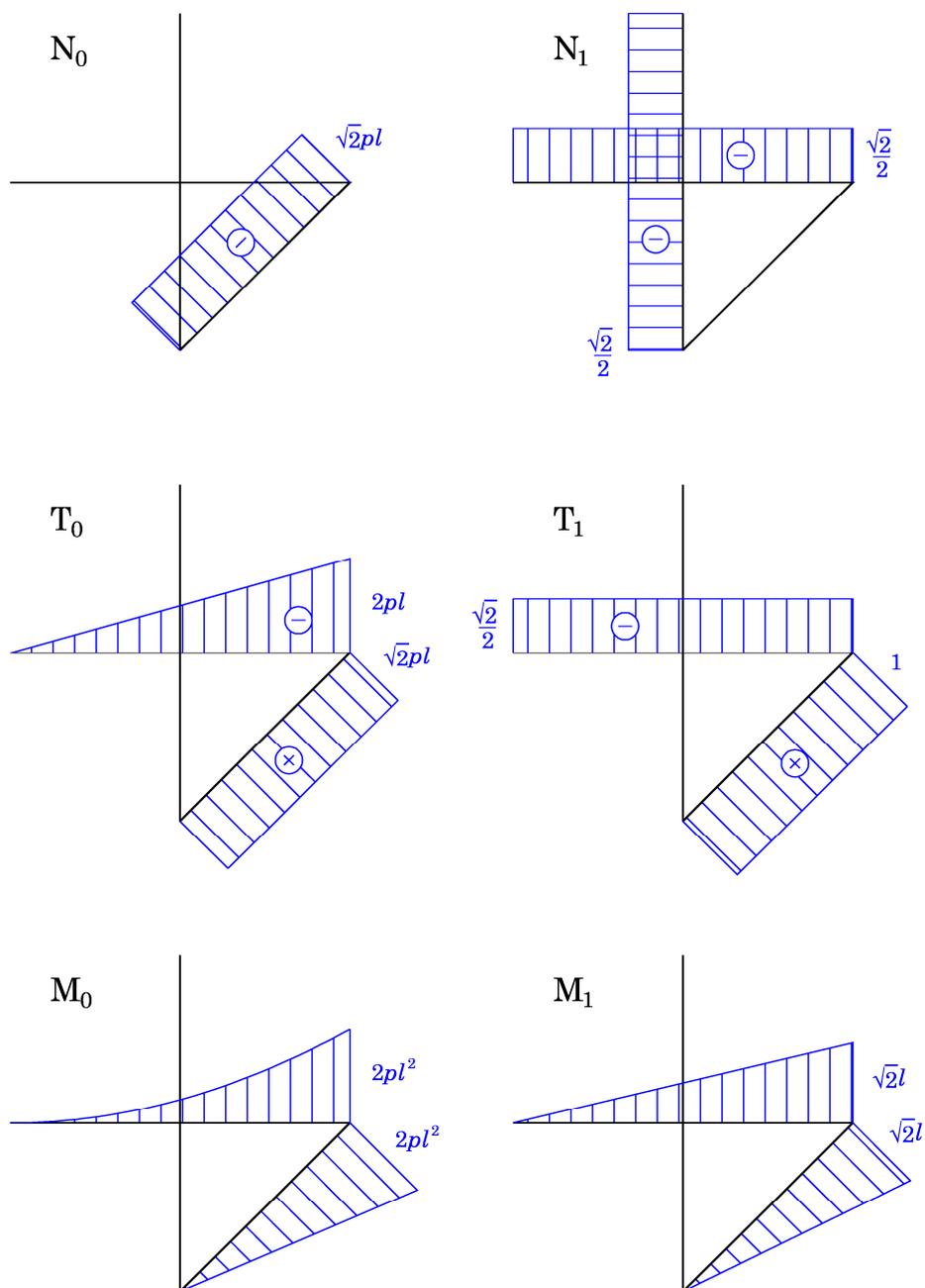


Figura 5