Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 28 febbraio 2015 – Parte I

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi *BE* e *CF* sono *estensibili*, mentre le altre sono *flessibili* ma *inestensibili*. Sulle travi *AB*, *BC*, *EF* e *FG* agisce un carico distribuito assiale uniforme, di intensità *q*, inoltre le travi *AB* e *FG* sono soggette alle variazioni termiche lineari nello spessore *H* della trave, indicate in figura. Infine, le aste reticolari *BE* e *CF* sono soggette alle variazioni termiche costanti nello spessore della trave indicate in figura.

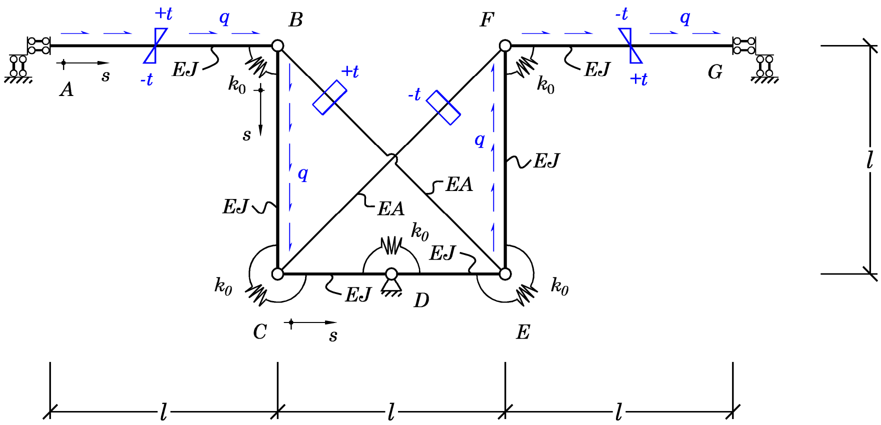

Figura 1

1) Il sistema è 3 volte cinematicamente iperdeterminato, ma considerazioni di antisimmetria consentono di risolvere il problema mediante il metodo delle forze ricorrendo ad un'unica incognita iperstatica. A tale scopo, si sceglie come X_1 il valore dello sforzo normale nell'asta *BE* (uguale ed opposto a quello nell'asta *CF*). Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (figura 2):

$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$,

con:

$$w_E - w_B = \left(\frac{X_1}{EA} + \alpha t\right) l\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad w_F - w_C = -\left(\frac{X_1}{EA} + \alpha t\right) l\sqrt{2}\,,$$

dove w_E e w_B sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da *B* verso *E*, delle sezioni *B* ed *E* della trave *BE* e w_F e w_C sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da *C* verso *F*, delle sezioni *C* ed *F* della trave *CF*.

