

Sintesi della soluzione della prova scritta del 20 giugno 2015

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi AB e CD sono rigide, la trave BC è flessibile ma inestensibile, mentre le altre sono solo estensibili. Le travi AB, BC e CD sono soggette alle variazioni termiche lineari nello spessore H delle travi, indicate in figura, mentre la trave DE presenta il difetto di lunghezza indicato in figura. Infine, la cerniera in F subisce un cedimento δ verso il basso.

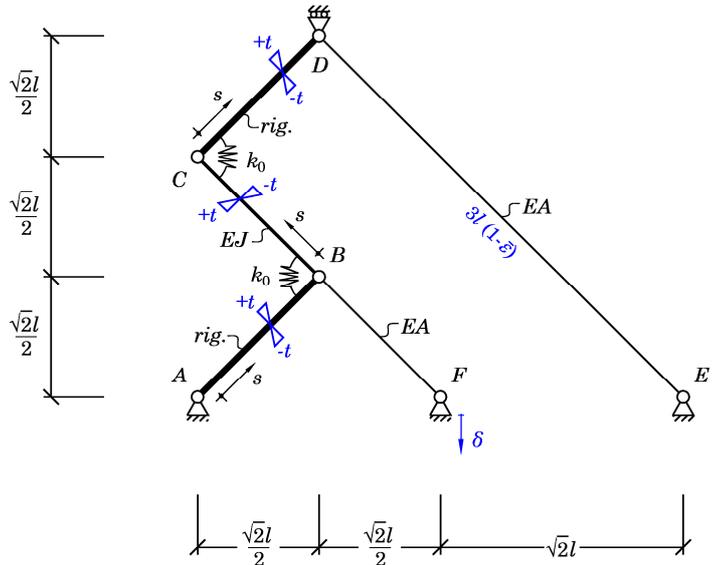


Figura 1

1) Il sistema è due volte staticamente non determinato. Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si scelgono come incognita iperstatica X_1 il valore della reazione esercitata dall'appoggio in D e come incognita iperstatica X_2 il valore della coppia esercitata dalla molla in C. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (fig. 2):

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1 \mathbf{F}^{(1)} + X_2 \mathbf{F}^{(2)},$$

con: $v_D = 0$ e $\varphi_C^+ - \varphi_C^- = -\frac{X_2}{k_0}$,

dove v_D è la componente verticale dello spostamento del nodo D e φ_C^+ e φ_C^- sono le rotazioni, positive se orarie, delle sezioni C appartenenti rispettivamente alle travi CD e BC.

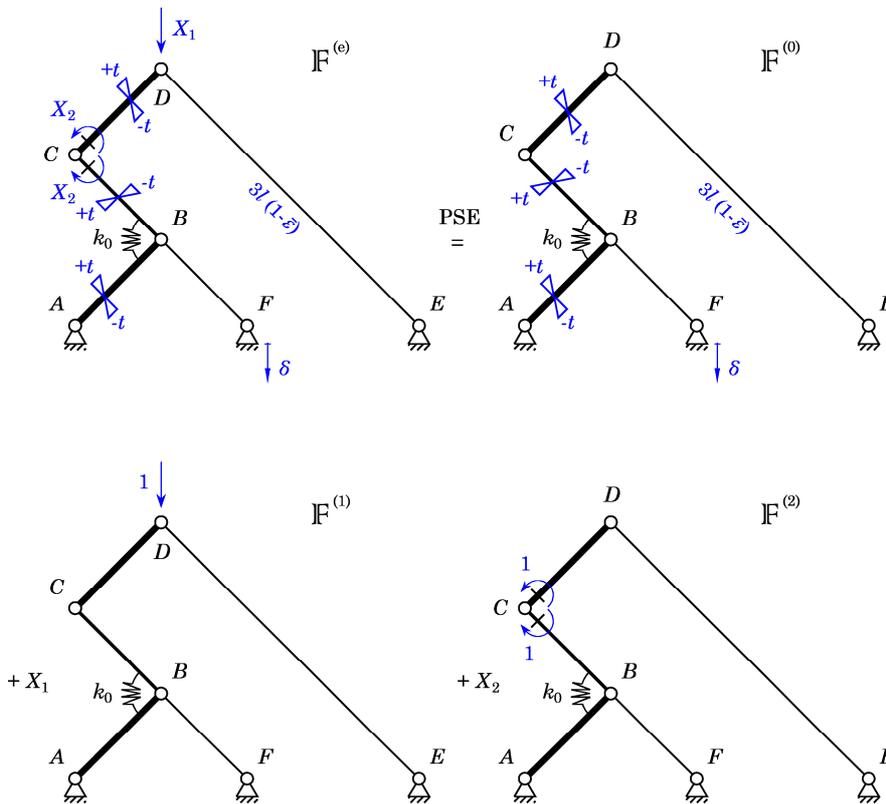


Figura 2

Il sistema $\mathbf{F}^{(0)}$, essendo staticamente determinato e non essendo soggetto a nessun carico esterno, presenta reazioni vincolari esterne e interne nulle, al pari delle caratteristiche della sollecitazione. Il difetto di lunghezza presente nell'asta DE , il cedimento della cerniera in F e le variazioni termiche cui sono soggette le travi AB , BC e CD generano infatti deformazioni della struttura, ma non sollecitazioni della stessa. Considerazioni di equilibrio consentono poi di determinare facilmente le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$. I tre sistemi sono rappresentati nelle figure 3, 4 e 5.

