Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 7 febbraio 2015 – Parte I

Problema. Nel sistema di figura le travi AC ed AE sono *flessibili* ma *inestensibili*, mentre BE e CD sono *estensibili*. Sulla trave AC agisce un carico distribuito trasversale uniforme, di intensità p, mentre le aste BE e CD sono soggette alle variazioni termiche costanti nello spessore della trave indicate in figura.

1) Nella soluzione con il metodo delle forze si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore dello sforzo normale dell'asta BE. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (figura 2): $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$,

con $w_E - w_B = \left(\dfrac{X_1}{EA} + \alpha t\right) l\sqrt{2}$, dove w_E e w_B sono gli spostamenti assiali, positivi nella direzione da B verso E delle sezioni B ed E della trave BE.

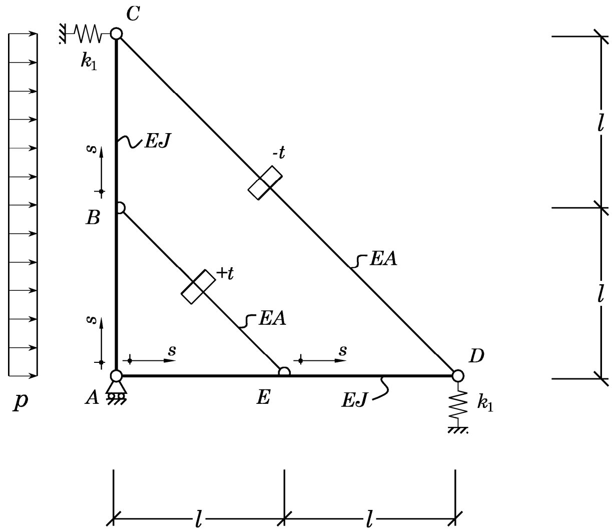

Figura 1

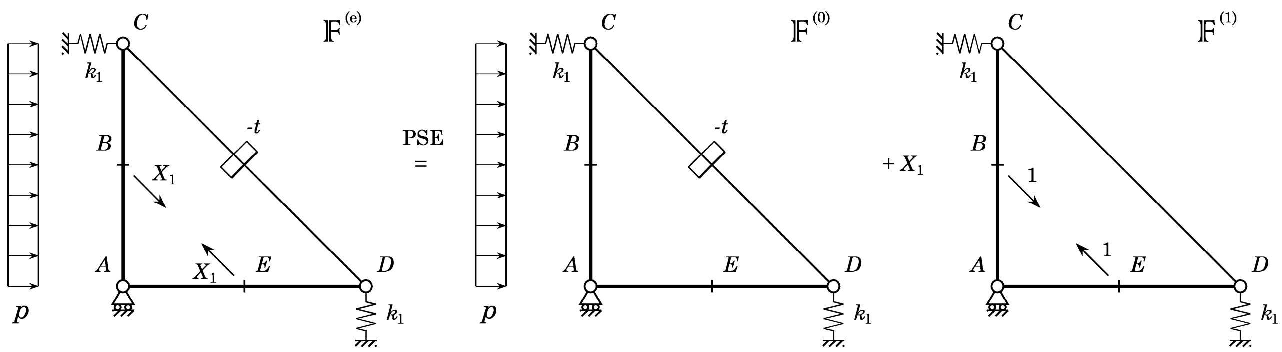

Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni vincolari esterne per il sistema $\mathbf{F}^{(0)}$, mentre per il sistema $\mathbf{F}^{(1)}$ queste ultime sono nulle. I due sistemi sono rappresentati nelle figure 3 e 4.