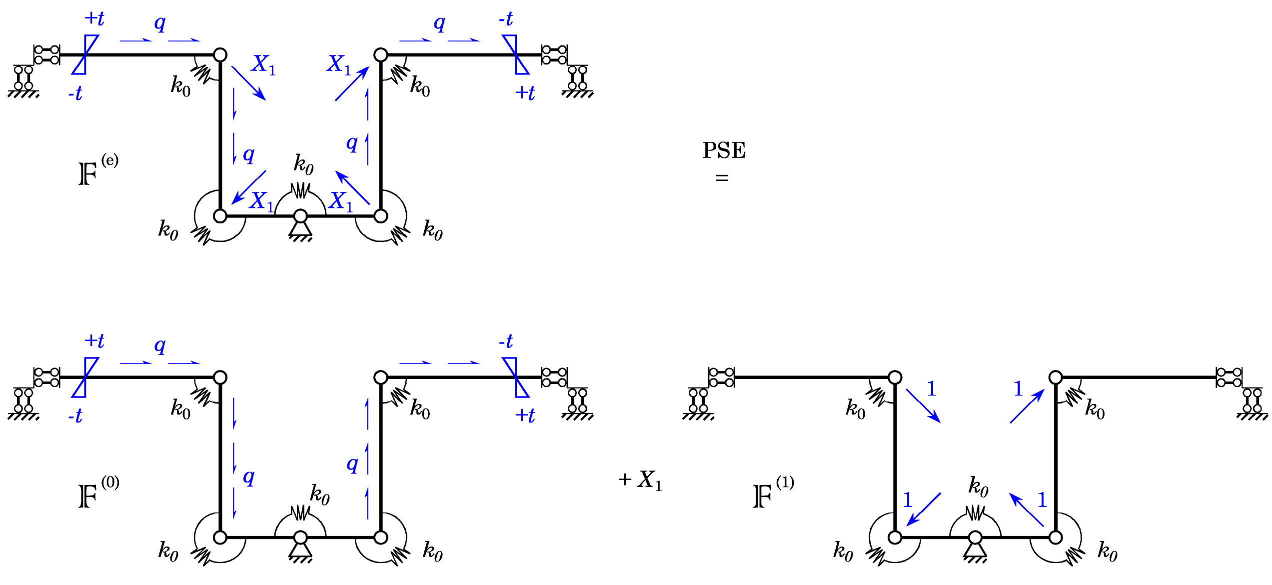

Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni vincolari esterne per il sistema $\mathbf{F}^{(0)}$, mentre per il sistema $\mathbf{F}^{(1)}$ queste ultime sono nulle. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

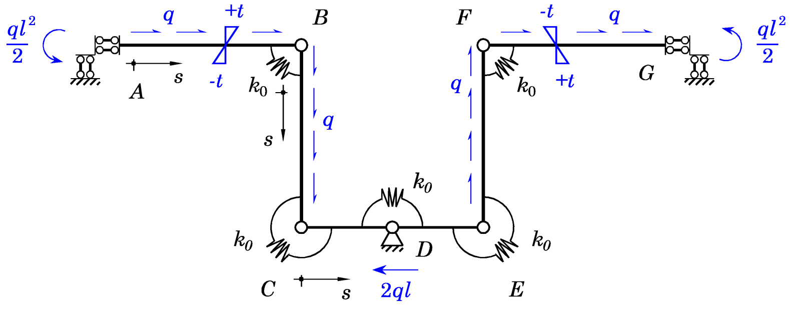

Figura 3

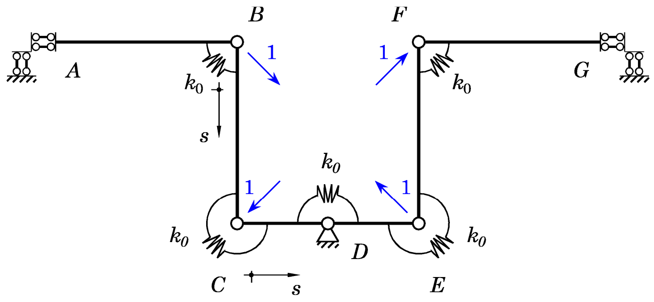

Figura 4

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$ per *AB* e *BC* e $s \in (0,\ l/2)$ per *CD*.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-qs$	0	$-\dfrac{ql^2}{2}$	0	0	0
BC	$-qs$	ql	$ql\left(s-\dfrac{l}{2}\right)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
CD	$-ql$	$-ql$	$ql\left(\dfrac{l}{2}-s\right)$	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\left(\dfrac{l}{2}-s\right)$

Considerazioni di antisimmetria (figura 5) consentono di descrivere le CdS nelle travi *DE*, *EF* e *FG* in funzione di quelle fornite nella tabella precedente:

$$N_{DE}(s) = -N_{CD}(s); \qquad T_{DE}(s) = T_{CD}(s); \qquad M_{DE}(s) = M_{CD}(s)$$

$$N_{EF}(s) = -N_{BC}(s); \qquad T_{EF}(s) = T_{BC}(s); \qquad M_{EF}(s) = M_{BC}(s)$$

$$N_{FG}(s) = -N_{AB}(s); \qquad T_{FG}(s) = T_{AB}(s); \qquad M_{FG}(s) = M_{AB}(s)$$

