Università di Pisa

Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

(docente: Prof. Ing. Stefano Bennati)

Sintesi della soluzione della prova scritta del 15 gennaio 2015 – Parte I

Problema. Nel sistema di figura 1 le travi *AB* ed *EF* sono *flessibili* ma *inestensibili*, la trave *CD* è *rigida*, mentre le altre sono *estensibili*. Sulla trave *CD* agisce un carico distribuito trasversale uniforme, di intensità *p*. Le aste *AC* e *DF* presentano il difetto di lunghezza indicato in figura. Infine, gli appoggi elastici in *B* ed *E* subiscono un cedimento anelastico di intensità $\bar{\delta}$.

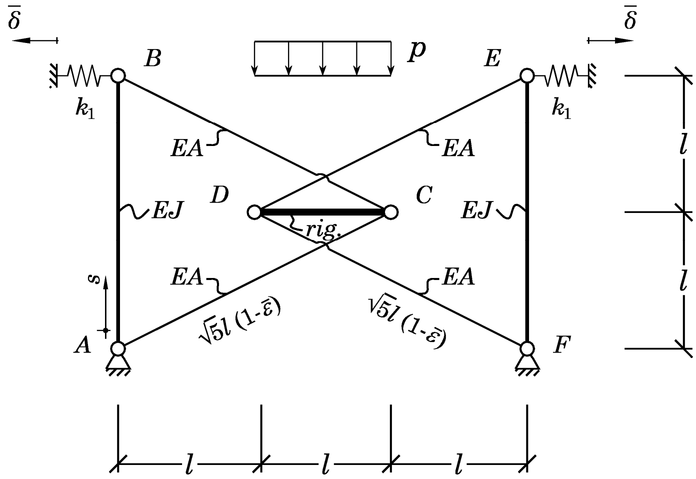
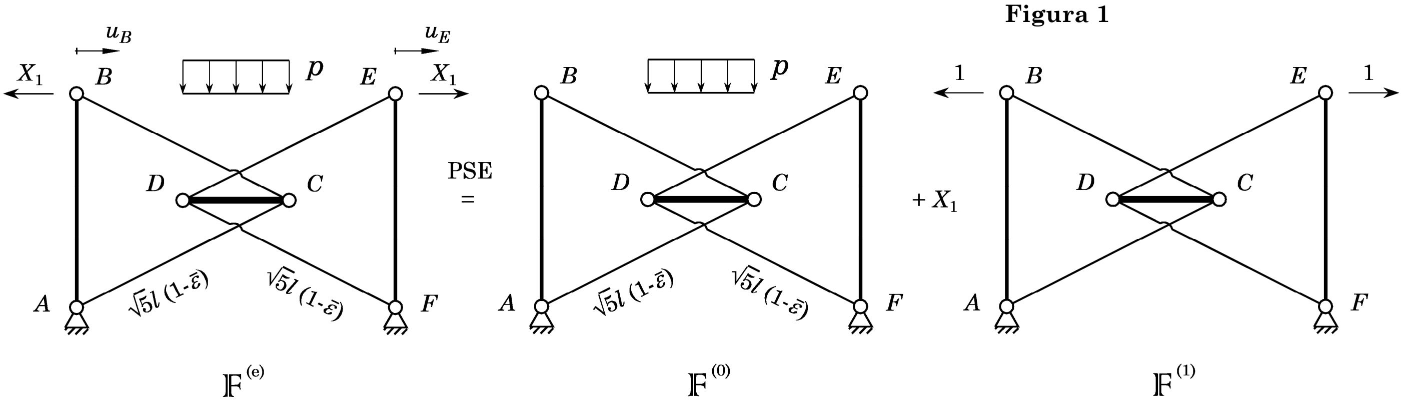


Figura 1

1) Nella risoluzione mediante il metodo delle forze, si sceglie come incognita iperstatica X_1 il valore comune delle reazioni esercitate dall'appoggio in *B* e dall'appoggio in *E*. Il sistema può allora essere decomposto nella somma seguente (figura 2): $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(0)} + X_1\,\mathbf{F}^{(1)}$.



$$k_1\left(u_B + \bar{\delta}\right) = X_1; \quad u_E = -u_B .$$

Figura 2

Considerazioni di equilibrio consentono di determinare le reazioni vincolari esterne per i sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$, rappresentati nelle figure 3 e 4.