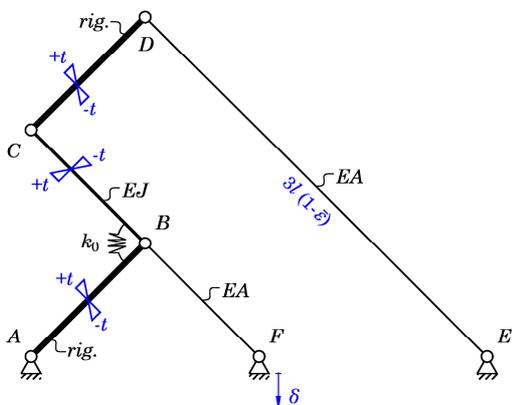


Figura 3: Sistema $\mathbf{F}^{(0)}$.

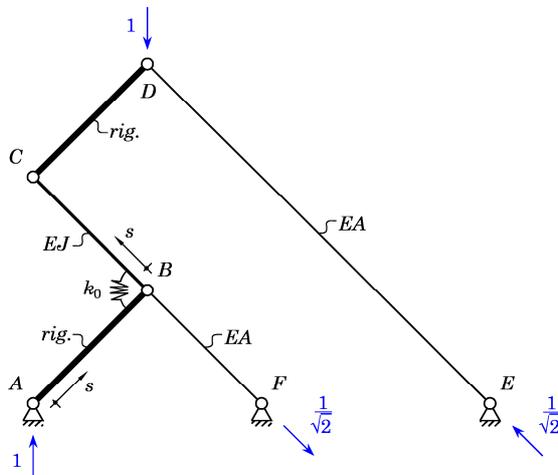


Figura 4: Sistema $\mathbf{F}^{(1)}$.

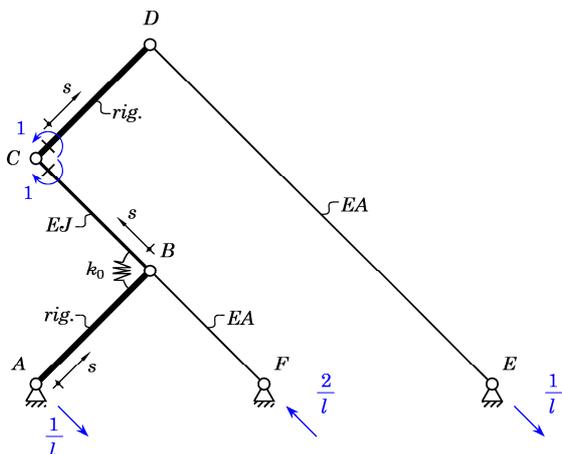


Figura 5: Sistema $\mathbf{F}^{(2)}$.

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale, per ogni tratto, $s \in (0, l)$.

	N_1	T_1	M_1	N_2	T_2	M_2
AB	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{s}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{l}$	$-\frac{s}{l}$
BC	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(l-s)$	$-\frac{1}{l}$	0	-1
CD	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$\frac{1}{l}$	$-1 + \frac{s}{l}$
BF	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$-\frac{2}{l}$	0	0
DE	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{l}$	0	0

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati nella figura 6.