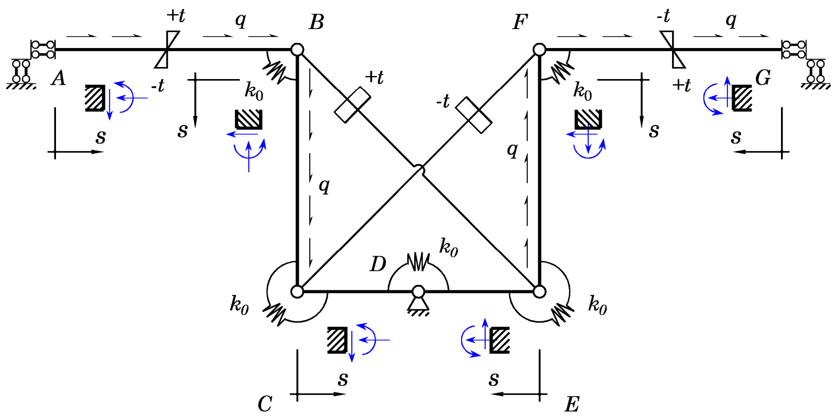

Figura 5

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati in figura 6.

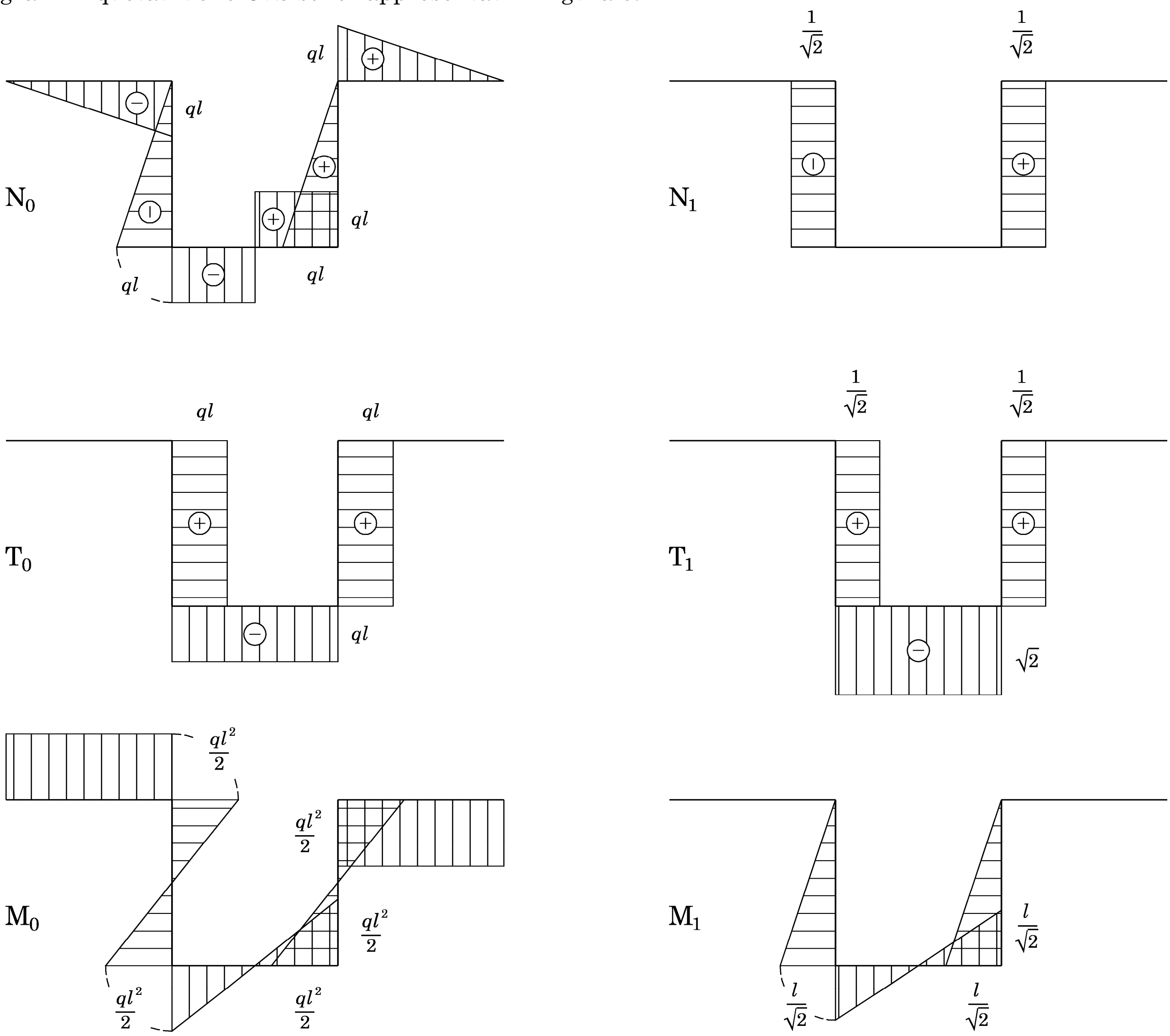

Figura 6

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -2l\sqrt{2}\left(\frac{X_1}{EA} + \alpha t\right);$$

$$1\cdot\eta_{10} - 2M^B_{m,1}\frac{M^B_{m,0}}{k_0} - 2M^C_{m,1}\frac{M^C_{m,0}}{k_0} - M^D_{m,1}\frac{M^D_{m,0}}{k_0} = 2\int_{BC} M_1\frac{M_0}{EJ}\,\mathrm{d}s\,; \qquad \rightarrow \qquad \eta_{10} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{ql^4}{EJ} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{ql^3}{k_0}\,;$$

$$1\cdot\eta_{11} - 2\frac{\left(M^B_{m,1}\right)^2}{k_0} - 2\frac{\left(M^C_{m,1}\right)^2}{k_0} - \frac{\left(M^D_{m,0}\right)^2}{k_0} = 2\int_{BC,CD}\frac{M_1^2}{EJ}\,\mathrm{d}s\,; \qquad \rightarrow \qquad \eta_{11} = \frac{1}{2}\frac{l^3}{EJ} + \frac{l^2}{k_0}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = -\frac{2\sqrt{2}\alpha t l + \eta_{10}}{2\sqrt{2}\,\frac{l}{EA} + \eta_{11}}\,; \qquad \rightarrow \qquad X_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \frac{EAl^2}{2EJ} + \frac{EAl}{k_0}}EA\alpha t - \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{EA\,l^2}{EJ} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{EAl}{k_0}}{2\sqrt{2} + \frac{EAl^2}{2EJ} + \frac{EAl}{k_0}}ql\,.$$

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (*tratto 1*), *BC* (*tratto 2*) e *CD* (*tratto 3*) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (figura 1):

$EJv_i^{IV}=0$, per $i=1,2,3$;

1. $v_3(l/2)=0$;
2. $v_2(l)=0$;
3. $v_1(l)=v_3(0)$;
4. $v_1^{I}(0)=0$;
5. $-EJ\left[v_1^{II}(0)-\frac{2\alpha t}{H}\right]=-\frac{ql^2}{2}$;
6. $-EJ\left[v_1^{II}(l)-\frac{2\alpha t}{H}\right]=-EJv_2^{II}(0)$;
7. $-EJv_2^{II}(0)=k_0\left[v_1^{I}(l)-v_2^{I}(0)\right]$;
8. $-EJv_2^{II}(l)=-EJv_3^{II}(0)$;
9. $-EJv_3^{II}(0)=k_0\left[v_2^{I}(l)-v_3^{I}(0)\right]$;
10. $-EJv_1^{III}(0)=0$;
11. $-EJv_2^{III}(0)=ql+\frac{1}{\sqrt{2}}N_{BE}$, (fig. 7);
12. $-EJv_3^{III}(0)=-ql-\sqrt{2}N_{BE}$, (fig. 7).