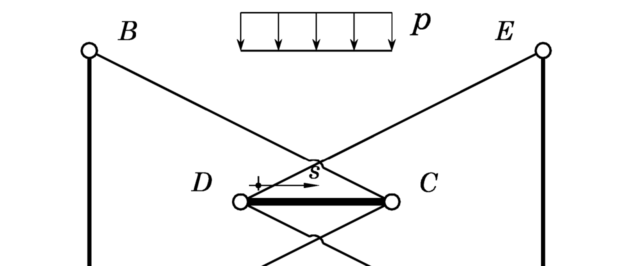


Figura 3

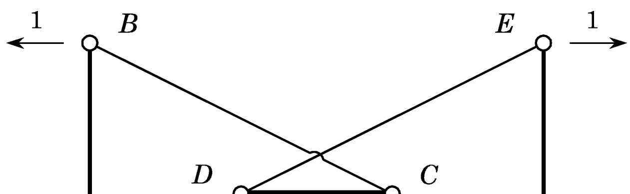


Figura 4

Le CdS nei vari tratti e nei sistemi $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(1)}$ sono raccolte nella tabella seguente, nella quale $s \in (0,\ l)$.

	N_0	T_0	M_0	N_1
AB (EF)	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
AC (DF)	$-\frac{\sqrt{5}}{2}pl$	0	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
BC (DE)	0	0	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
CD	pl	$\frac{pl}{2} - ps$	$\frac{ps}{2}(l-s)$	-2

I diagrammi quotati delle CdS sono rappresentati in figura 5.

I coefficienti di Müller-Breslau sono i seguenti:

$$\eta_1 = 2\left(\bar{\delta} - \frac{X_1}{k_1}\right); \qquad \eta_{10} = -\frac{5\sqrt{5}}{2}\frac{pl^2}{EA} - 5\bar{\varepsilon}l\,; \qquad \eta_{11} = 5\sqrt{5}\frac{l}{EA}\,.$$

Conseguentemente,

$$X_1 = \frac{5\sqrt{5}\dfrac{pl}{2} + \dfrac{5}{2}EA\bar{\varepsilon} + EA\dfrac{\bar{\delta}}{l}}{5\sqrt{5} + \dfrac{EA}{k_1 l}}\,.$$