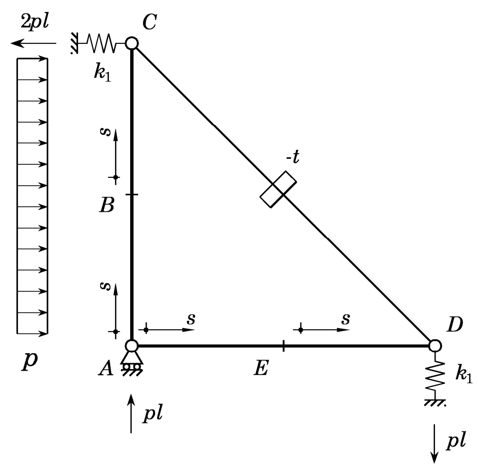

Figura 3

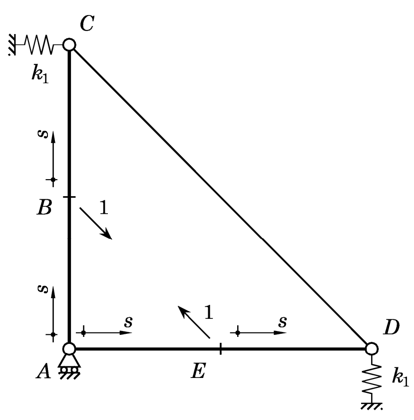

Figura 4

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1
AB	$-pl$	$p(l-s)$	$ps\left(l-\dfrac{s}{2}\right)$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}s$
BC	$-pl$	$-ps$	$\dfrac{p}{2}\left(l^2-s^2\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}(l-s)$
CD	$\sqrt{2}pl$	0	0	$-\dfrac{1}{2}$	0	0
AE	$-pl$	0	0	$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}s$
ED	$-pl$	0	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(l-s)$

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati in figura 5.

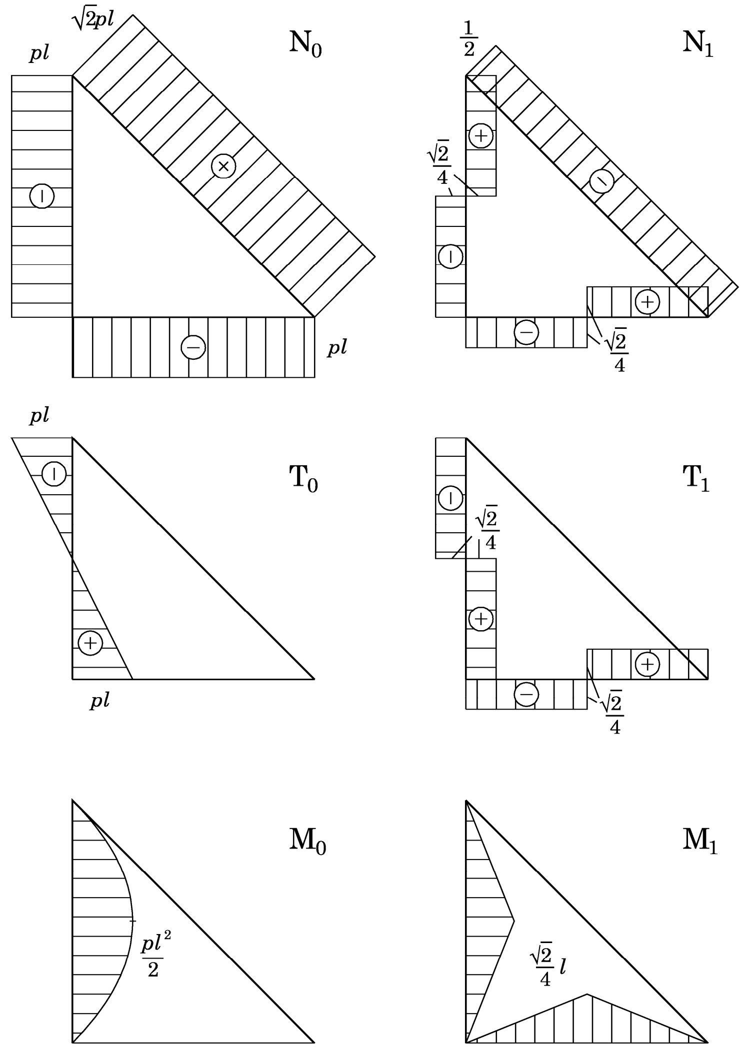

Figura 5

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = -\left(\frac{X_1}{EA} + \alpha t\right) l\sqrt{2}\ ; \qquad \eta_{10} = \frac{5\sqrt{2}}{48}\frac{pl^4}{EJ} - 2\frac{pl^2}{EA} + \sqrt{2}\alpha t l\ ; \qquad \eta_{11} = \frac{1}{6}\frac{l^3}{EJ} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{EA}.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{2\dfrac{pl^2}{EA} - \dfrac{5\sqrt{2}}{48}\dfrac{pl^4}{EJ} - 2\sqrt{2}\alpha t l}{\dfrac{1}{6}\dfrac{l^3}{EJ} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{l}{EA}}.$$