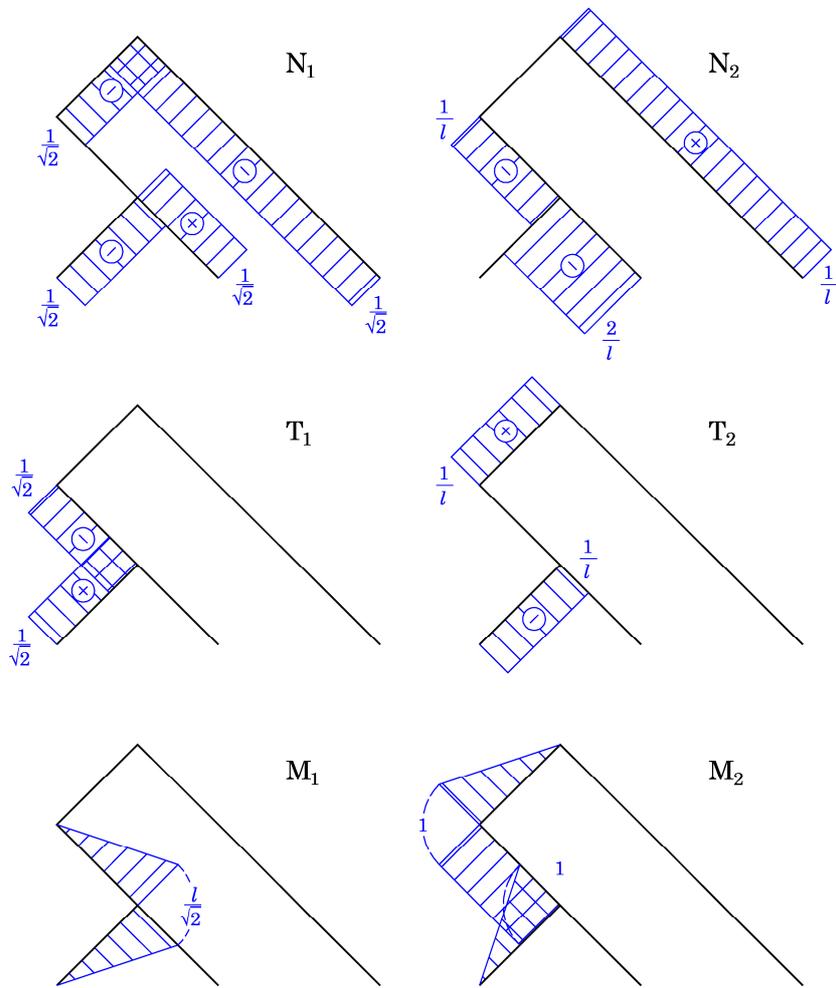


Figura 6

Il sistema costituito dalle equazioni di elasticità di Müller-Breslau è il seguente:

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11}X_1 + \eta_{12}X_2 \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21}X_1 + \eta_{22}X_2 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \eta_1 = 0 \quad \text{e} \quad \eta_2 = -X_2/k_0,$$

mentre gli altri coefficienti, calcolati attraverso opportune applicazioni del teorema dei lavori virtuali, sono:

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= \frac{3}{2}\sqrt{2}\bar{\varepsilon}l - \sqrt{2}\frac{\alpha tl^2}{H} - \frac{1}{2}\delta; & \eta_{11} &= 2\frac{l}{EA} + \frac{1}{6}\frac{l^3}{EJ} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{k_0}; & \eta_{12} &= -\frac{5}{2}\sqrt{2}\frac{1}{EA} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{l^2}{EJ} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{k_0}; \\ \eta_{20} &= -3\bar{\varepsilon} + 4\frac{\alpha tl}{H} + \sqrt{2}\frac{\delta}{l}; & \eta_{21} &= \eta_{12}; & \eta_{22} &= 7\frac{1}{lEA} + \frac{l}{EJ} + \frac{1}{k_0}. \end{aligned}$$

Il valore delle incognite iperstatiche può infine essere calcolato risolvendo il sistema algebrico precedente, ad esempio attraverso la regola di Cramer.

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (*tratto 1*), *BC* (*tratto 2*) e *CD* (*tratto 3*) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1):

$$\begin{aligned} v_1'' &= \frac{2\alpha t}{H}; & EJv_2^{IV} &= 0; & v_3'' &= \frac{2\alpha t}{H}; \\ 1. \quad v_1(0) &= 0; & 2. \quad v_2(0) &= 0; & 3. \quad v_3(0) &= v_1(l); & 4. \quad v_2(l) &= v_3(l); \\ 5. \quad -EJ \left[v_2''(0) - \frac{2\alpha t}{H} \right] &= k_0 [v_1^I(l) - v_2^I(0)]; & 6. \quad -EJ \left[v_2''(l) - \frac{2\alpha t}{H} \right] &= k_0 [v_2^I(l) - v_3^I(0)]; \\ 7. \quad -EJ \left[v_2''(0) - \frac{2\alpha t}{H} \right] + N_{DE}l &= 0; & 8. \quad -EJ \left[v_2''(l) - \frac{2\alpha t}{H} \right] + N_{DE}l + Y_D \frac{l}{\sqrt{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Nella relazioni precedenti N_{BF} , N_{DE} e Y_D hanno le seguenti espressioni in funzione degli spostamenti delle sezioni di estremità delle aste *BF* e *DE*:

$$N_{BF} = EA \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\delta}{l} - \frac{v_1(l)}{l} \right]; \quad N_{DE} = EA \left[\bar{\varepsilon} - \frac{v_3(l)}{3l} \right]; \quad Y_D = -\sqrt{2} (N_{BF} + 2N_{DE}).$$