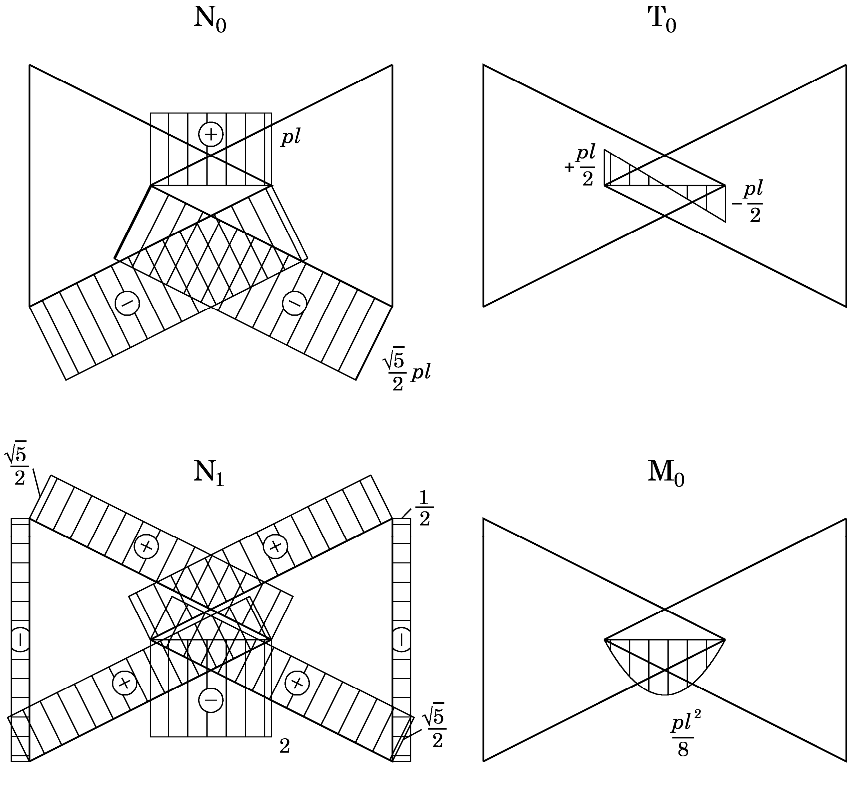


Figura 5

2) Utilizziamo come parametro incognito lo spostamento verticale, v_C, del nodo C (*positivo verso il basso*)[1].

- Gli sforzi delle aste estensibili sono

$$N_{AC} = \frac{EA}{5l}\left(5l\bar{\varepsilon} - v_C\right); \qquad N_{DF} = N_{AC};$$

$$N_{BC} = \frac{EA}{5l}\left[v_C - 2v(2l)\right]; \qquad N_{DE} = N_{BC};$$

- Imponendo l'equilibrio in direzione verticale per la trave CD otteniamo:

$$v_C = \frac{5\sqrt{5}}{4}\frac{pl^2}{EA} + v(2l) + \frac{5}{2}l\bar{\varepsilon}.$$

- Le equazioni differenziali e le condizioni al bordo per la trave AB che consentono di risolvere il problema mediante il metodo della linea elastica dunque sono:

$$EJv^{\mathrm{IV}} = 0;$$

1. $v(0) = 0$;
2. $-EJv^{\mathrm{II}}(0) = 0$;
3. $-EJv^{\mathrm{II}}(2l) = 0$;
4. $-EJv^{\mathrm{III}}(2l) + k_1\left[v(2l) + \bar{\delta}\right] - \frac{2}{\sqrt{5}}N_{BC} = 0$.

E' appena il caso di notare che, avendo la trave AB comportamento reticolare, per determinare gli spostamenti trasversali era possibile utilizzare un'equazione differenziale del secondo ordine, completa da due condizioni al bordo (quali)? Ancora: anche se non era richiesto, era possibile, utilizzando considerazione di simmetria, limitare lo studio alla porzione del sistema rappresentato nella figura 6, vincolata come in figura in corrispondenza della sezione di mezzo dell'elemento DC.

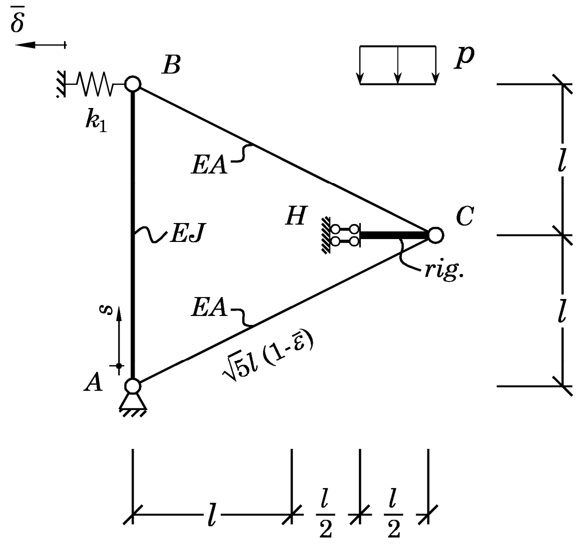


Figura 6

N.B. Si ricorda che la presente prova scritta può essere utilizzata per le successive prove (quella scritta relativa alla parte II e quella orale) entro 60 giorni dalla data della prova stessa.

16 gennaio 2015.

[1] Considerazioni sulla simmetria del sistema e la rigidezza della trave CD consentono di riconoscere che lo spostamento v_C corrisponde allo spostamento effettivo di tutti i punti della trave CD.