Assumendo che la rigidezza estensionale delle aste *BE* e *CD* sia infinita e $\alpha t = \dfrac{5}{96}\dfrac{pl^3}{EJ}$,

$$X_1 \to -\frac{5}{4}\sqrt{2}pl.$$

Applicando il *PSE* (*principio di sovrapposizione degli effetti)*, possiamo determinare le CdS nella trave *AC* come: $N^{AC} = N_0^{AC} + X_1 N_1^{AC}$; $T^{AC} = T_0^{AC} + X_1 T_1^{AC}$; e $M^{AC} = M_0^{AC} + X_1 M_1^{AC}$. Da cui, è possibile tracciare i diagrammi rappresentati in figura 6.

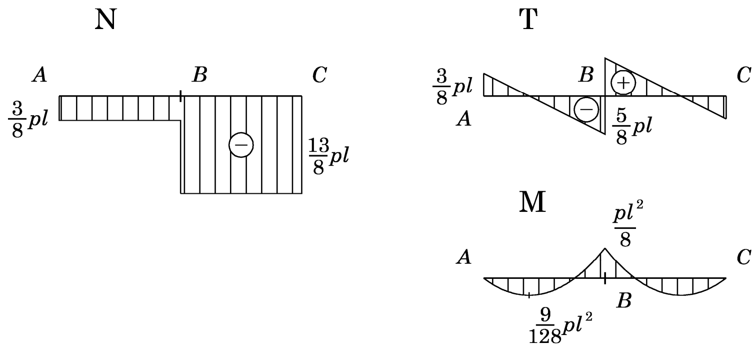

Figura 6

2) Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per i tratti *AB* (*tratto 1*), *BC* (*tratto 2*), *AE* (*tratto 3*) ed *ED* (*tratto 4*) che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica sono le seguenti (fig. 1):

$$EJv_i^{\text{IV}} = \begin{cases} p & \text{per } i = 1, 2 \\ 0 & \text{per } i = 3, 4 \end{cases};$$

1. $v_3(0) = 0$;
2. $-EJv_1^{\text{II}}(0) = 0$;
3. $-EJv_3^{\text{II}}(0) = 0$;
4. $v_1(l) = v_2(0)$;
5. $v_1^{\text{I}}(l) = v_2^{\text{I}}(0)$;
6. $-EJv_1^{\text{II}}(l) = -EJv_2^{\text{II}}(0)$;
7. $-EJv_2^{\text{II}}(l) = 0$;
8. $v_2(l) = 2\dfrac{pl}{k_1}$;
9. $v_3(l) = v_4(0)$;
10. $v_3^{\text{I}}(l) = v_4^{\text{I}}(0)$;
11. $-EJv_3^{\text{II}}(l) = -EJv_4^{\text{II}}(0)$;
12. $v_4(l) = -\dfrac{pl}{k_1}$;
13. $-EJv_4^{\text{II}}(l) = 0$;
14. $-EJv_1^{\text{III}}(l) + EJv_2^{\text{III}}(0) = \dfrac{EA}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{v_1(0) - v_2(0) + v_4(0)}{2l} - \alpha t\right]$;
15. $-EJv_3^{\text{III}}(l) + EJv_4^{\text{III}}(0) = -\dfrac{EA}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{v_1(0) - v_2(0) + v_4(0)}{2l} - \alpha t\right]$;
16. $-EJv_1^{\text{III}}(0) = \dfrac{EA}{4\sqrt{2}l}\left[3v_1(0) - 2v_2(0) + 2v_4(0) - v_2(l) + v_4(l)\right]$.

Avendo determinato gli sforzi nelle aste estensibili in funzione degli spostamenti trasversali delle sezioni intermedie e di estremità delle travi *AC* e *AD* come:

$$N_{BE} = EA\left[\frac{v_1(0) - v_2(0) + v_4(0)}{2l} - \alpha t\right]; \qquad N_{CD} = EA\left[\frac{v_1(0) - v_2(l) + v_4(l)}{4l} + \alpha t\right].$$

<u>*N.B. Si ricorda che la presente prova scritta può essere utilizzata per le successive prove (quella scritta, relativa alla parte II, e quella orale) entro 60 giorni dalla data della prova stessa*</u>.

9 febbraio 2015.