Avendo espresso la curvatura della trave *AB* come:

$$-v_1^{II}(s)=\frac{M_1(s)}{EJ}-\frac{2\alpha t}{H},$$

ed avendo determinato gli sforzi nelle aste estensibili in funzione degli spostamenti trasversali delle sezioni *B* e C come (figura 8):

$$N_{BE}=\frac{EA}{2l}\left[v_2(0)-2v_1(l)-2\alpha t l\right]; \qquad N_{CF}=-N_{BE}.$$

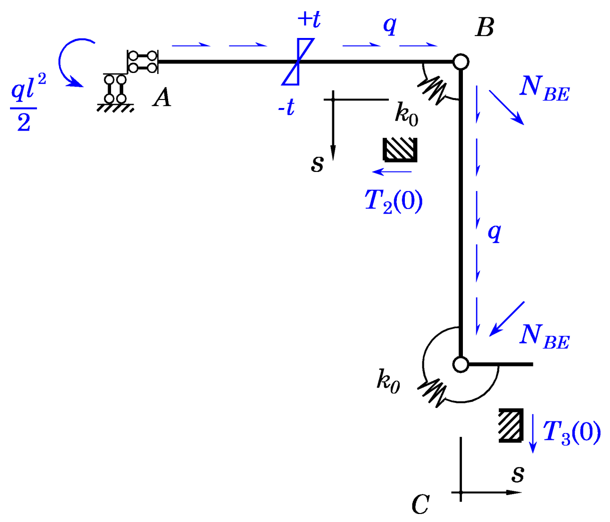

Figura 7

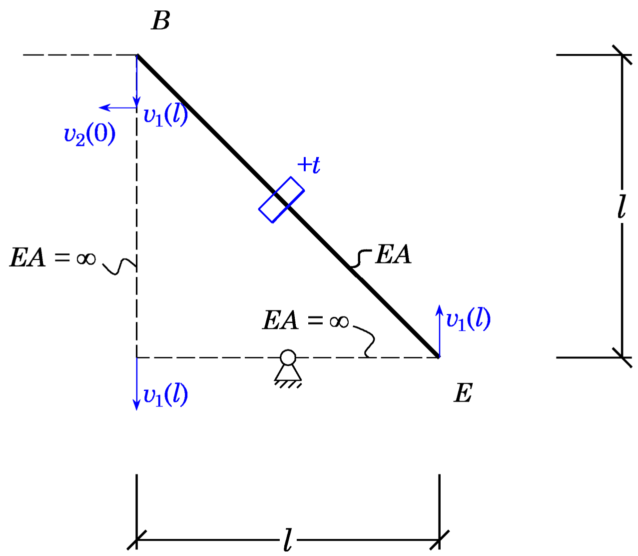

Figura 8

Gli spostamenti delle travi *DE* (*tratto 4*), *EF* (*tratto 5*) e *FG* (*tratto 6*) possono essere dedotti attraverso considerazioni di antisimmetria come (figura 5):

$v_6(s)=v_1(s)$; $\qquad v_5(s)=v_2(s)$; $\qquad v_4(s)=v_3(s)$.

3) Il sistema risulta 3 volte cinematicamente iperdeterminato, infatti la matrice cinematica $\mathbb{C}$ è una matrice 12×9, di rango 9.

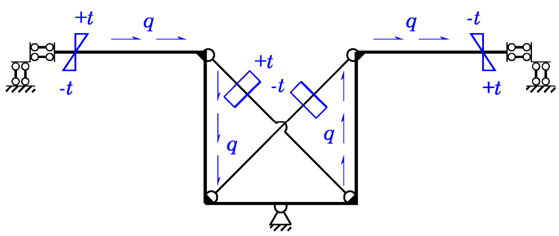

Figura 9

N.B. Si ricorda che la presente prova scritta può essere utilizzata per le successive prove (quella scritta, relativa alla parte II, e quella orale) entro 60 giorni dalla data della prova stessa.

4 marzo 2015.